

氏名（本籍）	谷 文 之（東京都）
学位の種類	博士（理学）
学位記番号	甲第 1061 号
学位授与の日付	平成 26 年 9 月 30 日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当
学位論文題目	<b>Weakly Nonlinear Analysis for Hele-Shaw Problem : The Effect of Boundary Conditions</b> <b>(Hele-Shaw 問題に対する弱非線形解析：境界条件の効果)</b>

論文審査委員 (主査) 教授 渡辺 一之  
教授 本間 芳和 准教授 二国 徹郎  
准教授 辻川 信二 教授 加藤 圭一

## 論文内容の要旨

本論文は、Hele-Shaw セル中の界面の時間発展において重要な役割を果たす境界条件に関する理論的研究をまとめたものである。特に、従来の理論的なモデルにおいて用いられてきた Young—Laplace の式と呼ばれる境界条件に代わる新たな境界条件の導入とその妥当性の検証を目的とし、(i) 粘性応力テンソルの効果を取り入れた境界条件に基づく mode coupling 方程式の導出と弱非線形解析、(ii) 流体の濡れ薄膜の効果を取り入れた境界条件に基づく mode coupling 方程式の導出と弱非線形解析、の二点に関する研究を行った。以下では、本論文における各章の概要を述べる。

まず第 1 章において、本研究の背景として、自然界における様々なパターンの自発的形成現象と本研究の対象である理論モデルの関係を紹介する。雪の結晶などに見られる樹枝状パターンの形成やバクテリアコロニーのパターン、金平糖の角の成長といった自然界において観察されるパターン形成は、古くは寺田寅彦や中谷宇吉郎の研究に端を発し、近年は統計物理学・数学・理論生物学・化学、及び計算機科学といった各領域の連携に伴い、より一層活発に研究が進められている分野である。上記の例はいずれも、不安定性と空間パターンの形成という共通点から、Hele-Shaw セル中の fingering 現象と関連づけられ研究

されることが多い。ここで Hele-Shaw セルとは、2 枚のガラス板を極めて狭い間隔で平行に配置し、それらの間隙に流体を封入することにより、2 次元的な流体力学現象を観察するための実験器具である。Hele-Shaw セルを用いた典型的な実験としては、予めグリセリンなどの高粘性の流体を封入したセルに空気などの低粘性の流体を注入し、2 流体間の界面の時間発展を観察する Saffman 及び Taylor による実験 (1958) が有名である。このような状況では、セル中の界面は時間の経過とともに不安定化し (Saffman—Taylor 不安定性)、viscous finger と呼ばれる無数の突起状のパターンが成長する様子が実験的に観察されている。このようなパターンの形成は viscous fingering 現象として知られており、一般的には拡散律則凝集 (DLA) に類似したパターンが形成され、成長の方向に異方性を持たせた場合には樹枝状のパターンが形成されることが報告されている。本論文では、セル中の界面が動径対称に成長する radial viscous fingering と呼ばれる現象を対象に、不安定性とパターン形成に境界条件が及ぼす影響について研究を行った。

第 2 章では、解析上必要となる連続の式、Newton 流体の構成方程式、及び Hele-Shaw セル中の流体の支配方程式である Darcy 則の導出を目的とし、流体力学の数理的な背景について述べる。まず、質量及び運動量に関する保存則を仮定することにより、流体力学における基礎方程式である連続の式及び運動方程式が得られる。続いて、流体の力学的特性を数理的に表現する構成方程式を、Newton 流体の場合について導出する。Newton 流体は、接線応力がずり速度に比例するという Newton の粘性法則に従う流体として定義され、水や空気などの、いわゆる単純な振る舞いをする流体がこれに該当する。また、この段階では圧力は流体中の応力の等方性を仮定することにより定義され、力学的な意味における圧力に止まっている。これが流体力学の枠組みにおいて用いられる熱力学的な圧力と等しくなるための十分条件として、以下では流体は非圧縮であるものとする。このようにして導かれた Newton 流体に対する構成方程式と運動方程式から、Navier-Stokes 方程式が導かれる。ここで更に非圧縮性、及び慣性項の無視できる程度の遅い流れを仮定することにより、Navier-Stokes 方程式から Hele-Shaw セル中の流れに関して Darcy 則と呼ばれる支配方程式が得られることを示す。Darcy 則は流体の流速が圧力勾配により決定されるという方程式であり、これと非圧縮性流体に対する連続の式から、Hele-Shaw セル中の界面の時間発展に関する問題が流速ポテンシャルに対する Laplace 方程式に帰着することが示される。

第 3 章において、本研究における解析手法を先行研究に基づいて説明する。2 章で示したように、Hele-Shaw 問題は流速ポテンシャルに対する Laplace 方程式を適切な境界条件の下に解くことに帰着する。このとき、Laplace 方程式の一般解を Fourier 級数展開形で表現し、以下で紹介する境界条件に代入することで、最終的に界面の摂動の Fourier 成分に関する非線形常微分方程式を求めることができる。これは Miranda らにより初めて Hele-Shaw

問題に用いられ、Mode coupling 方程式と呼ばれている。Mode coupling 方程式は、摂動に関し 2 次までの項を含む弱非線形領域での解析に有効であり、異なるモードを有する摂動のカップリングが非線形項として含まれている点に特徴がある。また、この方程式を解くことにより原理的には摂動の時間発展が決定され、任意の時刻における界面のパターンを具体的に計算することができるという利点がある。更にこの章では、Mode coupling 方程式の導出において前提となる 2 つの境界条件の解説を行う。fingering 現象に対する多くの先行研究は、運動学的な境界条件及び Young—Laplace の式の 2 つの境界条件を課すことにより行われており、後者の妥当性は長年にわたり議論の的となっていた。より具体的には界面の不安定性に関し、理論により導かれた結果と実験結果との不一致から、従来用いられてきた Young—Laplace の式に対する補正項が研究されている。また、Young—Laplace の式は導出過程において平衡状態にある界面の釣り合いを仮定しており、変形を伴い移動する界面に対しては原理的に不適切な条件式であると考えられる。このような観点から、Young—Laplace の式に対する補正の必要性は確実なものであると言えるが、これまでその補正項が界面不安定性及び摂動界面のパターンに及ぼす具体的な影響については研究されておらず、これを明らかにすることが本研究の主たる目的となっている。

第 4 章及び第 5 章では、申請者による研究結果について述べる。第 4 章において、著者らは、従来用いられてきた Young—Laplace の式に代わって、2005 年の Kim らの研究により用いられた viscous normal stress (VNS) と呼ばれる粘性応力テンソルの効果を考慮した境界条件を導入することで、新たな Mode coupling 方程式を導いた。新たに得られた Mode coupling 方程式は、VNS の効果を見捨てることのできる場合には Miranda らにより導出された Mode coupling 方程式に一致する。このことから我々の解析は Miranda らによる先行研究を拡張したものとなっていることがわかる。また、今回得られた方程式を用い、Miranda らの先行研究における手法を踏襲した弱非線形解析を行うことにより、この方程式の非線形解が近似的に得られた。その結果、界面の不安定化が従来考えられてきたより早期の段階で起こっていることがわかった。更に、この解を数値的に見た結果、実際の fingering 現象においてしばしば観測される finger 先端の拡大・分裂といった、非線形的な特徴が再現された。以上の結果から、Hele-Shaw 問題において VNS の効果を考慮する必要があること、及び VNS の効果が界面の非線形的な振る舞いに影響を与えていることが示された。

第 5 章では、第 4 章で用いられた境界条件とは異なる、Hele-Shaw セルの濡れの効果を考慮した境界条件による研究結果を述べる。第 4 章で述べたとおり、申請者は Young—Laplace の式に対する補正として VNS の効果を考慮した境界条件を用いた解析を行った。一方で 1984 年の Park 及び Homsy による研究において、Young—Laplace の式に対する同様の補正として、セル中に生じる薄膜による濡れの効果を取り入れた境界条件が提

唱されていた。この境界条件は現在までに実験及び理論的研究の双方において幅広く用いられているが、動径対称に成長する界面について用いた例は多くなく、特に非線形の領域まで含めた解析は行われていなかった。申請者は濡れの効果を考慮した境界条件を課した場合に Mode coupling 方程式を導出し、第 4 章と同様に弱非線形解析を行うことにより、界面の摂動の時間発展を求めた。解析の結果、第 4 章と同様に、Young—Laplace の式を用いた場合と比べ界面の不安定化がより促進されるという結論を得た。また同様に、finger 先端の拡大・分裂といった非線形的な振る舞いが再現された。一方で、今回得られた濡れの効果を考慮した境界条件による結果を第 4 章の VNS の効果による結果と比較したところ、前者の場合に界面の不安定化がより促進されることがわかった。

第 6 章では、本論文の総括として第 4, 5 章において得られた結果の比較と検討を行っている。また、今後解決すべき問題点についてまとめる。

## 論文審査の結果の要旨

本論文は、Hele-Shaw セル中の界面の時間発展において重要な役割を果たす境界条件に関する研究成果をまとめたものである。特に、従来の理論で用いられてきた Young-Laplace の式と呼ばれる境界条件に代わる新たな境界条件の導入とその妥当性の検証を目的とし、(1) 粘性応力 (VNS) テンソルの効果を取り入れた境界条件に基づく Mode coupling 方程式の導出と弱非線形解析、(2) 流体の濡れ薄膜 (WL) の効果を取り入れた境界条件に基づく Mode coupling 方程式の導出と弱非線形解析の二点に関する研究を行っている。その結果、これらの境界条件が、界面に自発的に形成される finger の拡大と分裂を促進することを明らかにした。以下、本論文の各章の概要を述べる。

第 1 章では、本研究の背景として、自然界における様々なパターンの自発的現象と本研究が対象とするモデルとの関係を紹介する。自然界で見られる多くの例は、いずれも不安定性と空間パターンの形成という共通点から、Hele-Shaw セル中の fingering 現象と関連づけられ研究されてきた。Hele-Shaw セルは、2 枚のガラス板を極めて狭い間隔で平行に配置し、それらの間隙に流体を封入することにより、2 次元的な流体力学現象を観察するための実験装置である。Hele-Shaw セルを用いた典型的な実験は、グリセリンなどの高粘性の流体に空気などの低粘性の流体が注入されたときに、界面の時間発展を観察する Saffman 及び Taylor による実験 (1958) である。ここではセル中界面が無数の突起状のパターンで形成されることが報告されている。本論文では、セル中の界面が動径対称に成長する radial viscous fingering と呼ばれる現象を対象に、不安定性とパターン形成に境界条件が及ぼす影響について研究を行った。

第 2 章では、解析上必要となる連続の式、Newton 流体の構成方程式、及び Hele-Shaw セル中の流体の支配方程式である Darcy 則の導出を目的とし、流体力学の数理的な背景に



ついて述べている。まず、流体力学における基礎方程式である連続の式及び運動方程式が得られる。続いて、流体の力学的特性を数理的に表現する構成方程式を、Newton 流体の場合について導出する。非圧縮性 Newton 流体を仮定し、その構成方程式と運動方程式から、Navier-Stokes 方程式が導かれる。更に非圧縮性及び慣性項の無視できる程度の遅い流れを仮定することで、Navier-Stokes 方程式から Hele-Shaw セル中の流れに関して Darcy 則と呼ばれる支配方程式が得られることを示している。Darcy 則と非圧縮性流体に対する連続の式が、Hele-Shaw セル中の界面の時間発展に関する問題が流速ポテンシャルに対する Laplace 方程式に帰着することが示される。

第 3 章は、前半で本研究に用いた解析手法を先行研究に基づいて説明し、後半で本論文で導入した二つの境界条件の物理的意味について説明している。Laplace 方程式の一般解を Fourier 級数展開形で表現し、以下で紹介する境界条件に代入することで、最終的に界面の摂動の Fourier 成分に関する非線形常微分方程式を解くことになる。これは Miranda らにより初めて Hele-Shaw 問題に用いられ、Mode coupling 方程式と呼ばれている。Mode coupling 方程式は、摂動に関し 2 次までの項を含む弱非線形領域での解析に有効であり、異なるモードを有する摂動のカップリングが非線形項として含まれている点に特徴がある。この方程式を解くことで、任意の時刻における界面のパターンを具体的に計算することができる。従来は、平衡状態にある界面の釣り合いを仮定した Young-Laplace の式が境界条件として使われてきたが、実験をよく説明するには至っておらず、また、変形を伴い移動する界面に対しては原理的に不適切な条件式であると考えられていた。本論文の目的は、今までに研究されていなかった二つの動力学的境界条件を課すことによって得られる界面不安定性及び摂動界面のパターンを明らかにすることである。

第 4 章及び第 5 章は、申請者による研究結果について述べている。第 4 章において、著者らは 2005 年の Kim らの研究により用いられた VNS テンソルの効果を考慮した境界条件を導入することで、新たな Mode coupling 方程式を導いた。Miranda らの先行研究の手法を踏襲した弱非線形解析を行うことにより、この方程式の非線形解近似解を得ている。その結果、界面の不安定化が Young-Laplace の場合より時間的に早い段階で起こっていることがわかった。数値解を詳細に見たところ、実際の *fingering* 現象においてよく観測される *finger* 先端の拡大・分裂といった、非線形的な特徴がよく再現された。この結果から、Hele-Shaw 問題においては VNS テンソルによる境界条件は実験を説明する一つの重要な効果と考えることができる。

第 5 章では、もう一つの境界条件である濡れ薄膜 (WL) 効果を考慮した解析結果を述べている。1984 年の Park 及び Homsy による研究において、セル中に生じる薄膜による濡れの効果を取り入れた境界条件が提唱されていた。この境界条件は現在までに実験及び理論的研究の双方において幅広く用いられているが、動径対称に成長する界面について用いた例は多くなく、特に非線形の領域まで含めた解析は行われていなかった。申請者は WL 効果を考慮した境界条件を課した場合の Mode coupling 方程式を導出し、第 4 章と同様に弱非線形解析を行うことにより、界面の摂動の時間発展を求めた。解析の結果、VNS 効果と同様に、界面の不安定化がより促進されるという結論を得ている。また、*finger* 先端の拡大・分裂といった非線形的な振る舞いも再現された。*finger* 拡大と分裂に見られる界面不安定化に

及ぼす VNS 効果と WL 効果を比較すると、後者がより強いことがわかった。

第 6 章では、本論文の総括と今後解決すべき問題点が述べられている。

以上のように、本研究は Hele-Shaw セル中の界面の時間発展を二つの動的境界条件を課すことによって決定し、実験で観測される finger の拡大と分裂現象をより明瞭に見出すことができたことは評価に値する。

よって、本論文は学位（博士）論文として十分価値あるものと認める。