氏名（本籍）	松井直己（神奈川県）
学位の種類	博士（理学）
学位記番号	甲第1282号
学位授与の日付	2023年3月19日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
学位論文題目	**Studies on minimal mass blow-up solutions for nonlinear Schrödinger equations** **（非線形Schrödinger方程式の最小質量爆発解についての研究）**
論文審査委員	（主査）教授　太田　雅人 教授　加藤　圭一　　教授　小池　直之 教授　横田　智巳　　教授　伊藤　弘道

論文内容の要旨

非線形 Schrödinger 方程式は非線形光学やプラズマ物理学などの分野で自然に現れる。本学位論文で扱う解の爆発とは解が有限時間で滑らかさを失って特異点を生む現象のことで、物理学的にはそれほど重視されてこなかった。その理由は二つあり、現実には特異点が発生しないことと、爆発の近傍ではモデルの妥当性がないことである。これは同時に、理論上の爆発時間の近傍では、現実には爆発を抑える摂動があることを示唆する。従って、爆発が予見され、その条件が決定されるなら、爆発時間の手前から爆発しない解を再構築できることが期待できる。故に、爆発時間の後での挙動を調べるためには、爆発時間の近傍での振る舞いを適切に解析できることは必須と言える。

本学位論文は、L^2 臨界指数の冪型非線形項とポテンシャル項を持つ $\mathbb{R}^N$ 内の非線形 Schrödinger 方程式

$$i\frac{\partial u}{\partial t}+\Delta u+|u|^{\frac{4}{N}}u-V(x)u=0 \tag{NLS}$$

の最小質量爆発解の存在と、その振る舞いについて述べる。

臨界問題（即ち、$V=0$）では古典的議論により劣臨界質量解は爆発しないことが示せる。また、臨界質量爆発解は孤立波解への擬共形変換の適用により構成できる。即ち、臨界問題には最小質量爆発解が存在する。(NLS) の劣臨界質量解も、ポテンシャルに一定の可積分

性があれば、臨界問題と同様に爆発しない。故に、(NLS) の最小質量爆発解として臨界質量爆発解の存在が期待できる。(NLS) のポテンシャルが代数的に扱いやすい場合は特殊な変換によって (NLS) の解と臨界問題の解とを相互に変換できるため、臨界問題の臨界質量爆発解から (NLS) の臨界質量爆発解を構成できる。しかし、一般のポテンシャルに対してそのような変換は明らかではないため、この方法による臨界質量爆発解の構成は難しい。

Le Coz, Martel, and Raphaël (2016) は、Raphaël and Szeftel (2011) による非古典的な手法を改良し、臨界問題に L^2 劣臨界指数の冪型非線形項を付け加えた方程式に対して最小質量爆発解を構成した。加えて、その爆発解の爆発時間の近傍における $H^1(\mathbb{R}^N)$ 内での振る舞いを記述した。特に、摂動項が爆発現象に影響を与えることを示した。本学位論文は、この Le Coz, Martel, and Raphaël (2016) の手法を基に、(NLS) に対して最小質量爆発解を構成し、爆発時間の近傍での振る舞いを virial 空間 Σ 内で記述する。但し、$\Sigma \coloneqq \{v \in H^1(\mathbb{R}^N) \mid |x|v \in L^2(\mathbb{R}^N)\}$ と定義する。

本学位論文で用いる手法のアイデアは、まず、(NLS) の解 u を、blow-up profile v とパラメータ λ, b, γ, w を用いて

$$u(t,x) = \frac{1}{\lambda(s)^{\frac{N}{2}}} v(s,y) e^{-i\frac{b(s)|y|^2}{4} + i\gamma(s)}, \quad y = \frac{y + w(s)}{\lambda(s)}, \quad \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\lambda^2} \tag{1}$$

の形に表すことにある。このとき、u が (NLS) の解であることから、v の方程式

$$i\frac{\partial v}{\partial s} + \Delta v - v + |v|^{\frac{4}{N}} v - \lambda^2 V(\lambda y - w) v + \text{modulation terms} + \text{error terms} = 0$$

を得る。この v の厳密解の導出は困難なため、変調項及び誤差項は十分小さいものと見做し、近似方程式

$$i\frac{\partial P}{\partial s} + \Delta P - P + |P|^{\frac{4}{N}} P - \lambda^2 V(\lambda y - w) v + \theta \frac{|y|^2}{4} P = 0 \tag{2}$$

の近似解 P を用いて $v = P + \varepsilon$ と表す。但し、(2) の左辺の最後の項は補正項である。特に、$\lambda \to 0$ では後ろの二項が 0 となることが期待されるので、Q を臨界問題の基底状態とすれば、$P \to Q$ となることが予想される。結果として、ε の方程式

$$0 = i\frac{\partial \varepsilon}{\partial s} + \Delta\varepsilon - \varepsilon + |P + \varepsilon|^{\frac{4}{N}}(P + \varepsilon) - |P|^{\frac{4}{N}} P - \lambda^2 V(\lambda y - w)\varepsilon + \theta\frac{|y|^2}{4}\varepsilon$$
$$+\text{modulation terms} + \text{error terms}$$

を得る。

次に、変調項が十分小さいという仮定から、パラメータ λ, b, γ, w は近似的に

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial s} + b = \frac{\partial b}{\partial s} + b^2 - \beta\lambda^\alpha = 1 - \frac{\partial \gamma}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial s} = 0$$

を満たすことが期待できる。ここで、$\beta\lambda^\alpha$ は θ の主要項である。もし u が $t = T$ で爆発するならば、$t \to T$ で $s \to \infty$, $\lambda \to 0$ となることが期待できる。従って、$s \to \infty$ で $\lambda, b, \gamma, w \to 0$ と仮定すると、$\beta > 0$ のときの近似方程式の解は、

$$\lambda_{\mathrm{app}(s)} = \left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{2\beta}{\alpha-2}}\right)^{\frac{2}{\alpha}} s^{-\frac{2}{\alpha}}, \quad b_{\mathrm{app}(s)} = \frac{2}{\alpha s}, \quad \gamma_{\mathrm{app}(s)} = s, \quad w_{\mathrm{app}(s)} = 0$$

となる。尚、$\beta = 0$ のときは $\lambda(s) = s^{-1}, b(s) = s^{-1}$ である。特に、$\frac{dt}{ds} = \lambda^2$ に留意すれば、

$$T - t \approx s^{-\frac{4-\alpha}{2}}, \quad \text{i.e.,} \quad \lambda(t) \sim |T-t|^{\frac{2}{4-\alpha}}$$

となることが予想される。

このアイデアを正当化するためには（NLS）の解 u が（1）の形に分解できなければならない。この分解は、一定の変換の下で基底状態の近傍にあるときは、直交条件を設定して陰関数定理を適用すること得られる。更に、そのときの誤差関数 ε は小さく、それは、パラメータの λ, b が $\lambda_{\mathrm{app}}, b_{\mathrm{app}}$ に一様に近いことと変調項が十分小さいことを導く。

故に、本学位論文は、爆発時間の近傍では一定の変換の下で基底状態の近傍にある爆発解を構成し、(1) の形で表すことで、構成した爆発解の爆発時間近傍での振る舞いを記述する。

本学位論文は、以下の五章からなる。

第一章では、非線形 Schrödinger 方程式の爆発解に関する先行研究と本学位論文で扱う（NLS）の性質について述べる。

第二章では、本学位論文で用いる記号の定義及びそれらに関するいくつかの性質と、第三章及び第四章で用いる補題を紹介する。特に、(1) の形へ分解するための分解補題を含む。また、第五章はこの分解補題の証明に充てられる。

第三章では、(NLS) のポテンシャルが滑らかな場合についての結果を述べる。具体的には、ポテンシャル V について、$V \in C^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ を仮定し、更に、$p \geq 2$ かつ $p > \frac{N}{2}$ であり、$q \geq 2$ かつ $q > N$ として

$$V \in L^p(\mathbb{R}^N) + L^\infty(\mathbb{R}^N), \quad \nabla V, \nabla^2 V \in L^q(\mathbb{R}^N) + L^\infty(\mathbb{R}^N)$$

とする。このとき、次の結果を得た：

定理 3.1

ある $t_0 < 0$ と臨界質量初期値 $u_0 \in \Sigma$ が存在して、$u(t_0) = u_0$ とした（NLS）の解 u は $t = 0$ で爆発する。また、ある C^1 級関数 $\lambda: (t_0, 0) \to (0, \infty)$, $b, \gamma: (t_0, 0) \to \mathbb{R}$, $w: (t_0, 0) \to \mathbb{R}^N$ が存在して、

$$\left\| u(t,x) - \frac{1}{\lambda(t)^{\frac{N}{2}}} Q\left(\frac{x + w(t)}{\lambda(t)}\right) e^{-i\frac{b(t)}{4}\frac{|x+w(t)|^2}{\lambda(t)^2} + i\gamma(t)} \right\|_\Sigma \to 0 \quad (t \nearrow 0)$$

である。更に、$t \nearrow 0$ で

$$\lambda(t) = |t|\big(1 + o(1)\big), \quad b(t) = |t|\big(1 + o(1)\big), \quad \gamma(t)^{-1} \sim |t|, \quad |w(t)| = O(|t|^2)$$

である。

Banica, Carles, and Duycaerts (2011) もポテンシャルが滑らかな場合についての最小質量爆発解の存在と、その振る舞いについての結果を得ている。当該論文では空間次元を 2

次元以下とし、ポテンシャルとその全ての導関数の有界性を仮定している。一方、本結果はポテンシャルとその全ての導関数に一定の可積分性があれば一般次元で成り立つ。更に、Le Coz, Martel, and Raphaël (2016) や後述の定理 4.1 の証明では blow-up profile P を構成する必要があるが、ポテンシャルが滑らかな場合は blow-up profile として基底状態 Q をそのまま用いることが出来る。そのため、複雑な blow-up profile の構成をする必要がない。

第四章では、(NLS) のポテンシャルが逆冪型ポテンシャルである場合についての結果を述べる。その内の一つを具体的に述べると、$0 < \sigma < \min\left\{\frac{N}{4}, 1\right\}$ として、

$$V(x) = -\frac{1}{|x|^{2\sigma}}$$

とする。このとき、次の結果を得た：

定理 4.1

任意のエネルギー水準 $E_0 \in \mathbb{R}$ について、ある $t_0 < 0$ と臨界質量かつ球対称な初期値 $u_0 \in \Sigma$ が存在して、$u(t_0) = u_0$ とした (NLS) の解 u は $t = 0$ で爆発し、$E(u_0) = E_0$ である。また、ある C^1 級関数 $\lambda: (t_0, 0) \to (0, \infty)$, $b, \gamma: (t_0, 0) \to \mathbb{R}$ が存在して、

$$\left\| u(t,x) - \frac{1}{\lambda(t)^{\frac{N}{2}}} P\left(t, \frac{x}{\lambda(t)}\right) e^{-i\frac{b(t)}{4}\frac{|x|^2}{\lambda(t)^2} + i\gamma(t)} \right\|_{\Sigma} \to 0 \quad (t \nearrow 0)$$

である。更に、ある定数 $C_1(\sigma)$, $C_2(\sigma) > 0$ が存在して、$t \nearrow 0$ で

$$P(t) \to Q \quad \text{in } H^1(\mathbb{R}^N), \quad \lambda(t) = C_1(\sigma)|t|^{\frac{1}{1+\sigma}}\left(1 + o(1)\right),$$

$$b(t) = C_2(\sigma)|t|^{\frac{1-\sigma}{1+\sigma}}\left(1 + o(1)\right), \quad \gamma(t)^{-1} = O\left(|t|^{\frac{1-\sigma}{1+\sigma}}\right)$$

である。

既に述べた通り、代数的に扱いやすいポテンシャルの場合は特定の変換によって (NLS) を臨界問題に帰着できるが、逆冪型ポテンシャルではそのような変換が自明ではない。加えて、特異性を持つポテンシャルに対して最小質量爆発解の存在を示したのは本結果が初めてとなる。更に、爆発現象にポテンシャルの特異性が影響を与えることも示した。

また、本章と第三章で共通することとして、Le Coz, Martel, and Raphaël (2016) の証明のいくつかの点を改良した。その内の一点目は、最小質量爆発解の振る舞いを記述する空間の違いである。当該論文では $H^1(\mathbb{R}^N)$ だが、定理 3.1 及び 4.1 では virial 空間 Σ となっている。この違いは、(1) の形へ分解する際の誤差関数 ε の定義を変更したことによる。二点目は、最小質量爆発解の構成方法の一般化である。Le Coz, Martel, and Raphaël (2016) は爆発解を構成する際に $H^s(\mathbb{R}^N)$ での初期値への連続依存性を利用していた。一方で、(NLS) のようなポテンシャル項を含む方程式ではその性質が自明ではない。これは、代わりとなる補題を導入して解決した。その補題の仮定は $H^1(\mathbb{R}^N)$ での局所適切性の一般的な十分条件を

満たせばよいため、証明を一般化している。

論文審査の結果の要旨

本論文では、質量臨界指数の冪乗型非線形項とポテンシャル項を持つ非線形シュレディンガー方程式の最小質量爆発解について考察されており、その研究結果について審査を行った。

非線形シュレディンガー方程式は非線形波動現象を記述する代表的な偏微分方程式であり、プラズマ物理学や非線形光学など物理学や工学のさまざまな分野に現れる。数学の問題としては主に、初期値問題の適切性、孤立波解の存在及び安定性、非線形散乱理論、解の爆発問題などが研究されている。このうち、解の爆発問題は解の特異性を問題とするため、多くの未解決問題が残されている。本論文は、爆発時刻の近くにおける解の漸近挙動について考察しており、

第１章　序論

第２章　準備

第３章　ポテンシャルがなめらかな場合

第４章　逆冪型ポテンシャルの場合

第５章　分解補題の証明

からなる。以下その内容についてより詳しく説明する。

第１章では、問題の設定およびいくつかの先行研究が紹介されている。第２章では、問題を正確に述べるための記号の導入、主結果の証明において鍵となるいくつかの補題について述べた後、主結果の証明の方針が説明されている。

第３章では、質量臨界指数の冪乗型非線形シュレディンガー方程式になめらかなポテンシャルが付け加えられた場合の最小質量爆発解について考察されている。ポテンシャルを含まない質量臨界の冪乗型非線形シュレディンガー方程式は、自由シュレディンガー方程式と同様に擬共形変換に関して不変であるという特別な対称性を持っている。そのため、定在波解に擬共形変換を施すことにより、厳密な爆発解を構成することができる。特に、基底状態に擬共形変換を施して作られる爆発解は質量が最小の爆発解であり、最小質量爆発解は対称性を除いてこれ以外には存在しないことが Merle (1993) によって示されている。

一方、ポテンシャルを付け加えると、方程式は擬共形不変ではなくなるため、厳密な爆発解は一般には期待できず、摂動論による議論が必要となる。特に、ポテンシャルを含まない場合と同様の性質を持つ質量最小爆発解が存在するためのポテンシャルに対する条件を明確にすることが問題となる。先行研究の Banica-Carles-Duycaerts (2011) では、空間次元が２以下という制限のもとで、ポテンシャルとそ

の導関数の有界性が仮定されていたが、本論文では、空間次元の制限を取り除き、さらにポテンシャルに対する条件をある種の可積分性に一般化し、ポテンシャルを含まない質量臨界の冪乗型非線形シュレディンガー方程式と同様の性質を持つ最小質量爆発解が存在することを証明した。

第４章では、ポテンシャルがなめらかでない場合、特に、クーロン・ポテンシャルを特別な場合として含む引力的逆冪型ポテンシャルの場合を考察している。この場合、ポテンシャルの特異性の影響により、ポテンシャルがない場合の厳密な爆発解とは本質的に異なる最小質量爆発解が存在することを証明している。特に、ポテンシャルの特異性の強さによって解の爆発レートが変わることを明確にした。先行研究しては、Le Coz-Martel-Raphaël (2016) によるポテンシャルを含まない二重冪型非線形シュレディンガー方程式に対する結果があるが、本論文では逆冪型ポテンシャルの特異性をうまく処理する必要があり、証明の技術的な面でいくつかの改良および一般化がされている。

最後の第５章では、第３章及び第４章の証明において重要な役割を果たす、分解補題の証明が与えられている。

以上で述べたように、本論文は非線形シュレディンガー方程式の解の爆発問題に関する重要な研究成果を含んでおり、本論文が博士（理学）の学位論文として十分に価値あるものと認められる。