氏名（本籍）	小塩　遼太郎（福岡県）
学位の種類	博士（理学）
学位記番号	甲第1281号
学位授与の日付	2023年3月19日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
学位論文題目	**Studies on support τ-tilting modules and related objects for blocks of finite groups（有限群のブロック上の台 τ 傾加群及び関連する対象に関する研究）**
論文審査委員	（主査）教授　功刀　直子
	教授　眞田　克典　　教授　木田　雅成
	教授　佐藤　隆夫　　教授　関川　　浩

論文内容の要旨

Adachi–Iyama–Reiten によって導入され、多元環の表現論の分野において近年盛んに研究されている台 τ 傾加群 (support τ-tilting module) は、Auslander-Reiten 移動 τ を用いて定義される、さまざまな表現論的な対象との間に一対一対応を持つ重要な加群である。本論文では、有限群のブロック上の台 τ 傾加群やそれに対応する対象たちを、有限群の表現論における誘導関手を用いて構成する手法について論じる。

有限群 G の正標数 p を持つ体上の表現論において、群多元環 kG の多元環としての直既約直積因子であるブロック B の導来同値に関する研究は、有限群のモジュラー表現論における局所大域化原理の定式化といえる Broué 予想によって動機づけられ、多くの研究者によってなされてきた。Rickard によって導入された傾複体 (tilting complex) は、森田理論における射影生成子 (progenerator) と類似した役割を担う複体であり、ブロック B の導来同値に関する研究は、B 上の適切な傾複体を見つけることに帰着される。このことから、ブロック上の傾複体を豊富に構成すること、及び分類を完遂させることは、ブロックの導来同値に関する研究において重要な役割を担う。

二項傾複体は自明な傾複体を除けば、最も扱いやすい傾複体といえる。さまざまなクラスの有限群のブロックに対する Broué 予想の解決に寄与してきた傾複体である Okuyama–Rickard 傾複体も二項傾複体の一種である。有限群のブロック上の二項傾複体の豊富な構成

や分類が成されれば、それ自身が有用であるのみならず、Aihara–Iyama によって導入された傾変異を二項傾複体に用いることにより、一般の傾複体を豊富に構成することにも役立つ。加えて、二項に限定した議論は、台 τ 傾加群を用いて加群の議論に落とし込むことができる。Adachi–Iyama–Reiten の結果により、ブロック B 上の二項傾複体全体と台 τ 傾加群全体は一対一に対応する。台 τ 傾加群は Asai によって左有限性と呼ばれるある種の有限性を満たす半煉瓦 (semibrick) という特別な加群と対応づけられることが示された。半煉瓦は煉瓦 (brick) のいくつかの直和となっており、半煉瓦・煉瓦はそれぞれが Schur の補題の観点から半単純加群・単純加群の一般化である。左有限半煉瓦は導来圏における単純加群の系列の一般化である単純系 (simple-minded collection) の特別な形である二項単純系とも対応することも Asai によって示されている。単純系はブロック間の導来同値を、森田型安定同値からリフトさせる手法である Okuyama method を定式化する目的で Rickard によって導入されたものであり、傾複体と共にブロックの導来同値を研究する上で重要な対象である。このような背景から、有限群のブロック上の台 τ 傾加群に関する考察はブロックの導来同値の研究において重要な意味を持つ。その一方で、有限群のブロック上の台 τ 傾加群に対する有限群の表現論的な観点からの研究は少なく、未だ途上にあると言える。本論文では、与えられた有限群 $\tilde{G}$ のブロック $\tilde{B}$ 上の台 τ 傾加群を、$\tilde{G}$ の正規部分群 G の $\tilde{B}$ に被覆されるブロック B 上の台 τ 傾加群から得る手法を与える。本論文における第一の結果は、次で与えられる。

主結果 1 . 剰余群 $\tilde{G}/G$ が p 群であり、被覆されるブロック B 上の任意の直既約な加群の同型類が $\tilde{G}$ の共役における作用で不変であるとする。このとき、以下が成立する。

(1) ブロック B 上の台 τ 傾加群全体から、B を被覆しているブロック $\tilde{B}$ 上の台 τ 傾加群全体への単射が誘導関手 $\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}} = k\tilde{G} \otimes_{kG} \bullet$ から導かれる。

(2) ブロック B 上の二項傾複体全体からブロック $\tilde{B}$ 上の二項傾複体全体への単射が誘導関手 $\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}$ から導かれる。

(3) (1) と (2) で与えられた写像は Adachi–Iyama–Reiten によって与えられた台 τ 傾加群と二項傾複体の間の対応関係と整合的となる。

(4) ブロック B 上の台 τ 傾加群のなす集合が有限集合となるとき、(1) と (2) で与えられた単射は全単射となる。

本論文における第二の結果は第一の結果における仮定を大幅に緩和した条件下で、第一の結果に類似した結論を与えるものである。

主結果 2 . ブロック B 上の台 τ 傾加群 M がブロック B の $\tilde{G}$ における惰性群の作用に関して不変であるとき、M の誘導加群 $\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}M$ が再び台 τ 傾加群となる。加えて、そのような M と対応する二項傾複体 T の誘導 $\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}T$ も再び二項傾複体となる。

本論文は以下の五章から構成される。第一章では有限群のブロックに適用可能な台 τ 傾

加群に関する先行研究を紹介し、本論文の概略及び記法を述べる。

第二章では一般の多元環に対し、台 τ 傾加群及び関連する表現論的対象の定義や性質、具体的な対応関係に関する先行研究を述べる。第三章では本論文における主結果を述べるにあたり必要となる有限群のモジュラー表現論における事実を述べるとともに、主結果の証明の鍵となる命題を紹介する。第四章では、第一の主結果の証明及び応用を述べていく。第五章では、第二の主結果の証明及び具体例を与える。

論文審査の結果の要旨

本学位論文で申請者は，有限群のブロック上の台 τ 傾加群やそれに関連する対象について論じている。

有限群のモジュラー表現論における問題は，与えられた有限群の表現の情報は p-局所部分群の表現の情報から得られるのではないかという考えに基づいている。Broué は，有限群のブロック A は，Brauer 対応子とよばれる p-局所部分群のブロック B と，不足群が可換という条件のもと，導来同値になるのではないかと予想している。この予想の解決に向けて，有限群のブロックの導来同値分類に関して研究することは重要である。

これまで有限群のブロックの導来同値分類については，多元環の表現論の道具を用いて，さまざまな研究がなされてきた。導来同値分類を行う際に，傾複体を構成する必要があるが，この中で最も基本的かつ重要な 2 項傾複体は，台 τ 傾加群との間に一対一対応があることが Adachi-Iyama-Reiten(2014) により知られる。このため，多元環の表現論において，台 τ 傾加群が近年盛んに研究されている。一方，有限群のブロック上の台 τ 傾加群に関する研究はほとんどなされていない。これに対し，本論文では，与えられた有限群 $\tilde{G}$ のブロック $\tilde{B}$ 上の台 τ 傾加群を，$\tilde{G}$ の正規部分群 G の $\tilde{B}$ に被覆されるブロック B 上の台 τ 傾加群から得る手法について論じている。

本論文は，5 章から構成される。第 1 章では本論文の研究背景と概要を述べている。第 2 章では多元環の表現論における台 τ 傾加群および関連する表現論的対象の定義や性質について，第 3 章では有限群のモジュラー表現論の一般論について，それぞれ必要事項および先行研究を紹介している。

第 4 章では，剰余群 $\tilde{G}/G$ が p 群であり，$\tilde{G}$ のブロック $\tilde{B}$ が被覆する G のブロック B の任意の直既約加群が $\tilde{G}$ 不変であるときに，G から $\tilde{G}$ への誘導関手が B 上の台 τ 傾加群全体から $\tilde{B}$ 上の台 τ 傾加群の全体への単射，および B 上の 2 項傾複体全体から $\tilde{B}$ 上の 2 項傾複体全体への単射を与えることを示している。台 τ 傾加群の全体，2 項傾複体の全体は半順序集合となっているが，上記の単射はそれぞれ順序を保ち，また Adachi-Iyama-Reiten により与えられた台 τ 傾加群と 2 項傾複体の対応とも整合的であることも示している。とくに，B 上の台 τ 加群の全体が有限集合となる場合には単射のみならず全射となることも示しており，この場合，より複雑である $\tilde{B}$ 上の台 τ 加群および 2 項傾複体は，B 上の台 τ 傾加群および 2 項傾複体から完全に決定されることになる。

第5章では，剰余群 $\tilde{G}/G$ が p 群という条件を外し，議論を行っている。このとき，B 上の台 τ 傾加群の $\tilde{G}$ への誘導は一般には台 τ 傾加群とならないが，B の $\tilde{G}$ における惰性群の作用で不変となる台 τ 傾加群は $\tilde{G}$ への誘導により台 τ 傾加群になること，またこの対応は順序を保つことを示している。

以上，本論文において申請者は，これまで有限群の表現論において研究されていない台 τ 傾加群について議論し，新しい結果を得ている。とくに，有限群の表現論において，ブロックの導来同値分類研究の発展に寄与する結果として高く評価できるものである。よって本論文は博士（理学）の学位論文として十分に価値あるものと認める。