氏名（本籍）	板垣智洋（いたがきともひろ）（山口県）
学位の種類	博士（理学）
学位記番号	甲第1065号
学位授与の日付	平成27年3月20日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
学位論文題目	**The cyclic homology of truncated quiver algebras and the Hochschild homology dimension** **（切頂箙多元環の巡回ホモロジーとホッホシルトホモロジー次元）**
論文審査委員	（主査）教授　眞田　克典 教授　木田　雅成　　教授　吉岡　朗 教授　江川　嘉美　准教授　功刀　直子

論文内容の要旨

本論文では, スペクトル系列を用いて, 体上の truncated quiver algebra (切頂箙多元環) の巡回ホモロジーの次元公式を与える. また, ある bound quiver algebra のクラスのホッホシルトホモロジー次元が無限大であることを示す.

巡回ホモロジーは Connes によって, 非可換微分幾何学の中で導入された不変量であり, 特殊な二重複体の全ホモロジー群として定義される. 多元環の巡回ホモロジーは森田同値や導来同値の不変量でありホッホシルト (コ) ホモロジーと同様に多元環の表現論における重要な不変量の一つである. また, 近年では König-Liu-Zhou(2011) によって代数閉体上の有限次元多元環の巡回ホモロジー群の奇数次部分が森田型安定同値の不変量であることが示されている. 巡回ホモロジーはその定義や以下の Connes の長完全系列からホッホシルトホモロジーと密接に関係している.

$$\cdots \to HH_n(A) \xrightarrow{I} HC_n(A) \xrightarrow{S} HC_{n-2}(A) \xrightarrow{B} HH_{n-1}(A) \xrightarrow{I} \cdots .$$

標数0の体上の多元環の巡回ホモロジーの加群構造はホッホシルトホモロジーの加群構造とこの長完全系列により具体的に計算することができる. 例えば, 標数0の体上の truncated quiver algebra の巡回ホモロジーについては, Taillefer(2001) によりその加群構造が係数体上の次元公式として決定され, Han(2006) により標数0の体上の monomial algebra の巡回

ホモロジー群の計算のアルゴリズムが与えられている．本論文では，この Taillefer による結果を一般の体上に拡張している．

一方で，体上の多元環 A の n 次ホッホシルトホモロジー群 $HH_n(A)$ やホッホシルトコホモロジー群 $HH^n(A)$ はそれぞれ

$$HH_n(A) = \mathrm{Tor}_n^{A^e}(A, A), \quad HH^n(A) = \mathrm{Ext}_{A^e}^n(A, A)$$

で与えられる．ここで A^e は A の包絡多元環を表す．Happel(1989) により有限次元多元環について，その高次ホッホシルトコホモロジー群がすべて 0 となるとき，その多元環の大域次元が有限であるかということが問題提起された．後に Happel's question と呼ばれ研究されてきたが，Buchweitz-Green-Madsen-Solberg(2005) は反例を挙げ否定的に解決した．後に Happel's question のホモロジー版が Han(2006) によりホッホシルトホモロジー次元 $\mathrm{HHdim}\, A = \sup\{n \geq 0 \,|\, HH_n(A) \neq 0\}$ を用いて予想された．この予想は未解決である．Bergh-Han-Madsen(2011) は多元環のクイバーの構造からホッホシルトホモロジー次元を調べ，この問題にアプローチしている．具体的には，2-truncated cycle をもつ多元環のホッホシルトホモロジー次元が無限大であることを示している．本論文では，2 以上の整数 m について，m-truncated cycle をもつある多元環のクラスのホッホシルトホモロジー次元が無限大であることを示す．

本論文は以下の 4 章から構成される．第 1 章では，truncated quiver algebra の巡回ホモロジーやホッホシルトホモロジー次元に関する先行研究を紹介すると共に本論文の概略について述べた．

第 2 章では，多元環のホッホシルトホモロジー群や巡回ホモロジー群，今回対象としている truncated quiver algebra についての定義や性質について説明した．

第 3 章では，一般の体上の truncated quiver algebra の巡回ホモロジー群の加群構造を決定した．標数 0 の体上の truncated quiver algebra では Connes の長完全系列を用いて計算されているが正標数の体では一般にこの方法を用いることができない．そこで，Cibils による正規化された mixed complex から得られるスペクトル系列を求める．まず，可換環上の truncated quiver algebra A のホッホシルトホモロジー群の計算に用いた Sköldberg の射影分解と Cibils による一般的な bound quiver algebra の射影分解を紹介する．そして，truncated quiver algebra のホッホシルトホモロジーを与える複体の Sköldberg による次数付けが，Cibils による正規化された mixed complex にも適用できることを利用し，その mixed complex による二重複体の全ホモロジーを，スペクトル系列を各次数に対して計算することにより求めている．その E^1-page は以下のようになっている．

$$\begin{array}{ccccccc}
HH_2(A) & \xleftarrow{B} & HH_1(A) & \xleftarrow{B} & HH_0(A) & \xleftarrow{0} \\
HH_1(A) & \xleftarrow{B} & HH_0(A) & \xleftarrow{0} & 0 & \xleftarrow{0} \\
HH_0(A) & \xleftarrow{0} & 0 & \xleftarrow{0} & 0 & \xleftarrow{0}
\end{array}$$

ここで，B は Connes の微分を表す．上の E^1-page を各次数に対して完成させるために，Ames-Cagliero-Tirao(2009) による Sköldberg の射影分解と Cibils の射影分解との間の準同型を用いて B を具体的に計算する．Sköldberg による次数付けを用いることで，E^∞-term と E^2-term が一致することが分かり，上の E^1-page から E^2-term を計算し，巡回ホモロジー

を求める．また，具体例として有限クイバーを巡回クイバーとしたときの truncated quiver algebra の巡回ホモロジーの次元公式を得ている．特に，巡回クイバーの頂点の個数に着目してその巡回ホモロジーを考察している．

本章の主定理は以下の通りである．

定理 3.8 K を標数 ζ の体，Δ を有限クイバー，m を 2 以上の整数とし，$A = K\Delta/R_\Delta^m$ とする．このとき，A の巡回ホモロジー $HC_n(A)$ は K 上の次元として次で与えられる．$c \geq 0$ に対して，

$$\dim_K HC_0(A) = \#\Delta_0 + \sum_{e=1}^{m-1} a_{cm+e},$$

$$\dim_K HC_1(A) = \sum_{\substack{r>0 \\ \text{s.t. } r|m}} (\gcd(m,r)-1)b_r + \sum_{e=1}^{m-1} \sum_{\substack{r>0 \\ \text{s.t. } r\zeta|e}} b_r + \sum_{\substack{r>0 \\ \text{s.t. } r|m, \\ \gcd(m,r)\zeta|m}} b_r,$$

$$\begin{aligned}\dim_K HC_{2c}(A) = {} & \#\Delta_0 + \sum_{e=1}^{m-1} a_{cm+e} + \sum_{c'=0}^{c-1}\sum_{e=1}^{m-1} \sum_{\substack{r>0 \\ \text{s.t. } r\zeta|c'm+e}} b_r \\ & + \sum_{c'=1}^{c} \sum_{\substack{r>0 \\ \text{s.t. } r|c'm, \\ \gcd(m,r)\zeta|m}} b_r + \sum_{c'=1}^{c} \sum_{\substack{r>0 \\ \text{s.t.} r\zeta|\gcd(m,r)c'}} (\gcd(m,r)-1)b_r,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dim_K HC_{2c+1}(A) = {} & \sum_{\substack{r>0 \\ \text{s.t. } r|(c+1)m}} (\gcd(m,r)-1)b_r + \sum_{c'=0}^{c}\sum_{e=1}^{m-1} \sum_{\substack{r>0 \\ \text{s.t. } r\zeta|c'm+e}} b_r \\ & + \sum_{c'=1}^{c+1} \sum_{\substack{r>0 \\ \text{s.t. } r|c'm, \\ \gcd(m,r)\zeta|m}} b_r + \sum_{c'=1}^{c} \sum_{\substack{r>0 \\ \text{s.t. } r\zeta|\gcd(m,r)c'}} (\gcd(m,r)-1)b_r.\end{aligned}$$

第 4 章では，ある多元環のクラスについて，そのホッホシルトホモロジー次元が無限大であることを示し，2 以上の整数 m に対する no loops conjecture の m-truncated cycle 版を満たす多元環のクラスを各 m に対して決定した．No loops conjecture とは「有限次元多元環に対してその大域次元が有限であるとき，そのクイバーは loop をもたない」という予想である．この予想は Lenzing(1969) と Igusa(1990) によって代数閉体上の多元環を含む広いクラスに対して肯定的に解決されている．Bergh-Han-Madsen(2010) は 2-truncated cycle を持つ多元環のホッホシルトホモロジー次元が無限大であることを示すことにより，no loops conjecture の loop を 2-truncated cycle に置き換えた主張も成り立つことを示した．さらに，一般の 2 以上の整数 m に対して loop を m-truncated cycle に置き換えた主張を予想し，monomial algebra に対しては肯定的に解決している．本章では，多元環の準同型がホッホシルト複体の準同型を誘導することを利用し，truncated quiver algebra に帰着させることで，2 以上の整数 m に対して m-truncated cycle をもつ多元環のあるクラスについて，そのホッホシルトホモロジー次元が無限大であることを示した．

以下が本章の主結果である.

定理 4.9 K を体, Δ を有限クイバー, $I \subset K\Delta$ を R_Δ^m に含まれるイデアルとする. $K\Delta/I$ が *m-truncated cycle* $\alpha_1, \dots, \alpha_u$ を含むとする. このとき, 次が成り立つ:

(i) $\gcd(m, \mathrm{per}(\alpha_1 \cdots \alpha_u)) \neq 1$ を仮定する. $un \equiv 0 \pmod m$ を満たす $n \geq 1$ について, 元

$$\alpha_{(c-1)m+2} \cdots \alpha_{cm} \otimes \alpha_1 \otimes \alpha_2 \cdots \alpha_m \otimes \alpha_{m+1} \otimes \alpha_{m+2} \cdots \alpha_{2m} \otimes \alpha_{2m+1} \otimes \cdots \otimes \alpha_{(c-2)m+2} \cdots \alpha_{(c-1)m} \otimes \alpha_{(c-1)m+1}$$

は $HH_{2c-1}(K\Delta/I)$ で 0 でない. ここで $c = un/m$ とする.

(ii) e を $1 \leq e \leq m-1$ である整数とする. $un \equiv e \pmod m$ を満たす $n \geq 1$ に対して, 元

$$\sum_{0 \leq j_1, \dots, j_c \leq m-2} \alpha_{2c+1+j_1+\cdots+j_c} \cdots \alpha_{un} \otimes \alpha_1 \cdots \alpha_{1+j_1} \otimes \alpha_{2+j_1} \otimes \alpha_{3+j_1} \cdots \alpha_{3+j_1+j_2} \otimes \alpha_{4+j_1+j_2} \otimes \cdots \otimes \alpha_{2c-1+j_1+\cdots+j_{c-1}} \cdots \alpha_{2c-1+j_1+\cdots+j_c} \otimes \alpha_{2c+j_1+\cdots+j_c},$$

は $HH_{2c}(K\Delta/I)$ で 0 でない. ここで $c = (un-e)/m$ とする.

特に $\mathrm{HHdim}\,(K\Delta/I) = \infty$ である.

系として no loops conjecture の m-truncated cycle 版が成り立つ多元環のクラスを決定した.

系 4.10 K を体とし, Δ を有限クイバー, I を R_Δ^m に含まれる $K\Delta$ の *admissible ideal* とする. 多元環 $K\Delta/I$ が有限の大域次元を持つとき, Δ は *m-truncated cycles* を持たない.

論文審査の結果の要旨

巡回ホモロジーは，ホッホシルト（コ）ホモロジーと同様に多元環の森田同値や導来同値の不変量であり，多元環の表現論において非常に重要な概念である．
本論文で申請者は，一般標数の体上の切頂箙多元環の巡回ホモロジー群を論じている．また，切頂箙多元環のホッホシルトホモロジーの加群構造を利用して, ある特別な閉路を含む道多元環に対して, そのホッホシルトホモロジー次元を考察している．
本論文は 4 章からなっている．第 1 章は本論文の研究背景と概要を述べ，第 2 章では本論文の研究対象であるホッホシルトホモロジー，巡回ホモロジーの基礎的事項, 及び切頂箙多元環に対する次数付けについて説明している．
第 3 章では，一般標数の体上の切頂箙多元環の巡回ホモロジーの加群構造を決定している．多元環の巡回ホモロジーは，ホッホシルト複体を用いて，二重複体の全ホモロジーとして定義されるものであり，巡回ホモロジーとホッホシルトホモロジーを含

む Connes による長完全列は両者が密接に関係していることを明らかにしている．

一般に可換環上の切頂箙多元環のホッホシルトホモロジーの加群構造は決定されており，これと上の長完全列を利用することで，標数 0 の体上の場合の巡回ホモロジーの次元公式はすでに得られている．

しかし，正標数の体の場合にはこの手法は使えない．申請者は，切頂箙多元環の Cibils によって与えられた混合二重複体に特別な次数付けを行い，その全ホモロジーをスペクトル系列を利用して計算するという手法で巡回ホモロジーの次元公式を得た．その公式は 0 以上の標数に対する一般的なものである．ここでは，2 種類の複体を利用してスペクトル系列を計算しており，さらに各次数での計算技術と合わせて，申請者の手法は非常に優れたものである．

第 4 章では，ある種の多元環のホッホシルトホモロジー次元が無限大であることを示している．すなわち，第 3 章で扱った切頂箙多元環のホッホシルトホモロジーの加群構造を利用して，クイバーの中に，m-truncated cycle と呼ばれる閉路をもつ道多元環のあるクラスに対しては，そのホッホシルトホモロジー次元が無限大であることを示している．一般に，ホッホシルトホモロジー次元が無限大であれば，その大域次元も無限大であることが知られているので，上の結果によって，大域次元が有限であれば，上記のような閉路をもたないことが示されたことになる．クイバー内のある種の閉路の有無が大域次元に関わるという事実は興味深いものであり，今後の研究の進展が期待される．

以上，本論文において申請者は，一般標数の体上の切頂箙多元環の巡回ホモロジーの研究に関して，優れた手法による注目に値する結果を得ている．また， ホッホシルトホモロジー次元が無限大であるような多元環の特徴付けを与えるなど，本論文は，多元環のホモロジー論の研究発展におおいに貢献するものである．よって，本論文は学位 (博士) 論文として十分に価値あるものと認める．