生徒が見つけた2変数の因数分解の解法について

東京都立文京高等学校
吉田　亘

Ⅰ．はじめに

１学年の第１学期中間考査において、生徒の答案の中に面白い解答を見つけた。

問　$2x^2+5xy-3y^2-x+11y-6$　を因数分解せよ。

$2x^2-x-6=(2x+3)(x-2)$

$-3y^2+11y-6=(-3y-2)(y+3)$

よって　与式$=(x-3y-2)(2x+y+3)$

（与式を x, y 別々の文字式と捉え、他方の文字の入った項を無視して因数分解し、同じ定数の因数を組み合わせる）

というものである。

生徒によると、「問題集をやっているとみんなそうなっているので、このやり方に気がついた。」とのこと。彼女は数学が得意ではないが、こつこつ努力する生徒である。

さて、それを受けて以下に２変数とも２次式の場合のこの因数分解の解法について考察する。

Ⅱ．２変数の因数分解の解法

２変数の２次式　$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$ が

$(mx+py+q)(nx+ry+s)$　と因数分解されるとき、

$F(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$

$=(mx+py+q)(nx+ry+s)$　①

より

$a=mn$　$b=mr+np$　$c=pr$　$d=nq+ms$　$e=qr+ps$　$f=qs$　②

①に　$x=0$　を代入すると

$F(0,y)=cy^2+ey+f=(py+q)(ry+s)$　③

このとき、$c=pr$　$e=qr+ps$　$f=qs$　④

①に　$y=0$　を代入すると

$F(x,0)=ax^2+dx+f=(mx+q)(nx+s)$

⑤

このとき、$a=mn$　$d=ms+nq$　⑥

これら③⑤を定数 q と s で組み合わせると

$F(x,y)=(mx+py+q)(nx+ry+s)$

①ならば「③かつ⑤」が成り立つから、「③かつ⑤」が成立しなければ①は成り立たない。では、逆に「③かつ⑤」から①が必ず１つ決定できるのであろうか。

容易に分かるように、x に関する因数及び y に関する因数とも２項ずつであるから、その組合せは高々２通りに限られる。

すなわち、$F(x,0)=A(x)B(x)$, $F(0,y)=C(y)D(y)$　とするとき、

$F(x,y)$ は、$A(x)$ と $C(y)$ 及び $B(x)$ と $D(y)$ の組合せ、または、$A(x)$ と $D(y)$ 及び $B(x)$ と $C(y)$ の組合せの２通りに限られる。

具体的には、③と⑤において、次の場合に２通りの組合せができる可能性がある。

(ｱ) $q=s$ の場合

(ｲ) ③が $k(p'y+q_2)(r'y+s_2)$　⑤が $h(m'x+q_1)(n'x+s_1)$ と分解される場合（ただし、各因数は既約で、$kq_2s_2=hq_1s_1$　かつ　k と h は互いに素）

例１ (ｱ) の場合

$3x^2+5xy-2y^2+4x+y+1$ の因数分解

$3x^2+4x+1=(3x+1)(x+1)$

$-2y^2+y+1=-(2y+1)(y-1)$

$=(2y+1)(-y+1)$

だから 組合せは

$(3x+2y+1)(x-y+1)$ と $(3x-y+1)(x+2y+1)$

例２(イ)の場合

$2x^2-5xy+2y^2+3y-2$ の因数分解

$2x^2-2=(2x+2)(x-1)$

$=(x+1)(2x-2)$

$2y^2+3y-2=(y+2)(2y-1)$

$=(-y-2)(-2y+1)$

だから 組合せは

$(2x+y+2)(x+2y-1)$ と $(x-2y+1)(2x-y-2)$

次に２通り組合せの可能性があるとき、どのように検証すればよいか考える。

②と④、⑥を比較すれば分かるように、③と⑤が成立するとき、$b=mr+np$ 以外の等式は、全て成立する。つまり、xy 以外の係数はどちらの組合せも与式と等しくなる。
よって、$b=mr+np$ が成り立つ組合せが因数分解である。
そこで、xy の項が消去されない $xy\neq 0$ の数（例えば $x=y=1$）をそれぞれの式に代入し、与式に代入したもの（$x=y=1$ の場合 $F(1,1)$）と一致した組合せが、$F(x,y)$ の因数分解となる。

例１のときは、$F(1,1)=12$、より
$3x^2+5xy-2y^2+4x+y+1=(3x-y+1)(x+2y+1)$

例２のときは、$F(1,1)=0$ より
$2x^2-5xy+2y^2+3y-2=(x-2y+1)(2x-y-2)$
となる。

結論として、２変数とも２次式の因数分解は、以下のようにして行うことができる。

①それぞれの変数の２次式（もう一方の変数を含む項を全て無視する）として、因数分解する。
②２つの式の各因数の定数項が同じになる組合せを作り、合わせたものを因数とする因数分解を作る。
③②において可能性のあるものを全てもとめ（最大２通り）$x=y=1$ を代入して、与式の値と等しくなるものを解とする。
（③については、xy の項のみ実際に計算して検証する方法もある）

注意）この解法は、因数分解できない設問においても形式的な解が求まってしまうため、③の確認は必ず行う。

Ⅲ．最後に

生徒は、柔軟な思考や興味深い視点で教材を捉えることがある。私は、数学を指導するもののひとりとして、そうした生徒の思考や視点を大切にして授業に活かすことが重要であると考えている。今回の課題は、同僚の横山氏が中間考査の答案に疑問を持ち、科の数人に相談をもちかけたことがきっかけで、その面白さに気がついた。教師自身が独りよがりになることなく、生徒の授業での様子やテストの答案などで気づいたり、疑問に思ったことを共有し、その中にある生徒の数学的な思考や見方に焦点が当てられれば、より充実した授業へつながると感じている。