平成 12 年　7 月　8 日
東京理科大学数学教育
研究会 7 月月例会資料

平成 11 年度上越教育大学修士論文概要

理科実験を利用した中等学校数学科教材開発に関する研究

A Study of Development of Mathemathical Teaching Materials for Secondary School Utilizing Science Experiments

加藤竜吾
Ryugo KATO
上越教育大学大学院　学校教育研究科
Graduate School, Joetsu University of Education

概　要

本稿の目的は、中等学校における数学科と理科との関わりについて「数学的モデリング」の手法を用い、教材開発を行って両教科の位置付けについて模索したものである。ここでは、「自然科学の問題を活用した数学的モデリング及び数学科と理科の二面性」のモデルを提案する。このモデルの特徴は、数学科と理科の共通部分を大きく取り入れて、そこに「数学的モデリング」を適用させることにある。理科教材を利用した具体的な数学科としても取扱える例示した関数教材の中から、①測定点は常に連続量として関数を捉えさせる場合の工夫が必要であること、②一次関数において傾きが負となるものは温度減少や体積圧縮など少ない事例に限られること、③時間変化として関数を捉えるものが多いこと、④定義域に限界があり第 1 象限以外で現れる関数が考えにくいこと、⑤物体の運動以外の教材では系統性に乏しいことなどの特徴が得られた。又、提案したモデルにおいて、数学科とも理科とも区別されていない状況の中で、問題解決過程を辿ることは、生徒に既存の知識や能力を仮定したものではなく、スパイラル方式的な色彩も保っている。即ち、子どもたちにとって本来的な自然現象の現実世界を捉えさせ解決した上で、数学科的な指導と理科的な指導の二面性へと導く方式を辿ることで意義があると考えられる。更に、教育課程上の不整合性の問題もこのモデルによることで解決が図られる知見を得ることが出来た。

1. はじめに

現在の日本における中等学校の数学教育で行われる教育内容の現状は、その教材例の設定が理想化されたり非現実的なものが多くなってきていると思われる。これは、系統的な学習の重視にその一因があると考えられる。学力中心主義の時期において生じた落ちこぼれの問題は、ゆとりの時間や新しい学力観が定着してきた現在において徐々に改善がなされつつあるものの上級学校への受験のための教育が改善されたわけではなく、そのための受験指導が中心になっていることに一つの原因があるのではないかと考えられる。

そこで、現在の数学教育において取り巻かれている環境と筆者の僅かな教職経験からの状況を通して本研究の目的を提起する。

1.1. 第 3 回国際数学･理科教育調査報告書の結果

IEA における第 3 回国際数学･理科教育調査が平成 6 年から平成 7 年にかけて実施されその報告がすでに公表されている。中学校における国際比較で日本の成績は次の通りであったと報告されている。(国立教育研究所；1997)

数学の到達度は、シンガポール、韓国に次いだ成績となっている。3 回の調査の中では第 3 順位である。一方、理科の到達度は、シンガポール、チェコに次いだ成績となっている。これも 3 回の調査の中では第 3 順位である。又、日本の生徒にとって数学は、日常生活で使われることはないという意識･態度になっている。理科についても問題解決に日常生活の事柄を使用する頻度が低くなっている。

即ち、日本の生徒にとって数学や理科の学力は高い水準を維持しているものの知識･理解重視の教育が相変わらず行われていることを意味しており、現行の学習指導要領で強化された理科の観察･実験もこの調査の段階ではあまり生徒にとって意識されなかったものと考えられる。

1.2.教育課程審議会答申と新学習指導要領の状況

教育課程審議会答申が平成10年7月に行われ、小学校・中学校学習指導要領が平成10年11月に、高等学校学習指導要領が平成11年3月に告示された。(文部省；1998，1999)

今回の学習指導要領における中心的課題は、学校五日制対策であったが、教育課程審議会答申では、各学校が創意工夫を生かし特色ある教育、学校づくりを進めることを強化し、算数・数学科の目標では多面的にものを見る力や論理的に考える力など創造性の基礎を培うことを掲げており、理科の目標では知的好奇心や探究心を持つことと目的意識をもって観察、実験を行うことが掲げられた。

この答申を受けて高等学校学習指導要領数学科では数学的活動を通して創造性の基礎を培うことが目標に掲げられ、新設の必修選択『数学基礎』では社会生活における数理的な考察の中で数学が活用されている場面や身近な事象を数理的に考察することを通して、数学の有用性などを知ることとなった。一方、理科では、自然に対する関心や探究心を高めることが目標に掲げられ、単に関心を持つだけでなく調べていく心を培うこととされている。又、新設の必修選択『理科基礎』、『理科総合A』、『理科総合B』では、過去の実験の再現や課題を解決する過程、身近な自然を取扱うことが共通的な背景となっており、数学と同様にいかに日常生活的な自然現象を扱い、観察・実験をより強化した授業を行っていくかが課題となることと考えられる。

1.3. 生徒の意識

緒言の最後に実際の高等学校の生徒にとって数学の対する意識はどのようになっているか意識調査をした結果について考察する。表1に結果を示す。

表1 平成5年度入学生に対する意識調査

Q1. あなたは数学が好きですか？

はい	52名	25%
いいえ	147名	70%
NA	11名	5%

Q2. 数学が好きな理由又は嫌いな理由を述べて下さい。

この調査は、平成5年度に東京都下にある筆者の勤務する公立高等学校の入学生に年度当初の授業で1学年全員に行ったものである。対象は、普通科210名全員とした。両側検定で1%有為さであった。

この調査校は、学力的には中程度の学校である。生徒の好嫌度については、IEA調査の中学2年生では、数学が好きという生徒が53%で嫌いを上回っているが、その結果よりはかなり下回っていると考えられる。又、その嫌いな理由としては、難しい、問題が解けない、苦手、理科のように実験がないなどが掲げられていた。これは、高等学校への受験のための勉強による弊害などとも考えられる。更に、理科では行われる実験については比較的好感度があるようであった。

1.4. 本研究の目的

以上の考察から、今後の数学教育の課題としては、より日常の現象を取り入れた数学科教材の設定が必要であると思われる。数学教育においても隣接教科である理科教育で行われる観察・実験を通した授業が行われることは、数学の学習の理解が促進されることのみならず、理科の学習促進を含めて両教科の授業への相乗効果を挙げることが期待できる。更に、今後重視されつつある日常生活で扱われる内容の強化につながるものともなるであろうと考えられる。そこで、第一として両教科の統合の可能性、第二として両教科の授業改善の可能性と発展性の示唆を得ることを目的とする。

2.「数学的モデリング」の理科教育における活用

日常生活における数学の数学教育への活用は、最近特に叫ばれて久しいものである。数学的モデリングという考え方は、名称こそここ10~20年で定着したものであるが、具体的な事象、モデルを利用した数学の理解の手法は、戦前における数学教育においても『理数』として考えられていた。本章では、数学と理科との関わりについての歴史的な経過と数学的モデリングにおける先行研究、現在における理科教材を利用した数学学習の動向と特徴を考察し、理科実験を利用した関数教材開発の在り方について述べることとする。

2.1.数学科と理科との関わりについての歴史的な変遷

昭和10年から発行され始めた緑表紙『小学算術』においては、『尋常小学算術は、児童の数理思想を開発し、日常生活を数理的に正しくするやう指導する…。』(阿部；1979)と述べていると指摘しており、昭和6年が数学教育改良運動に反映されたと考えられる。このことは、実験・実測を重視し、近似計算、力学や天文学を取り入れた授業につながったものと考えられる。国民学校時代にも、理数科という教科が事物現象を正確に考察し処理することが目標

とされていた。

戦後、占領下においては、コア・カリキュラムと生活単元学習が重視された。しかし、この中では、社会科の取扱いの中で理数科としての統合路線は崩されていった(礒田;1995)と述べている。そて、GHQ指導により進められた学習指導要領が今日かなりの拘束力を持つようになり系統学習、現代化への動向の中で統合的な思想から遠ざかるようになった。

昭和 50 年代からの中心的な話題は、オープンエンド・アプローチや問題解決学習などが、一つの問題解決過程の学習としての特筆すべきところであろう。そして、今日的な変革としては、テクノロジーの革新で 1985 年に登場したグラフィック電卓の普及である。このために数学的モデリングがグラフィック電卓を利用した物理現象からの教材化(佐伯他;1998)として見られるに至っていると思われる。

2.2.先行研究に見る数学的モデリング

次に、三輪(1983)、W.Blum・M.Niss(1991)、池田・山崎(1993)、松嵜(1998)の研究から数学的モデリングの捉え方とその思想について考察する。

2.2.1.三輪の研究における数学的モデル化過程

三輪(1983)は、数学的モデルを次のように捉えている。

『数学的モデルというのは、数学的手段を主な表現方法としてとっているものであり、したがって、モデルの運用においては、当然のことながら、数学的作業が伴うものである。』(p.118)

そして、数学的モデル化過程を H.O.Pollak(1979)の考えを基にして図 1 のように捉えている。

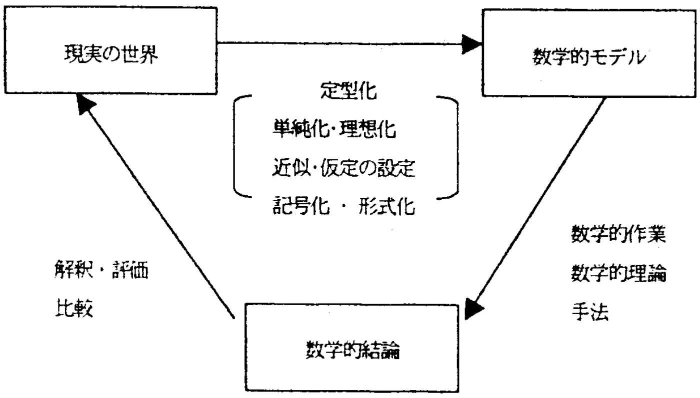

図 1 数学的モデル化過程(三輪;1983)

三輪の主張の数学的モデルと数学的モデル化過程をより明解に分かりやすく説いているところに重要な位置付けがあると考えられる。しかし、当時の学習環境が系統学習の流れがまだ強く残っていた時期でもあり、カリキュラムまでを構築して考えられるものではなかったことと、数学的モデルをより単純化・理想化しすぎてしまっている点においてリアルワールドの限界性が生じていることが考えられると思われる。

2.2.2.Blum・Niss の研究における数学的モデリング

W.Blum・M.Niss(1991, 1993)は、問題と問題解決、モデルとモデリング、応用学と応用数学、リアルワールドとリアル問題などといった言葉の明確な定義を明確にした。

リアル問題と呼ばれる応用数学的問題の中で、オリジナル状態のリアルモデルは、データ、概念、関係、条件、そして仮定から数学化され、数学的モデルを形成する過程をモデリングといい、図表の結論、計算、具体的な例のチェックなどにより数学的結果を得てリアルワールドに翻訳しなおすという過程を数学的モデリングと捉えている。(pp.37-40 を要約)そして、モデルに修正が必要なときには問題解決過程は数回循環すると指摘している。

W.Blum・M.Niss の指摘は数学的な活動とリアルワールドとの関連をより明確化したものと言えよう。

2.2.3.池田・山崎の研究における数学的モデリング

池田・山崎(1993)は、三輪や W.Blum・M.Niss に基づき、数学的モデリングを次のように定義している。

『実際の問題の解決を目標に、実際の問題を数学化して数学的に解決し、解釈・検討して不都合が生じればモデルの修正を適宜繰り返し、より適した実際の問題の解決を見出していく全活動』(p.27)

そして、数学的モデリングを図 2 のように提起し

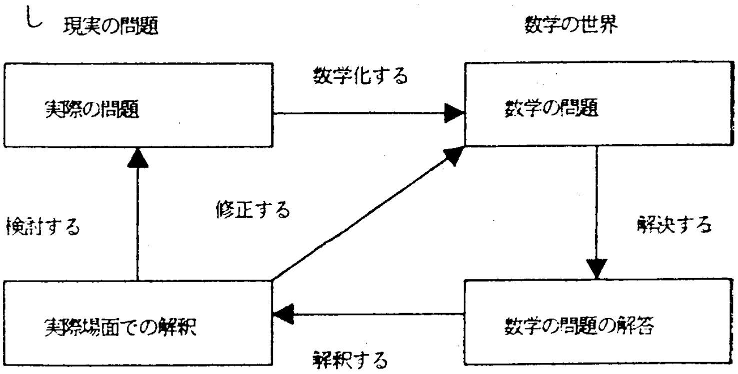

図 2 数学的モデリング(池田・山崎;1993)

2.2.4.松嵜の研究における数学的モデリング

松嵜(1998, 1999)は、数学的モデリングによる数学科と他教科との統合的学習に関する研究の中で、教科の枠組みを数学科と他教科で捉え、現実(世界)

の問題から現実(世界)の問題の結果へ導く過程として捉えている。(1998, p.359 ; 1999, p.66)これは、数学的モデリングにおいて統合的学習をしていく上での捉え方として考えられている。

2.2.5.「数学的モデリング」と本研究との位置付け

数学的モデリングは、日常生活や他教科との関連において、これまでにも多くの研究が行われてきていることが分かる。

しかし、現実的な問題点としては、①数学的モデリングにおいては、数学の世界における活動を強調している面が強いと思われるため、数学科をコアとした考え方が強く周辺領域として他教科を捉えていることが多いと思われること、②数学的に取扱われる数学的モデルの系統性や関連性を見出していくことが難しいことが考えられること、③学際的な分野を取扱わなければならないためにその分野についての相当の見識を有していなければならないこと、③数学科においては見識がある教員であっても小学校教員などを除いて他教科を指導し得る資格を必ずしも有しているわけではないことなどが考えられると思われる。

本研究においては、数学的モデリングにおける理科教育の活用として次の視点を中心課題として考察し授業実践することを目的としている。

2.3.理科教材を利用した数学学習の動向と特徴

理科教材を利用した数学学習の現在の動向としては、佐伯・氏家らの研究(1998)が挙げられる。

佐伯・氏家らは、数学と物理とを関連づけた実験観察型授業を高等専門学校の学生向けに平成8年度より実施している。この授業における目的を次のように述べている。

『身近な物理現象データを簡易センサーとデータ収集機で取り込み、グラフ電卓で数学的モデル化し、最終的には、モデル化した方程式の物理的意味を考察すること』(p.10)

佐伯・氏家らの利用している数学的モデリングは、池田・山崎の数学的モデリングであり、その特徴的なものは、テクノロジーを積極的に活用していることである。ここで言うテクノロジーとは、グラフィック電卓とCBLセンサーである。

そして、佐伯・氏家らは、『数物ハンズオン』として図3に見られるような数学と物理の統合専門教育としての位置付けを行っている。

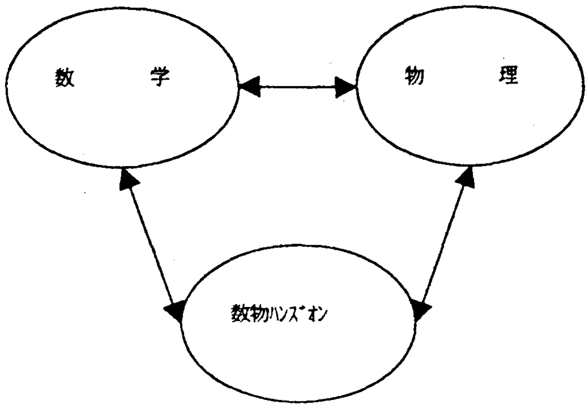

図3　数物ハンズオン(佐伯・氏家；1998のHP資料)

ここで、佐伯・氏家らの実践研究におけるテクノロジーを利用している点で、テクノロジーとの組合せは、実験データの測定、データの信頼性、データ処理簡便さなどの良い点が挙げられる。しかし、そのデータ処理がブラックボックス化される可能性もあるために希薄になる可能性がある。又、高等専門学校で行われているために学習指導要領に依存される高等学校などにはそのまま下ろせない問題もある。佐伯・氏家らは物理のみに視点を置いているが、理科教育全体を捉えた指導についても必要ではないかと考えられる。

2.4.理科教育から求められる視点

現行の学習指導要領理科の目標では、「自然に対する関心を高め、観察、実験などを行い、科学的に探究する能力と態度を育てるとともに…。」(文部省, 1989b)と述べられており観察、実験を行うことが強化された。

理科教育における「科学的に調べる能力」又は「科学的に探究する能力」とは、何であろうか。これは、「探究の過程」と呼ばれるもので「問題の提起(問題発見)→情報の収集→情報の処理・解釈→問題解決(仮説の検証と一般化)」という一連の過程を言う。

戸北(1988)や武田(1991)は、この過程に再循環過程も含めて考えられている。これは、これまでに述べた数学科で扱われる「数学的モデリング」と同一視していくことができると考えられる。

又、自然現象について生徒の「誤概念」も存在する。そこで、「科学知」としての「誤概念」についても意識できるような視点も含めて、理科教育から求められる視点を考えて行く必要があると思われる。

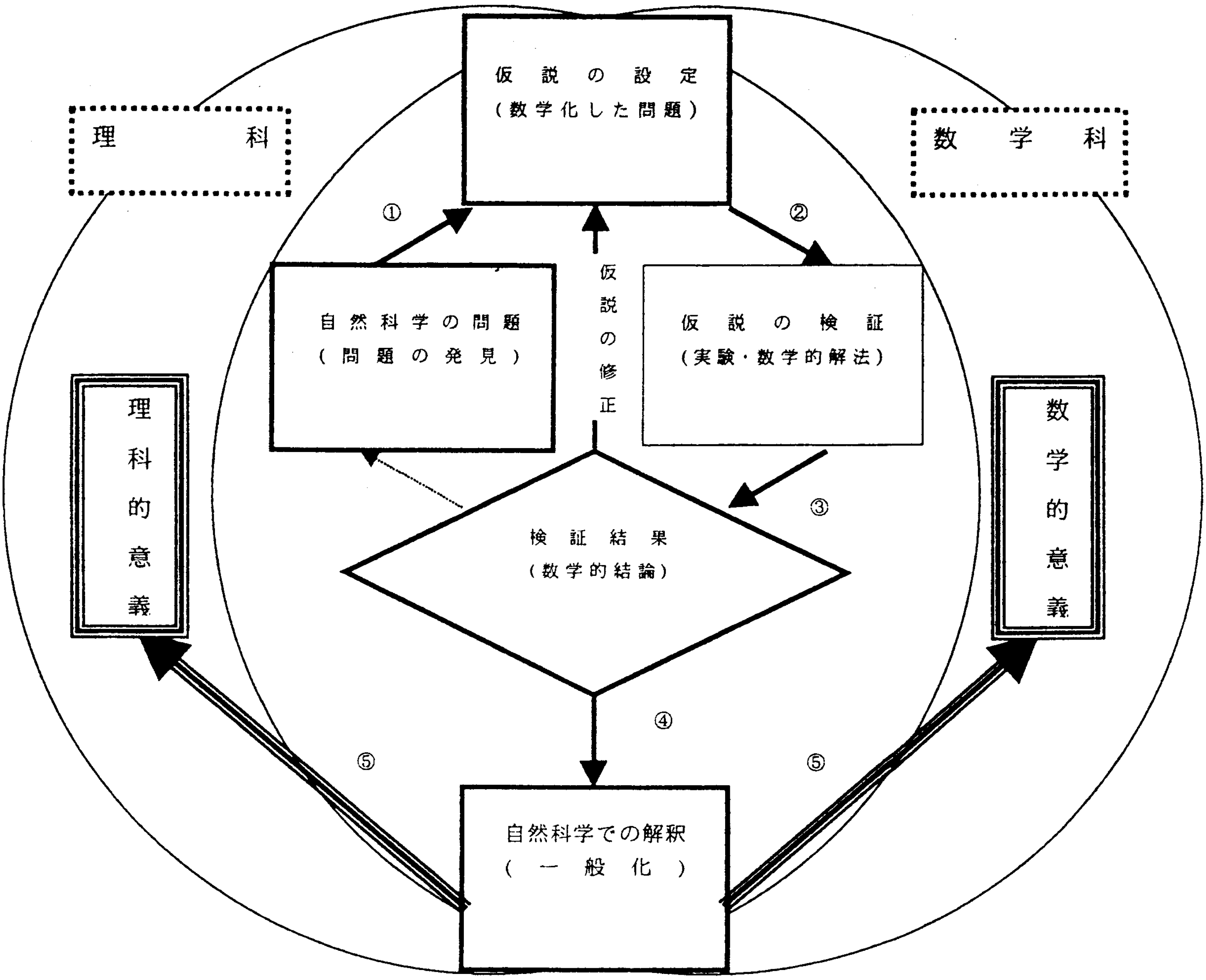

図4　自然科学の問題を活用した数学的モデリング及び数学科と理科の二面性

2.5.理科実験を利用した関数教材開発の在り方

学校教育における研究としては、教材論、指導法論、認知過程論、評価論などが考えられる。

理科教育における内容で数学的モデルを構築する場合の中心的な課題は、何であろうか。それは、どのような教材を用意するかであるかであると考えられる。その教材の良し悪しが、授業における成果の良し悪しに繋がるといっても過言ではないであろう。

藤岡(1994)は、教材づくりを『四つの局面』として捉えている。それらは、次の通りである。

『第一の局面・課題の成立、第二の局面・教育内容の研究、第三の局面・教材化、第四の局面・実験授業』(pp.76-80)

従って、本研究における主とした実践研究としては、理科教材の数学的モデルへの適応における具体的な教材案である。そしてもう一つは、マイクロティーチングを利用した実験授業における実践である。そこで、「数学的モデリング」における現実的な問題点を考慮し、理科実験を利用した数学的モデルを次のような方略を用いた教材開発を行う。

2.5.1.自然科学の問題を活用した数学的モデリング及び数学科と理科の二面性

まず、数学科と理科という教科の枠組みに立って「数学的モデリング」の手法を取り入れ、更に、理科教育から求められている視点も組み込んだ図式につ

いて次に考えてみたい。これらの観点を盛り込んだ「自然科学の問題を活用した数学的モデリング及び数学科と理科の二面性」図 4 を提案したい。

この図式の特徴的なことは次の 4 点である。

まず、第 1 点目としては、数学科と理科の配置を左側に理科、右側に数学科を配置したことである。これは、「数学的モデリング」における多くの図式を意識したものである。「数学的モデリング」における「現実の世界」(Real World)と「数学の世界」(Mathematical World)の多くは、左側に「現実の世界」、右側に「数学の世界」を配置し、時計回りに問題解決プロセスを説明している。「現実の世界」は、ここでは、理科に相当するものなので、それに合わせたものである。

第 2 点目としては、数学科と理科の共通部分を大きく取り入れたことである。このことによって、共通領域で行うべき事項を明確化すると共に、より数学科と理科の密接な関連性を図っていくことを意識化している。

第 3 点目としては、「数学的モデリング」(図における太枠)を積極的に活用したことである。従前の数学的モデリングは、「現実の世界」と「数学の世界」を区分けしていた。更に、数学科としての活動場面を意識していたために数学科がコアとなるような思想が強かったが、この図式では、「数学的モデリング」を共通部分に配置しているので、両教科が対等な立場に立てていることにも注目したい。

第 4 点目としては、「数学的モデリング」によって解決した自然科学での解釈(一般化)を数学的意義と理科的意義(或いは数学的見方と理科的見方)として二面的に取り上げたこと(図における三重枠)である。即ち、数学科としての固有の見方や問題として取扱う場面と理科としての固有の見方や問題として取扱う場面を新たに保証していることである。このことによって、各教科で必要な事項を改めて取り上げることができるわけである。

以上の特徴を図式の中にバランス良く、シンメトリーに配置し、分かりやすくしたものである。

2.5.2.問題解決のプロセス

次に図 4 における問題解決プロセスについて述べることにする。このプロセスを図式の中では、①から⑤までの手順で明示している。

①は、自然科学の問題(問題の発見)から仮説の設定(数学化した問題)までの過程である。

この図式の出発点は、自然科学の問題(問題の発見)から出発する。多くのプロセスでは、上や左上など端から出発することが多い。それに比べて、これは、一見すると中途半端な位置から出発すると思われるかもしれない。しかし、これには意図がある。自然科学の多くの問題、特に理科教材を積極的に活用する本研究においては、根源は理科教材の中に存在する。従って、プロセスとしては数学科と理科の共通部分ではあるが、より理科に近い位置に配置して出発点としたものである。そして、これは「探究の過程」における問題の発見に対応するものでもあるので、それを括弧書きで示した。「数学的モデリング」における次の段階は、数学化した問題である。ここでは、仮説の設定とした。「探究の過程」では、情報の収集や情報の組織化が含まれることになる。一見この図では省略したように見えるが、ここでは、それらも包含して仮説の設定として考えている。

②は、仮説の設定(数学化した問題)から仮説の検証(実験・数学的解法)までの過程である。

一般的に数学的モデリングでは、数学化した問題から数学的結論へ一気に導き出す。しかし、その間の過程は、数学的処理はもちろんのこと、本研究のように理科教材を取り上げる場合は、観察・実験が行われることになる。既に述べたように、理科教育で現在強化されている観察・実験は、意識的に取り上げるべきものであるので、敢えて項目立てをすることにした。「数学的モデリング」の一部には位置付けているが、従前の「数学的モデリング」には特別記述されることのなかった項目なので、太枠には含めず、細枠で加えている。又、問題によっては、数学的解法の場面も存在するので、数学科側に配置している。

③は、仮説の検証(実験・数学的解法)から検証結果(数学的結論)までの過程である。

仮説の検証によって、設定した仮説は、ある一定の結論を得ることになる。これが検証結果で数学的モデリングにおける数学的結論の場面でもある。一般的に数学的モデリングでは、現実の問題に適応し直したときに、適応度に応じて再循環を行うか否かを判断することになるが、このモデルでは、検証結果において判断分岐を用意した。それは、仮説の再設定は、数学的結論から用意した方がより望ましいと考えたからである。この結果、仮説の修正をして仮説の設定に戻る場合と本来の問題を見直す場合の 2 通りのプロセスを用意した。

④は、検証結果(数学的結論)から自然科学での解釈(一般化)までの過程である。

自然科学での解釈(一般化)は、数学的モデリングにおける現実場面における結論、最終場面として考

えることが出来る。この④のプロセスは、最終段階で辿るプロセスである。

⑤は、自然科学での解釈(一般化)から数学的意義と理科的意義までの過程である。

この過程は、一般的に「数学的モデリング」には現れない。従って、「数学的モデリング」とは別の意味合いを持っている。一般化された問題を、例えば、表やグラフを伴うものであれば関数的な側面として取扱うような数学科としての問題と、例えば、自然現象としての理論解釈などを行う側面として取扱うような理科としての問題としての意義として、得られた一つの結論から二面的な見方をする場面として意識付けている。

これらのプロセスを伴うものとしての理科教材を利用した数学科教材のあり方について次の三点検討したい。

(1)数学教育と理科教育の両面をコアとした学習

数学的モデリングを活用する場合、単に数学的モデルを他教科から借用してくるだけでなく、他教科における学習も阻害しない指導が望まれる。従って、理科教育における指導としての意義も含めて数学科教員と理科教員が相互的に連携し強調して関わり、一つの実験から数学教育にも理科教育の指導に活用できることが望ましいと言えよう。

そのためには、数学科だけをコアとした考え方ではなく、理科もコアとなり得る指導方法が望まれると考えられる。

更に、この考え方は広い範疇では、今回の学習指導要領で具体的に設けられた『総合的な学習の時間』や『選択教科』としての位置付けとの関連性も増していくものと考えられる。

(2)関数教材を系統的に捉えた数学的モデル

理科教材を数学的モデルとして捉える場合、どのような教材として考えるかが大切である。今回は、中等学校において取扱われる初等的な関数について系統的に数学的モデルとして利用することにより指導の一貫性を保てるようにした。更に、教材が生徒にとってより身近なものであるとともに親しみやすいものであることを心掛けた。

更に理科における学習指導としても利用出来るよう、その位置付けや実験教具のパフォーマンステストについても意識した数学的モデルである。

(3)指導者の問題

数学的モデリングを行う場合は、その教材を指導する上での相当の見識や技能などを有していなければならないと思われるが、その一つとして数学科の教員が理科の指導を行う場合、少なくとも理科の指導資格は必要要件であると考えられる。これだけで十分なものではないが、観察・実験などの実習指導は、数学科教員養成において現在は行われていないので、少なくとも相応の経験などがある必要があると思われる。もし、無理な場合は、数学科と理科におけるTTなども考えられるであろう。教具や実験室は数学科だけでは用意しきれない問題はゆがめないため、そのための対応も必要であると思われる。

筆者は、その両方を有しており、主として数学科を担当しているが、理科の兼担も行った経験も持っているので、その問題は改善されていると思われる。

以上の観点を考慮した関数教材として、これまで関数教材の一連の流れを考慮し、次のような授業実践を行った。

①定数値関数：自動車速度問題を利用した速さの指導についての研究(1998)
②一次関数：フックの法則を利用した関数の学習(1999)
③二次関数：ミニ四駆用ラップタイマーを利用した斜面の運動についての研究(1999)
④二次関数：視覚障害者のための物理実験に関する一考察(1995)
⑤二乗に反比例する関数：$y=ax^{-2}$の教材化と理科教材からのアプローチ(1999)
⑥分数関数：凸レンズの実験を用いた指導(1993)
⑦無理関数：単振り子の実験を用いた指導(1989, 1993, 1999)
⑧三角関数：単振り子の実験を用いた指導(1999)
⑨指数関数・対数関数：ビュレットを利用した指数関数・対数関数の教材化の試み(1999)

そこで、関数教材を例にとり、教材化したアイデアと実際マイクロティーチングを行った結果について考察する。

次の章では、これらの教材についての概要について概略を述べることとする。

3. 理科実験を利用した関数教材開発の実際

3.1. 定数値関数：自動車速度問題を利用した速さの指導についての研究

3.1.1. 目的

速さの指導は、小学校５年生から始まるが、児童・生徒にとって速さの概念は獲得するものが難し

いものの一つであり、長田(1997)を始め多くの実践研究報告がなされている。又、筆者は東京都の定時制課程の高等学校に勤務しているが昨今の入学者の基礎学力の低下も著しく四則演算もままならないまま入学してくる生徒も多い。

そこで、今回は、速さについて今までと異なるアプローチを行いこのような生徒たちにどのような思考の変化が起こったかについて考察したものである。

3.1.2.研究の方法

(1) *v-t* グラフの利用と面積図の関係

今までの多くの先行研究では *v-t* グラフに着目したものは少ないと思われる。これは、グラフの縦軸が表す速度の意味を読み取りにくいからと考えられる。そこで、距離は時間×速さという関係に着目させ、面積図を利用した問題として捉えてみることとした。なお、事前に等速度直線運動を力学台車で行い、記録タイマーで記録した紙テープの分析も行っている。

(2)自動車速度問題

自動車速度問題とは、予め自動車の速度計をビデオ撮影し、速度から移動距離を求める問題である。答合せは、地図とトリップメーターを利用した。

3.1.3.研究授業の結果と考察

平成 10 年 9 月に東京都内定時制高校の生徒 1 名に対して行った。授業は、VTR、ATR で記録し、プロトコルによる発話分析を行った。対象とした生徒は、男子で成績中位の生徒であった。

この生徒は、初めは距離、速さ、時間の関係における立式について誤概念を持っていたが、導入の問題でクリアした。そして、*v-t* グラフの考えに進めるために等速度直線運動を行った場合の記録タイマーの紙テープの間隔を予想させた。初めは段々早くなると考えたが、等速に運動している事が分かり、*v-t* グラフの意味を理解してもらえた。そして、最後に自動車速度問題を行い、等速でなくても面積が移動距離を表すことを体感してもらえた。この生徒にとってはビデオ教材を利用することは新鮮味があったようである。

3.1.4.本節のまとめ

調査結果から記録タイマーを利用した面積図の問題は有効であること、記録タイマーは物理科でも扱う教具なので意義があると思われること、ビデオ教材を利用した問題から速さについて考察できることなどが考えられる。

なお、自動車速度問題のビデオ作成にあたっては、速度メーターはデジタル式が良いこと、直線の道路で撮影すること、振動が多いのでカメラをしっかり固定すること、映像に風景を入れること、法定速度を守るなど考慮する必要があると考えられる。

3.2.一次関数：フックの法則を利用した関数の学習

3.2.1.目的

物理現象における 1 次関数の事例としては、等速度運動における時間と移動距離の関係、オームの法則における電流と電圧の関係、理想気体における温度と内部圧力或いは温度と体積の関係など考えることができる。しかし、時間的や装置的に難しいものも多い。そこで、仮設も立てやすく測定も容易なフックの法則を利用した実験による 1 次関数の数学的モデルを導入し、授業を行った結果について考察することを目的とする。

3.2.2.研究の方法

(1)原理

つる巻ばねでは、伸びが x[m]のとき、弾性力の大きさ F[kgw]は x に比例するので次の式が成り立つ。

$$F=kx$$

これをフックの法則といい、k[kgw/m]をばね定数という。この授業では、$x=k'F$ として、F をおもりの個数、x を伸びとして考える。

(2)学習の目当て

フックの法則を利用して、おもりの個数がバネの伸びに比例することから 1 次関数の理解を深め、リアルワールドの問題における限界性について考察することを目的とする。

この数学的モデルでは、時間に依存されないので、生徒の進度に応じゆっくりと学習できる特徴がある。

3.2.3.研究授業の結果と考察

平成 11 年 3 月に東京都内定時制高校の生徒 1 名に対して行った。授業は、VTR、ATR で記録し、プロトコルによる発話分析を行った。対象とした生徒は、女子で成績中位の生徒であった。

この生徒は、はじめからおもりの個数と比例してバネが伸びるという仮説を立てた。これは、日常生活のモデルとしてバネばかりの性質などからも経験的にこの生徒は捉えることが出来た。

結果をグラフにする際に、この実験ではおもり 1

個に対して 3.8[cm]伸びる関係であったが、比例定数は整数値であるという観念から、3 又は 4 という数値を指摘した。しかし、バネの伸びの様子をよく考察させることにより、3.8 という比例定数を求めることが出来た。

最後の段階で、バネの問題におけるリアルワールドの限界性について考察させた。ここでは、二つの観点から捉えさせている。一つは、ある限界を超えるとバネは使用に耐えられなくなることであり、この生徒指摘できた。もう一つの側面は、バネそのものの長さの限界性についてである。別の側面としては、フックの法則はスプリングなどの場合を除いて負となる場合がない。この生徒は一つひとつに理解を深めたようである。

3.2.4.本節のまとめ

1 次関数の数学的モデルはたくさんあるもののその大部分のリアルワールドの問題においては、その大部分が第 1 象限で考えるものである。そこで、負の場合について考えられるスプリングにおけるフックの法則の適用問題、温度を摂氏で捉えた場合について気体の状態方程式の問題などを考えていく必要があると思われる。

3.3.二次関数：ミニ四駆用ラップタイマーを利用した斜面の運動についての研究

3.3.1.目的

関数 $y=ax^2$ の学習は、昭和 33 年度改訂の学習指導要領から中学校 3 年で現在まで取扱われており、2 次関数の学習の意義は大きいと思われる。

多くの教科書では、自由落下運動や正方形の辺の長さと面積の関係などからこの関数の導入を行っているおり、最近は、テープレコーダーのカウンター問題(西村 1997)やリレー問題(大沢 1998)など報告も行われてきている。これらの多くは、CBL センサーを用いたグラフ電卓などのテクノロジーを利用しており、測定結果をすぐに作表しグラフ化できる特徴を持っている。

しかし、CBL センサーやグラフ電卓が必ずしも日常生活においては一般的なものではなく生徒にとって必ずしも馴染んでいるものとは限らない教具であることと、関数 $y=ax^2$ の係数の値がきれいな値でないため一般的には解析しにくいものであることの 2 点が問題点と思われる。

そこで、現在の生徒たちに比較的馴染みがあるミニ四駆用ラップタイマーを測定教具として採用し、関数 $y=ax^2$ の係数の値が 1 となるような角度の斜面を製作し、授業を行うことにより得られた知見について報告することを目的としている。

3.3.2 研究の方法

(1)ミニ四駆用ラップタイマーの利用

ミニ四駆とは、四輪駆動車のミニカーで、自宅で遊べる遊具として数年前に登場して以来、男の子を中心に人気がある。最近では、時間を競わすためのミニ四駆用ラップタイマーが販売されていて、これは、赤外線センサーにより 100 分の 1 秒まで表示させることができ、ストップウォッチの機能を十分に果たすことが出来る。今回は、田宮模型製のものを利用した。数社から 3,000 円前後の定価で販売されている。

(2)斜面の角度を 11° にすること

斜面における等加速度直線運動では、斜面と水平方向とのなす角を θ とすると、距離 s[m]と時間[t]との関係は、重力加速度を g として、

$$s=1/2(g\cdot\sin\theta)t^2$$

として、表される。従って、$1/2(g\cdot\sin\theta)=1$ となる θ を求めれば、関数 $y=x^2$ の導出を簡単にさせられる。この角度は、$\theta \fallingdotseq 11.\cdots°$ である。ちなみに係数が 2 の場合は約 24°、3 の場合は約 37°、1/2 の場合は約 6° である。今回は、パチンコ玉が通る程度のビニールホースを利用して、11° と 24° の斜面を作成し、ミニ四駆用ラップタイマーを用いて測定する授業を設定し、定時制高校の生徒に対して行った。

3.3.3.研究授業の結果と考察

平成 11 年 3 月に東京都内定時制高校の生徒 1 名に対して行った。授業は、VTR、ATR で記録し、プロトコルによる発話分析を行った。対象とした生徒は、女子で成績中位の生徒であった。

この生徒は、初めは等速運動を行うと予想していたが、結果から *s-t* グラフを作成することにより、無理関数の曲線となり、時間の 2 乗が距離に比例している関係を導き出すことが出来た。更に、リアルワールドにおける測定範囲の限界性についても理解することが出来た。

事後インタビューでは、実験を用いたこの授業を好意的に受け止めている発話もあり、関数の学習の理解を深めることが出来たようである。

3.3.4 本節のまとめ

ミニ四駆で遊んだ世代は、現在の中学生が中心である。従って、ここ数年の間は、このラップタイマ

一に慣れ親しんだ生徒たちには有効であると思われる。又、1 次関数(等速運動)、2 次関数・指数関数(反発係数)、無理関数・三角関数(単振り子)、2 次関数(力学的エネルギー保存の法則)など、時間が関与する物理現象から、関数を学習していく上でこのミニ四駆用ラップタイマーは、有効に活用できるものと思われる。

3.4. 二次関数：視覚障害者のための物理実験に関する一考察

3.4.1. 目的

視覚障害者にとって特に力学の分野の概念形成は難しい。等加速度運動の実験においてなるべく安価に作成でき、効率性を高めた教具の開発をすることを目的とする。

3.4.2. 研究の方法

(1)原理

視覚障害者が健常者と同じような実験から概念形成するためには、視覚以外の機能を使うことで代替を行わなければならない。一般的には、触覚を利用した盲人用記録タイマー、聴覚を利用したベルや鈴、センサー、盲人用感光器がある。ここでは、聴覚による実験で鈴を用いた教具の開発を行った。

カーテンレールによる斜面の運動から等加速度運動であることを検証するのに既存の装置がある。今回はこの装置に、すでに決定した間隔に鈴が付けられている点を改良した。バネの間隔毎に鈴を付けて、任意の等間隔を容易に視覚障害者も作り出し実験できる装置とした。

(2)測定の方法

任意の等間隔とした斜面をセットし、鈴の鳴り初めと鳴り終わりで時間を測定する。時間の測定には、ビュレットを用いた水時計を利用し、測定毎に同じ高さからの水量を測ることとする。

更に、1、4、9の鈴が鳴るようにセットし等間隔で鳴ることを確認する実験も行い、追認する。

結果の分析は、水時計の水量の 2 乗が間隔と比例していれば時間の 2 乗が移動距離に比例することと同一視できることとなる。

3.4.3. 結果と考察

本実験における装置の作成と仮想実験は、平成 7 年度東京理科大学理学専攻科修了研究の一貫として、筑波大学附属盲学校理科石崎喜治教諭、鳥山由子教諭の助言の下で行った。

結果的をグラフ化し回帰分析した結果は、相関係数 0.93~0.99 で水量の 2 乗に比例していることが理解できた。斜度が増すにつれて、落下速度が速くなるので、視覚障害者にとっては鈴が鳴るまでのタイミングが結果に相当影響していることが分かった。この対策としては、間隔をなるべく長く取るようにすること、視覚に頼れないので何回か練習し、念頭で数値を数えタイミングを整えるなどが考えられる。

3.4.4. 本節のまとめ

今回の実験では、実際の盲学校生徒には行っていないので、仮想的な考察しかできていないが、課題としては、測定には複数の生徒が必要となるので、個別化実験をさせていくには更なる工夫が必要であることなどが分かった。

3.5. 二乗に反比例する関数：$y=ax^{-1}$の教材化と理科教材からのアプローチ

3.5.1. 目的

現在の日本の中等学校における関数の学習において、二乗に反比例する関数を直接扱う機会はほとんどないものと思われる。しかし、二次関数を学習した後の生徒にとって、二乗に反比例する関数とグラフについて興味を持つことは自然なことであると思われる。

そこで、日本の中等学校におけるその取扱いと中学校 3 年生の意識調査の結果及び太陽電池を用いた照度実験を行うことにより中学生に実施したマイクロティーチングの結果について述べることを目的とする。

3.5.2. 日本の中等学校におけるその取扱い

二次関数の取扱いは、昭和 33 年改訂から中学校 3 年で取扱われており、これは平成 10 年改訂の次期学習し同様利用でも変わりはない。それに対して、二乗に反比例する関数の取扱いは昭和 52 年改訂の時にだけ登場した。理科においては、昭和 33 年改訂と昭和 44 年改訂の中学校理科で光に関する取扱いがなされていたときだけ扱われていた。

3.5.3. 中学校 3 年生の意識調査

平成 10 年 11 月に二次関数学習を終えた直後の東京都内公立中学校 3 年生 192 名を対象として、次に学習する関数どして適切なものを順番に挙げてもらった。その結果として、学んでいくべき順番としては $y=1/x^2 \rightarrow y=x^3 \rightarrow y=1/x^3 \rightarrow y=x^4$ で挙げた生徒が 54% で一番多かったものの学びたい順番としては $y=x^3 \rightarrow y=x^4 \rightarrow y=1/x^2 \rightarrow y=1/x^3$ を挙げた生徒が一

番多かった。その理由としては、反比例する関数は難しいものと考えていると思われる生徒が多いと思われることと二次関数を学んだ直後ということもあり、先により高次の関数のグラフについて興味をいだいた結果であると考えられる。しかし、約 2 割の生徒は、$y=1/x^2 \to y=x^3 \to y=1/x^3 \to y=x^4$ を挙げており、選択教科としての学習などに適している。なお、結果については、χ^2 検定を有意さ 1%で行っている。

3.5.4.照度実験によるアプローチ

二乗に反比例する数学的モデルとして照度の概念を導入する。

(1)原理

光に照らされる面の明るさ(照度)は、その一定の面積にあたる光の量によって決まる。光を受ける面と光源との距離が 2 倍、3 倍となると、同じ量の光を光を受ける面積は、距離の 2 乗に比例するからそれぞれ 4 倍、9 倍となる。従って、単位面積あたりの照度は、1/4, 1/9 となるので光源からの距離の二乗に反比例する。

(2)照度の一般的な測定方法

一般的には、ルクス計(照度計)の使用が考えられる。又、写真現像用の露出計の利用なども考えられるが、いずれも高価な備品であることなどの理由により生徒実験による個別実験に適しているものではない。又、ルクスという単位系を同に有しなければならない問題も存在する。

(3)太陽電池を利用した照度実験の教材化

ルクス計や露出計の難点を解消し、生徒にとって身近で安価な教材を作成することによって照度実験を行う方法として、太陽電池と電流計をつないだルクス計の代用装置を作成することにより、教材化した。太陽電池の照度面は、一定の面積であるので、電流計の読みがそのまま照度として考えることが出来る。このことは、新しい単位系を導入しないで関数の学習ができるという点においても意義があるものと思われる。

(4)数学的モデルとしての位置付け

数学的モデリングは、数学的結論が適切でない場合、仮説の修正と再検討の場面が生じてくることが知られている。

本実験では、生徒はまだ二乗に反比例する関係を知らないので冒頭から予想してくることは考えにくい。従って、仮説の修正が求められることとなり、マイクロティーチングにおいては、修正場面が生じてくることが予想される。

3.5.5.研究の結果と考察

平成 11 年 2 月に東京都内公立中学校 3 年生 4 名を対象にして行った。生徒は、すでに推薦入試で高校進学を決定しており、補習授業として位置づけて行った。授業は、2 時間行い、学習プリント(ワークシート)にグループ毎に記録させ、提出させたものによる分析を行った。対象とした生徒は、上位の学校の生徒であった。

授業の流れとしては、暗室において壁に当てた光の明るさの様子を観察し、距離と明るさの関係について議論させ、検証の仕方を考えさせる。太陽電池を利用した測定装置を提示し、実験を行う。その際、電流計の代わりに簡易ブザーを用いた様子についても観察させる。結果の整理には、表計算ソフトを用いて行い、グラフの様子と測定結果を検討し、距離の二乗に反比例する関係を導き、最後に、関数 $y=a/x^2$ のグラフの概形と特徴をまとめる形をとった。

生徒の当初の仮説は、光源からの距離から一定の割合で減少する意見と光源からの距離に反比例して減少するという意見の二つに分かれた。二乗に反比例して減少するという意見は出なかった。

簡易ブザーによる予備実験は、音によるデモンストレーションとしても面白いので実験をしてみたいという意識を駆り立てたようである。

電流計による測定の結果、一定の割合で減少しないことに納得できた。表計算ソフトによるグラフで、反比例のグラフであるという考えを強くしたようであるが、数値を検証して行くうちに単なる反比例のグラフでないことから仮説の修正のための意見が出なくなってしまった。しかし、いくつかのモデルを提示しながら表計算ソフトで検証するうちに、距離の二乗に電流値を掛けたものが一定であることを見つけ出して結論に導いた。

この授業から太陽電池を用いることで、照度、光度の単位系わ入れないでも二乗に反比例する関数が理解できることが理解できる。特に、太陽電池を用いることはクリーンなエネルギーである点からも環境教育の上でも意義がある。又、二乗に比例する見方と二乗に反比例する見方の二面性を理解できることなどが知見が得られた。しかし、照度の測定面が広いと、光源からの距離が一定でない問題点やリアルワールドにおける三乗に反比例する数学的モデルにつなげていきにくい問題点も明らかになった。

3.5.6.本節のまとめ

今回の生徒たちは、かなりの興味を持って参加してもらえた。今後の課題としては、光度を変えた実験、照度面に角度を付けた問題などの設定が考えられる。又、太陽電池を用いない実験なども想定して行くことが出来ると考えられる。

3.6.分数関数：凸レンズの実験を用いた指導

3.6.1.目的

分数関数の数学的モデルとしては、直角双曲線による数学的モデルで、オームの法則において、電流を抵抗の関数としてみる場合、並列回路の合成抵抗、直列回路のコンデンサー容量、ボイルの法則などが考えられる。

ここでは、座標軸以外の漸近線を扱える数学的モデルとして、凸レンズの焦点距離と像の関係に着目した実験を行い、得られたグラフから関数の式を考察することを目的とする。

3.6.2.研究の方法

(1)原理

凸レンズを通した物体の結像までの距離は、凸レンズの焦点距離に依存することが知られている。一般に、物体から凸レンズまでの距離を x、凸レンズから結像までの距離を y とし、焦点距離を f とすると、x と y の関係は、

$$1/x+1/y=1/f$$

となることが知られている。

従って、$y=f^2/(x-f)+f$ で与えられるので、漸近線 $x=f,\ y=f$ の直角双曲線で与えられる。

(2)理科での取扱われ方

幾何光学は、一時その取扱いが薄れた時期が存在するが、現行の学習指導要領では、物理ＩＢ で取扱われている。

(3)数学的モデルとしての位置付け

凸レンズの実験を行うことで、結像するときの距離の関係を調べていくと、物体から凸レンズまでの距離 x が短いと凸レンズから像までの距離 y が長くなり、逆に x が長いと y が短くなる。このことから対称性を発見し、2変数の基本対称式 $x+y,\ xy$ の関係で表現できるのではないかという仮説の下で、$xy/(x+y)=$一定という立式をすることで、関係式を導き出せる。

別の方法としては、$1/x=X,\ 1/y=Y,\ 1/f=F$ として、$X+Y=F$ から最小二乗法を適用する考え方も有り得る。

3.6.3.研究の結果と考察

平成5年10月に東京都内全日制高校普通科1年生の4学級、生徒160名を対象にして行った。(旧)数学Ｉの授業として位置づけている。授業は、一斉授業で各1時間ずつ行い、学習プリント(ワークシート)にグループ毎に記録させ、提出させたものによる分析を行った。対象とした生徒は、中位の学校の生徒であった。

授業の流れとしては、分数関数の学習が済んだ後に実施した。実験の方法としては、6人を1班として、焦点距離の異なる厚いレンズと薄いレンズの2枚について距離の関係について調べさせ、グラフ用紙にプロットさせ考察させた。

一斉授業でも、実験内容によっては、事前指導次第で1時間程度でも対応することができる。凸レンズの実験に関しては、対称な部分のグラフが虚像まで使わないと表現できない問題や x と y で漸近線の異なるグラフが表現できない問題などが明らかになった。

3.6.4.本節のまとめ

この実験は、独立変数が時間に依存しないので、生徒は落ち着いて実験に望める特徴がある。今後の課題としては、分数関数の漸近線の異なる教材の開発や数学IIIにおける指導のあり方について検討していく必要があると考えられる。

3.7.無理関数：単振り子の実験を用いた指導

3.7.1.目的

無理関数の数学的モデルとしては、等加速度運動の実験で距離を独立変数とする場合などが考えられる。

ここでは、単振り子の異との長さと時間に着目した実験を行い、得られたグラフから関数の式を考察することを目的とする。

3.7.2.研究の方法

(1)原理

単振り子の運動において、糸の長さを L[m]、1周期の時間を T[s]とすると、L と T の関係は、g を重力加速度として、

$$T=2\pi\sqrt{L/g}$$

として与えられる。

ここで、$\pi\sqrt{1/g}\fallingdotseq 1$ なので、与式は、

$$T=2\sqrt{L}$$

として考えても差し支えない。

(2)理科での取扱われ方

物理においては、現行の物理IIの円運動に関連して取扱われることとなっている。物理における実験としては、重力加速度 g を求める実験として位置付けられているが多い。

(3)数学的モデルとしての位置付け

単振り子の運動の時間が、何に依存している関数の関係になっているかに着目させることに意義があると思われる。ここでは、重力加速度などの理論的な背景は別の問題として、糸の長さや振り子のおもさ、振らせる角度などの要素から考察させることに意義があると思われる。

この実験は、かなりの精度でデータを得ることができるが、結果を考察させる上では、独立変数を等間隔に取るよりも、平方数で取っていくことによって考察が行いやすくなると思われる。

3.7.3.研究の結果と考察

昭和 63 年 10 月と平成 5 年 10 月に東京都内全日制高校普通科 1 年生の全 6 学級、生徒 260 名を対象にして行った。(旧)数学Ⅰの授業として位置づけている。授業は、一斉授業で各 1 時間ずつ行い、学習プリント(ワークシート)にグループ毎に記録させ、提出させたものによる分析を行った。対象とした生徒は、中位の学校の生徒であった。

授業の流れとしては、無理関数の学習前に実施した。実験の方法としては、6 人を 1 班として、単振り子の運動の様子から何が関数の要素になっているかを予想させて関係について調べさせ、グラフ用紙にプロットさせ考察させた。

これとは別に平成 11 年 3 月に東京都内定時制高校の生徒 1 名に対しても行った。授業は、VTR、ATR で記録し、プロトコルによる発話分析を行った。対象とした生徒は、男子で成績上位の生徒であった。

一斉授業で行う場合は、考察、実験範囲をある程度限定して行えば、1 時間程度でもこの授業は可能である。

多くの生徒は、この実験ではおもさに依存するのではないかという思考をするケースが多いと思われる。平成 11 年 3 月に実施した方法では、おもさを変えたことがはっきりと分かるように、紙コップをつるし、中のおもさを 3 通りかえることによって振らせ比較させることとした。おもさによって時間が変わらないことに多くの生徒は驚くが、事後振り子時計などがその日常生活における応用例であることを知らせることで納得することができる。

3 年度にまたがる実験の中で、糸の長さは、平方数で行った。測定結果が、糸の長さとほぼきれいに比例してくれることで、考察はしやすくなり、無理関数の認識につなげることができた。

3.7.4.本節のまとめ

この実験において、少ない測定データだけであると直線として近似することもできる。従って、出来る限り測定データは多いほうが望ましいものと思われる。更に、この実験では、糸を抓むなりの条件を設定しないと平行移動したグラフなどについて考察していくことが行いにくい。又、物理科でも目的は異なるが、内容は、全く同様の実験を行う可能性があるので 1 つの実験で二面性を持っているので、理科との協調を計っていくことが大切であると考えられる。

3.8.三角関数：単振り子の実験を用いた指導

3.8.1.目的

正弦関数の数学的モデルとしては、バネ振り子による単振動の運動における時間を変数としたときの軌跡の関係、単振り子の運動における時間を変数としたとき軌跡の関係などが考えられる。

ここでは、単振り子の運動における軌跡を直接記録する方法による実験を行い、結果の式を考察することを目的とする。

3.8.2.研究の方法

(1)原理

単振り子の運動において、1 周期の運動は時間によって決定する。

今、25[cm]の単振り子は、無理関数の実験から 1 秒間で 1 周期振れることが分かる。又、振幅の幅は振らせる角度に依存し、角速度は等速度で移動させる記録用紙に依存する。

ここでは、力学台車に記録用紙を貼りつけて水平面で等速度運動をさせ、粘性物質を混ぜた墨汁を単振り子のおもりとしてつるし、振らせることによって得られるグラフの様子から正弦関数、

$$y=A\sin\omega t$$

の関係を考察することを目的とする。

(2)理科での取扱われ方

物理においては、現行の物理ⅠB の波動に関連して取扱われることとなっている。なお、単振動、

角速度に関する取扱いは、物理IIで取り扱われる。

3.8.3.研究の結果と考察

平成 11 年 3 月に東京都内定時制高校の生徒 1 名に対して行った。授業は、VTR、ATR で記録し、プロトコルによる発話分析を行った。対象とした生徒は、男子で成績上位の生徒であった。

授業の流れとしては、3 時間計画とし、1 時間目に水平面における等速度直線運動を力学台車と記録タイマーで測定する方法で実験を行い、検証した。2 時間目には単振り子の周期運動と時間について、無理関数のグラフを作成する実験、作業を行った。3 時間目にはこれらを組合せて、単振り子の運動の軌跡について検討させることを行った。生徒は、はじめジグザグのグラフか正弦関数のグラフか迷った。更に、振幅の幅が段々減少し、更に力学台車が次第に減速した場合を想定したグラフを作成した。

実験後、関数を $y=cost$ の余弦の式で定式化した。これは、単振り子を振らせる場合、初めは t 軸上から振れるわけではないので、適切な考え方かもしれない。最後に、正弦関数 $y=Asin\omega t$ として考えた場合の A と ω の意味について検討させたが、実験におけるその意味合いについて理解することができた。

3.8.4.本節のまとめ

本実験は、直接、記録用紙の軌跡を考察することが出来るので、グラフィック電卓による測定よりも理解しやすいし、平行移動した関数の式を容易に理解することが出来る。今後の課題としては、複数の人数でないと行えないため、個別化できるような測定方法の開発、正接関数についての教材開発などを行っていくことが望まれる。

3.9.指数関数･対数関数：ビュレットを利用した指数関数･対数関数の教材化の試み

3.9.1.目的

自然界において指数関数で表される数学的モデルは、温度の降下(佐伯･氏家,1998)、反発係数、半減期問題、増殖問題などたくさん存在する。しかし、それらの関数を逆関数の対数関数まで見て、取り扱われるものは少ないものと思われる。そこで、指数関数･対数関数の両方の側面として取り扱える実験としてリーク･ボトルの実験を取り上げ、ビュレットを利用した学習指導の結果を報告する。

3.9.2.ビュレットを利用した指数関数･対数関数の教材化

ビュレットとは、化学実験で扱われる精密な度盛り付き分析用ガラス管である。

高さ h, 底面積 A の柱状の容器の底部に穴があいており、液体が流出しているとき、中の液体が減るごとに流出速度が減少する。このときビュレットの流出部の断面積が a であるなら、流出速度を v とする。時刻 t から $t+dt$ の間に水面の高さが x から $x+dx$ に変わったとすると、この間に流出した水量は、$dx<0$ なので、$-Adx$ である。これは、近似的に $avdt$ でもあるので次式が成り立つ。

$$-Adx=avdt$$

このときの次の二つの数学的モデルが存在する。

(1)ベルヌーイの定理を適用する場合

ベルヌーイの法則を水面と穴に適用すると、穴における速度は、水面の高さの平方根に比例し、$v^2=2gh$ を得る。

これを微分方程式に適用すると、初期条件の下で、$x=[h^{1/2}-\{a(2g)^{1/2}/2A\}t]^2$ となり、高さは時間についての 2 次関数、時間は高さについての無理関数と考えられる。

(2)流速は底の水圧に比例と考える場合

今、$v=mx$ として微分方程式を解くと、

$$x=\pm exp\{(-am/A)t+C\}$$

$$\therefore x=Kexp(t)(\mathrm{K}：定数)$$

$$\therefore t=Llnx(\mathrm{L}：定数)$$

の形で表現できる。

従って、時間 t 毎に水量 x を測定すれば指数関数で表現され、水量 x 毎に時間 t を測定すれば対数関数で表現される二面性を持つ。

ここで、実験的には、両者の中間であると言われているが、ビュレットによる実験では局所的には 2 次関数であるが、より指数関数、対数関数と見る方が適切であると考えられる。

(3)理科教材としての側面

ビュレットを利用することで、リーク･ボトルの作成の必要性がなくなることと、ビュレットの目盛りによって正確な測定を行うことが可能である。又、ビュレットの特性や測定方法についての理解を深められる。

3.9.3.研究授業の結果と考察

平成 11 年 3 月に東京都内定時制高校の生徒 1 名に対して行った。授業は、VTR、ATR で記録し、プロトコルによる発話分析を行った。対象とした生徒は、男子で成績上位の生徒であった。

授業の流れとしては、ビュレットの仕組みと取扱

い方法の説明、リーク･ボトル実験の仮設の設定、パフォーマンステスト、滴下量を一定にした場合の測定実験(対数関数)、時間を一定にした場合の測定実験(指数関数)、データの処理と考察･リアルワールドの限界性とまとめを行った。

Sにとって、ビュレットは、初めて見る教具であった。仕組みは、すぐに理解し、実験の仮設を立ててもらった。Sは、流れ出る水量は、時間と共に比例するという仮説を立てた。理由としては、ビュレットの水の出口の大きさが一定であるから、単一時間に流れ出る水量は同じであるという理由を掲げている。ごく自然の発想である。実際の実験でSは、すぐに一定でないことに気がついて意外性を指摘している。そして、グラフが、指数関数、対数関数であることを理解してくれているが、グラフが原点を通るという矛盾性も指摘した。

3.9.4.本節のまとめ

この授業で得られた知見を 2 点述べる。

第一に、ビュレットを用いたリークボトル実験は計測しやすいことが挙げられる。滴下部が鉛直方向最下部に付いており、定量実験の器具であるから、計測も行いやすく目盛りが付いているので、有効であると考えられる。

第二に、ビュレットを用いると指数関数と対数関数の二面性を同時に考察できることが挙げられる。

ビュレットを用いた測定の中で、正確な単一時間を取ることと正確な単一水量を取ることは難しい。今後の課題として、時間とビュレットのコックとを連動させられるような装置への改造などが課題として考えられる。又、自然現象における他の教材開発を行いたい。

4.理科実験を用いた周辺環境の変化の問題

4.1.教育課程をめぐる諸問題

平成 10 年 7 月の教育課程審議会答申を受けて、平成 10 年 11 月に小学校と中学校、平成 11 年 3 月に高等学校の学習指導要領が告示された。今回は、学校五日制に伴う大幅な理数教科の削減･軽減がなされた。

現行の学習指導要領では、高等学校数学科の大幅な再編がなされたが、そのために特に理科のカリキュラムとの整合性の問題が浮上してきた。それは、現行の高等学校理科における履修の方法は、4 科目の中から 2 科目選択必修となったことである。そのために、理科では、物理や地学が採択されるケースが大幅に減少し、1 年次に化学などが置かれるケースが増加していると思われることである。そのために、数学の学習が追いつかないままに理科で数学的な内容が扱われているケースが少なくないことである。

数学科と理科との整合性問題が顕著になってきた理由としては、①数学科の学習内容が現代化の頃と比べて低下してきたことに伴って逆転現象が生じてきたこと、②教員の配置上の問題から理科の各科目の教員配置に無理が生じてきたこと、③数学科も理科も系統学習が減少しアラカルト的な科目が増加し履修の方法が多様化してきたこと、④理科ＩＢを付した科目の負担が多いことが挙げられる。

具体的な問題としては、pH の定義式における逆転現象問題(加藤；1995)を報告してから、理科の履修の方法と整合性を調べて行くうちに他にも問題が多く含まれていることが判明した。

そのうち、今回の改訂で改善されたと思われる事項と新たな問題が生じてきたと思われる事項について以下に述べる。

4.1.1.改善された事項

(1)化学科：アボガドロ数の概念

数学科の数と式が数学Ⅰに戻ったことにより、指数の取扱いが高等学校の数学科の冒頭に戻ることとなる。そのために生じていた理科の物理定数の問題は一定の改善を見たこととなる。

(2)物理科：波動の取扱い

波動の取扱いでは弧度法が避けられない。物理ＩＢ で登場していた波動は、物理Ⅰに残るのが、弧度法の扱いが数学Ⅱに戻るので改善が期待できる。

4.1.2.新たな問題が生じてきたと思われる事項

(1)物理科：静力学と速度におけるベクトルの指導

ベクトルが数学 B のままであり、中学校における平行四辺形の法則を学習してきていないために、力の概念の指導が問題になると思われる。

(2)生物科：遺伝の法則と進化の指導との整合性

遺伝が中学校から再度高等学校へ移行するために、個数の処理などが学習との関連性が増してくる。

(3)数学基礎における数学史と理科基礎における科学史との関連について

数学史或いは科学史で登場する人物には共通した人物も多いが、それらの人物を共通に扱う場面が必要ではないであろうか。

(4)情報科との関連について

情報科の教員措置を暫定的に数学科と理科で請け

負うこととなるが、本来的な目的からすると望ましくないので相当の措置が講じられることが望まれる。

なお、詳細については、今回PSで発表している「新教育課程における数学科と理科との関連について(第2報)」を参照して下さい。

4.2.テクノロジーの発展に伴う変化と多様性

コンピュータの進化で、テクノロジーを利用した教具がたくさん開発されてきた。グラフィック電卓もその一つであり、1985年に開発されてから、数学科教育にも変化をもたらしてきている。

グラフィック電卓の使用により数学的モデルから数学的結論を導くことが容易に行えるようになってきたが、その反面、関数の式の適用の多様性やグラフィック機能のレンジの問題と座標軸の比率の問題などが生じてきたと考えられる。

初めてグラフィック電卓を使用する場合は、そのような特徴を留意しながら取り扱って行くことが重要であると考えられる。

5.本研究の知見と今後の課題

本研究を通して、リアルワールドにおける理科実験を用いた特徴としては、①測定点は常に離散量なので連続量として関数を捉えさせる場合の工夫が必要であること、②一次関数において傾きが負となるものは、温度減少や体積圧縮など少ない事例限られてしまうこと、③時間変化として関数を捉えるものが多いこと、④定義域に限界があり、第1象限以外で現れる関数が考えにくいこと、⑤物体の運動以外の教材では系統性に乏しいことの5点が考えられた。

次に、本研究の冒頭立てた二点の研究の目的から照らし合わせた結論を述べる。第一は、数学科教育と理科教育のそれぞれから求められる視点を考察し、両教科の統合の可能性について探ること、第二は、理科教材を利用した観察、実験を行うことで、数学科教育と理科教育の授業改善の可能性と発展性の示唆を得ることであった。

このうち、一点目については、現在の数学科教育における研究の視点である「数学的モデリング」と理科教育から求められる「探究の過程」は、互いに相補的な関係にあると考えられる。従って、両教科のいずれにも関連する教材によっては、それぞれの教科指導のために有効に利用していけるものであると結論付けられると考えられる。一方、教材内容によっては、数学科独自の目的を辿る内容或いは数理的な思考を伴わない理科の内容などそれぞれの教科独自の指導内容もある。従って、教材によって、両教科の統合を考えながら指導を行える可能性があるが、あらゆる内容を統合していくことは不可能であると考えられる。

次に、二点目については、観察・実験を行うことは、現在の理科教育では強化されていることである。又、数学科教育においても、現実の場面を意識した指導や実際の観察、実験を行うことは生徒にとっても意識を明確化させることが出来、座学以上に探究心を掻きたてるので歓迎されるものと考えられる。あらゆる数学科の教材が、観察・実験に馴染むものではないが、授業改善の手段、時間数が削減される現在の学校教育で教材の共有化を考える上では有効であると考えられる。

次に、筆者の提案した「自然科学の問題を活用した数学的モデリング及び数学科と理科の二面性」に当てはめた場合、どのような指導の方向性を見ることができたかについて指導への示唆を考察する。

5.1.指導への示唆

ここでは、筆者の提案した「自然科学の問題を活用した数学的モデリング及び数学科と理科の二面性」のモデルの指導への示唆を考察する。

筆者のモデルにおける特徴の一つは、既に述べたように数学科と理科の共通部分を大きく取り入れて、そこに「数学的モデリング」を配置したことにあった。即ち、問題の提示場面においては、数学科とも理科とも区別されていない状況の中で問題解決過程を辿ることになるのである。

ここで取り上げた関数教材としても取扱える理科教材は、対象にした生徒の既存知識や能力は、ほとんど仮定していない。教材によっては、スパイラル方式的に生徒にとって既習事項の復習内容も加味したものとなっている。そこでは、数学科も理科も仮定していない状況であったと云える。

例えば、3.1.で取扱った「自動車速度問題」について考えてみよう。「速さの概念」は、小学校第5学年の算数科、中学校第3学年の理科、高等学校の数学III、物理ＩＢなどで取扱われることは既に述べた。しかし、初めて習う児童・生徒にとっては、「速さの概念」を算数・数学科で習おうと理科で習おうと関係ないのではないだろうか。もちろん、教材の内容によっては、教科を意識することはあると考えられるけれども、現実生活に即した生きる力を身につけさせる上で、教科による差異というものは児童・生徒にとって問題がないと考えられる。

即ち、ある自然現象の問題があったとき、「数学的モデリング」による問題解決を図る場合は、既存の「数学的モデリング」のように、はっきりと「現実の世界」と「数学の世界」を区分けする必要がないと考えられる。従って、学習指導をしていく上で、数学科と理科の共通領域を設置して行っていくことの意義は充分にあるものと考えられる。

しかし、ある自然現象の問題が解決した後には、数学科としての学習領域、理科としての学習領域を確保する必要性もなければならない。このことからそれぞれの教科による学習指導を進めていけば良いのではないだろうか。筆者のモデルにおける最終の場面の特徴として数学的意義と理科的意義の二面性について掲げた。これは、まさに教科としての意義をここから出発させていくことで解決できるものであると考えられる。

次の筆者が学校現場にいる頃から疑問に思っていたことは、教育課程上の問題点であった。現行の数学科と理科との教育課程上の不整合性の問題は、本来、数学科と理科との教科による区分けがあるために生じたものであると考えられる。しかし、筆者のモデルに照らし合わせて考えると、「数学的モデリング」の始まるスタートにおいては、数学科や理科という教科の区分けは行われない。従って、共通領域において必要な数学的事項や理科的事項を合わせて取扱っていけば、教育課程上の問題点は解消されてしまうと考えられる。よって、筆者のモデルによるアプローチが、学校現場にいた頃の"問題点"や"筆者のこだわり"を解決できたと云える。

以上が本稿を通して得られた指導への示唆である。そこで最後に今後の課題として次の提言をしたい。

5.2.今後の課題

(1)系統性のある教材開発の実施

今回、開発した教材は各々についてその意義はあるものの系統性に乏しい。学習の仕方に合わせ、生徒にとって系統的に理解していけるような理科実験を用いた教材開発が望まれる。

(2)関数以外の理科教材を利用した数学科教材の開発

本研究では、関数教材に焦点を当てて行ったが、理科教材の中には、重心や鉱物など図形的要素を含む問題、瞬間の速さなど微分法、積分法などを含む問題も考えられる。そのような問題も含めた教材開発を行っていくことも望まれる。

(3)一般の授業に合わせた指導法の開発

本研究では、一部を除いてマイクロティーチングの形で実施し、プロトコル分析を行った。しかしこれでは一般の授業に必ずしも対応してものでなく実験を伴う指導法の開発としては不十分である。従って、一般の授業に合わせた指導法の開発が望まれる。

(4)認知・評価の問題

生徒の認知の仕方については、理科教育との関連も計りながら行っていく必要があると考えられる。又、評価についても従前の数学科における評価方法に寄らない、実験やそのレポートなどポートフォリオ的な要素も含んだ方法を開発して行くことが望まれると考えられる。

【謝辞】

本稿作成にあたり、直接授業実践を行わさせていただいた東京都国立市立国立第一中学校清水文夫校長、東京都東大和市立第四中学校千葉俊信教諭、東京都府中市立府中第六中学校木下　勤教諭、東京都立第五商業高等学校塩澤久男校長、東京都立久留米西高等学校大和郁夫教諭、東京都立第五商業高等学校松枝英司教諭にご協力戴きました。更に、上越教育大学黒木伸明教授には丁寧なご指導並びにご助言を戴きました。ここに、厚く御礼申し上げます。

【主要引用・参考文献】

[1]阿部浩一，(1979)，日本数学教育史　新数学事典，大阪書籍㈱，pp．843-884

[2]池田敏和・山崎浩二，(1993)，数学的モデリングの導入段階における目標とその授業展開のあり方に関する事例的調査，日本数学教育学会誌75(1)，pp．26-32

[3]礒田正美，(1995)，算数・数学科と他教科の関連，特集号　戦後50年の算数・数学教育－われわれは何を目指すか－第Ⅳ部第10章，日本数学教育学会誌77(6・7)，pp．120-121

[4]長田修一郎，(1997)，速さの学習に関する研究，日本数学教育学会第30回数学教育論文発表会論文集，pp．427-432

[5]加藤竜吾，(1995)，数学教育と理科教育との関わりについて，日本数学教育学会誌77臨時増刊，p．525，東京大会発表資料

[6]加藤竜吾，(1996)，数学教育と理科教育との関わりについて②，日本数学教育学会誌78臨時増刊，p．572，長崎大会発表資料

[7]加藤竜吾，(1998a)，新教育課程における数学科と理科との関連について，日本数学教育学会第31回数学教育論文発表会論文集，pp．189-194

[8]加藤竜吾，(1998b)，自動車速度問題を利用した速さの指導についての研究，日本数学教育学会第31回数学教育論文発表会論文集，pp．467-468

[9]加藤竜吾・黒木伸明，(1999a)，ミニ四駆ラップタイマーを利用した斜面の運動についての研究，日本数学教育学会誌81臨時増刊，p．407

[10]加藤竜吾・黒木伸明，(1999b)，ビュレットを利用した指数関数・対数関数の教材化の試み，日本科学教育学会第23回年会集・JSSE・ICASE・PME合同国際会議論文集PA-45，p．293-294，

[11]加藤竜吾，(1999c)，関数$y=ax^2$の教材化と理科教材からのアプローチ，(未刊行)

[12]教育課程審議会，(1998)，幼稚園、小学校、中学校、高等学校、盲学校、聾学校及び養護学校の教育課程の基準の改善について(答申)

[13]国立教育研究所，(1997)，中学校の数学教育・理科教育の国際比較，東洋館出版社

[14]佐伯昭彦・氏家亮子，(1998)，数学的モデリングを重視した総合カリキュラム~身近な物理現象を数学的にモデル化する授業~，日本数学教育学会誌80(9)，pp．150-158

[15]佐伯昭彦・氏家亮子，(1999)，数学と他教科とを関連づけたクロスカリキュラムの試み，日本の算数・数学教育1998算数・数学カリキュラムの改革へ日本数学教育学会編　日数教YEARBOOK4，pp．295-314

[16]武田一美，(1991)，「科学的に調べる能力」の育成，教室の窓353，㈱東京書籍

[17]戸北凱惟，(1988)，理科教育研究の視点と方法，㈱東洋館出版社，pp．24-44

[18]藤岡信勝，(1994)，授業づくりの発想，日本書籍，pp.76-80

[19]D. F. Belin&A. L. White, (1995), Connecting School Science and Mathematics, Connecting Mathematics across the Curriculum, NCTM 1995 YEARBOOK, pp. 22-33

[20]W. Blum & M. Niss, (1991), Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to Other Subjects-State, Trend and Issues in Mathematics Instruction, Educational Studies in Mathematics, vol22, pp. 37-68

[21]W. Blum, (1993), Mathematical modelling in mathematics education and instruction, In T. Breiteig&I. Huntley&G. Kaiser Messmer (Eds.), Teaching and learning mathematics in context, pp. 3-14, Ellis Horwood

[22]H. O. Pollak, (1979)，第12章　数学と他の科学との相互作用，(数学教育国際委員会(ICMI)編，数学教育新動向研究会訳，三輪辰郎・川越一夫共訳，(1980)，世界の数学教育－新しい動向，共立出版㈱，pp．299-320)

[23]A. Matsuzaki, (1998), An Approach Integrated Curriculum Including Mathematics ~Modelling for Mathematization of Real World and Relation to the Other Subject~, ICMI-EARCOM1, Proceeding vol 1, Poster Session PA-2, p. 359

[24]三輪辰郎，(1983)，数学教育におけるモデル化についての一考察，筑波数学教育研究2，pp．117-125

[25]文部省，(1989a)，高等学校学習指導要領解説数学編理数編，ぎょうせい

[26]文部省，(1989b)，高等学校学習指導要領解説理科編理数編，実教出版

[27]文部省，(1999)，高等学校学習指導要領，大蔵省印刷局

連絡先：加藤竜吾(かとうりゅうご)
e-mail：ryugo@d8.dion.ne.jp