氏名（本籍）	**田中悠也**（神奈川県）
学位の種類	博士（理学）
学位記番号	甲第1278号
学位授与の日付	2023年3月19日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
学位論文題目	**Finite-time blow-up in quasilinear chemotaxis systems with logistic source** **（ロジスティック項をもつ準線形走化性方程式系における有限時刻爆発）**
論文審査委員	（主査）教授　横田　智巳
	教授　加藤　圭一　　教授　小池　直之
	教授　太田　雅人　　教授　伊藤　弘道

論文内容の要旨

走化性方程式系は, ある化学物質に引き寄せられる性質 (走化性) をもつ生物の集中現象を表しており, その現象を特徴付ける解の爆発は数学的研究課題の一つである. 本論文では, ロジスティック項をもつ準線形走化性方程式系の解の爆発を考える.

本論文は5章からなり, 第1章の序章に続いて2部に分けて構成されている.

第I部 (第2章, 第3章) では, 次の準線形放物・楕円型 Keller–Segel 系について考察する:

$$
(1)\qquad \begin{cases} u_t = \Delta(u+1)^m - \chi\nabla\cdot(u(u+1)^{\alpha-1}\nabla v) + \lambda(|x|)u - \mu(|x|)u^\kappa, & x\in\Omega,\ t>0,\\ 0 = \Delta v - v + u, & x\in\Omega,\ t>0,\\ \nabla u\cdot\nu = \nabla v\cdot\nu = 0, & x\in\partial\Omega,\ t>0,\\ u(x,0) = u_0(x), & x\in\Omega. \end{cases}
$$

ここで, $\Omega := B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ $(n\in\mathbb{N})$ は原点を中心とする半径 $R>0$ の開球とし, u, v は非負値の未知関数とする. また, $m, \chi, \alpha > 0$, $\kappa \ge 1$ は定数で, λ, μ は実数値の連続関数とし, $0 \le \mu(r) \le \mu_1 r^q$ $(r\in[0,R])$ を満たすとする. ここで, $\mu_1 > 0$, $q \ge 0$ は定数である. また, ν は $\partial\Omega$ の外向き単位法線ベクトルとし, $u_0 \in C^0(\overline{\Omega})$ は非負値の既知関数とする.

問題 (1) において, $m=\alpha=1$ かつ λ, μ が定数関数のとき, ロジスティック項 $\lambda u - \mu u^\kappa$ の影響により解の増大は抑制されるため, 解の爆発は起こりにくいと考えられる. 実際, Tello–Winkler (2007) により, $m=\alpha=1$ かつ $\kappa\ge 2$ のときに解は有界になることが示

された．これに反して，Winkler (2018) は，$n \geq 3$ かつ $m = \alpha = 1$ のときに，$\kappa > 1$ が小さければ，ある時刻 $T^* \in (0,\infty)$ が存在し，$u \in C^0(\overline{\Omega} \times [0,T^*)) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega} \times (0,T^*))$, $v \in \bigcap_{\vartheta > n} L^\infty_{\mathrm{loc}}([0,T^*); W^{1,\vartheta}(\Omega)) \cap C^{2,0}(\overline{\Omega} \times (0,T^*))$ を満たす解 (古典解) で爆発するものが存在することを示した．

本研究では，ロジスティック項による抑制効果がある中で，解の爆発を促す走化性項 $-\chi\nabla \cdot (u(u+1)^{\alpha-1}\nabla v)$ の影響が小さいときに，解が爆発するかどうかについての研究を行う．なお，定理 5.1.1 以外における解の爆発は，$T^* \in (0,\infty)$ を解の最大存在時刻として，次の意味で与えられる:

$$\lim_{t \nearrow T^*} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} = \infty. \tag{2}$$

第 2 章では，$m=1$, $\alpha \in (0,1)$ で，λ, μ が定数関数の場合の問題 (1) を扱い，先行研究で用いられていたモーメント型関数

$$\phi(t) := \int_0^{s_0} s^{-\gamma}(s_0 - s)\left(\int_0^{s^{\frac{1}{n}}} \rho^{n-1} u(\rho,t)\,d\rho\right) ds \quad (t \geq 0) \tag{3}$$

$(s_0 \in (0,R^n), \gamma \in (0,1))$ と，解のプロファイルの導出により解の爆発を示す．ここでは特に，$n=3$ の場合の結果を述べる．

定理 2.1.1 ($n = 3$ の場合). $m=1$ とし，λ, μ は定数関数とする．$\alpha \in (0,1)$, $\kappa > 1$ は

$$\frac{5}{6} < \alpha < 1 \quad \text{かつ} \quad \kappa < 1 + \frac{6\alpha - 5}{6(3-2\alpha)}$$

を満たすとする．このとき，任意の $\widetilde{L} > 0$, $M_0 > 0$, $M_1 \in (0, M_0)$ に対して，以下を満たす $r_\star \in (0,R)$ が存在する: 非負で球対称な初期値 $u_0 \in C^0(\overline{\Omega})$ が $u_0(x) \leq \widetilde{L}|x|^{-6}$ $(x \in \Omega)$, $\int_\Omega u_0(x)\,dx \leq M_0$, $\int_{B_{r_\star}(0)} u_0(x)\,dx \geq M_1$ を満たすとき，(1) の古典解が一意的に存在し，(2) の意味で有限時刻で爆発する．

第 3 章では，第 2 章で得られる解のプロファイルを改良し，定理 2.1.1 の改良及び $m > 1$ や $\alpha > 1$ の場合への一般化となる次の結果を示す．

定理 3.1.2 ($n = 3$ かつ λ, μ: 非負値の定数関数の場合). $m \geq 1$ とし，$\alpha > 0$, $\kappa \geq 1$ は

$$m - \frac{1}{3} < \alpha < \min\left\{\frac{1}{2}m + \frac{2}{3}, -m + \frac{7}{3}\right\}$$

かつ

$$\kappa < 1 + \frac{3(m-\alpha)+1}{6} - (m-1) - (1-\alpha)_+$$

を満たすとする．このとき，任意の $\widetilde{L} > 0$, $M_0 > 0$, $M_1 \in (0,M_0)$ に対して，以下を満たす $\varepsilon_0 > 0$ と $r_\star \in (0,R)$ が存在する: 非負で球対称な初期値 $u_0 \in C^0(\overline{\Omega})$ が $u_0(x) \leq \widetilde{L}|x|^{-\frac{6}{3(m-\alpha)+1} - \varepsilon_0}$ $(x \in \Omega)$, $\int_\Omega u_0(x)\,dx = M_0$, $\int_{B_{r_\star}(0)} u_0(x)\,dx \geq M_1$ を満たすとき，(1) の古典解が一意的に存在し，(2) の意味で有限時刻で爆発する．

第 3 章の 6 節では，ロジスティック項の代わりに非線形の生産項をもつ準線形放物・放物型 Keller–Segel 系を扱い，解の有界性を導くことで生産項による解挙動への影響を調べる．

第 II 部 (第 4 章，第 5 章) では，ロジスティック項と非線形の生産項をもつ準線形放物・楕円型 Jäger–Luckhaus 系の解の爆発について考察する．

第4章では, 次の非退化放物・楕円型 Jäger–Luckhaus 系を扱う:

$$
(4)\qquad \begin{cases} u_t = \nabla\cdot(D(u)\nabla u) - \nabla\cdot(S(u)\nabla v) + \lambda u - \mu u^\kappa, & x\in\Omega,\ t>0,\\ 0 = \Delta v - \overline{M_f}(t) + f(u), & x\in\Omega,\ t>0,\\ \nabla u\cdot\nu = \nabla v\cdot\nu = 0, & x\in\partial\Omega,\ t>0,\\ u(x,0) = u_0(x), & x\in\Omega. \end{cases}
$$

ここで, $\Omega := B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ $(n\in\mathbb{N})$ は原点を中心とする半径 $R>0$ の開球とし, u は非負値, v は実数値の未知関数, $\lambda,\mu>0$, $\kappa>1$ は定数とする. また, $D,S\in C^2([0,\infty))$, $f\in\bigcup_{\beta\in(0,1)} C^\beta_{\mathrm{loc}}([0,\infty))\cap C^1((0,\infty))$ であり, D は正値関数, S,f は非負値の非減少関数とする. また, $\overline{M_f}(t) := \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(u(x,t))\,dx$ とし, $u_0\in\bigcup_{\beta\in(0,1)} C^\beta(\overline{\Omega})$ は非負値の既知関数とする. 問題 (4) において, $D(u) = \frac{1}{m}(u+1)^{m-1}$ $(m\ge 1)$, $S(u)=u$, $f(u)=u$ のときには, Winkler (2011), Fuest (2020, 2021), Black–Fuest–Lankeit (2021) により爆発解の存在が示された. また, $D(u)=1$, $S(u)=u$, $f(u)=u^\ell$ $(\ell>0)$ のときは, Yi–Mu–Xu–Dai (2021) により爆発解の存在が示された. しかし, m,ℓ が一般の場合や, $S(u)=u(u+1)^{\alpha-1}$ $(\alpha>0)$ となる場合の解の爆発は示されていない. 第4章では, 第I部でも用いたモーメント型関数と, 問題 (4) の構造を利用して得られる解の単調性を用いることにより, 次の結果を示す.

定理 4.1.2. $n\in\mathbb{N}$ とする. D,S,f は, $C_D,C_S,L>0$, $\delta\in(0,1]$ を定数として,

$$
D(\xi)\le C_D(\xi+\delta)^{m-1},\quad S(\xi)\ge C_S\xi(\xi+\delta)^{\alpha-1},\quad f(\xi)\ge L\xi^\ell\quad(\xi\ge 0)
$$

を満たすとする. さらに, $m\in\mathbb{R}$, $\alpha>0$, $\kappa>1$, $\ell>0$ は

$$
(5)\qquad \alpha+\ell>\max\left\{m+\frac{2}{n}\kappa,\kappa\right\}\quad(m\ge 0),\qquad \alpha+\ell>\max\left\{\frac{2}{n}\kappa,\kappa\right\}\quad(m<0)
$$

を満たすとする. このとき, 任意の $M_0>0$ に対して, 以下を満たす $\varepsilon_0\in(0,M_0)$ と $r_\star\in(0,R)$ が存在する: 非負で球対称かつ動径方向に単調減少な初期値 $u_0\in\bigcup_{\beta\in(0,1)} C^\beta(\overline{\Omega})$ が, $\int_\Omega u_0(x)\,dx = M_0$, $\int_{B_{r_\star}(0)} u_0(x)\,dx \ge M_0-\varepsilon_0$ を満たすとき, (4) の古典解が一意的に存在し, (2) の意味で有限時刻で爆発する.

定理 4.1.2 において $m=\alpha=1$ とした条件 (5) は, Yi–Mu–Xu–Dai (2021) における解の爆発に関する条件の改良になっている. また, 第4章では, D,S,f が $D(\xi)\ge C_D(\xi+\delta)^{m-1}$, $S(\xi)\le C_S\xi(\xi+\delta)^{\alpha-1}$, $f(\xi)\le L\xi^\ell$ を満たす場合も考え, 解の有界性を導出する.

第5章では, 次の退化放物・楕円型 Jäger–Luckhaus 系を扱う:

$$
(6)\qquad \begin{cases} u_t = \Delta u^m - \chi\nabla\cdot(u^\alpha\nabla v) + \lambda u - \mu u^\kappa, & x\in\Omega,\ t>0,\\ 0 = \Delta v - \overline{M_\ell}(t) + u^\ell, & x\in\Omega,\ t>0,\\ \nabla u^m\cdot\nu = \nabla v\cdot\nu = 0, & x\in\partial\Omega,\ t>0,\\ u(x,0) = u_0(x), & x\in\Omega. \end{cases}
$$

ここで, $m,\alpha\ge 1$, $\chi,\lambda,\mu,\ell>0$, $\kappa>1$ は定数とし, $\overline{M_\ell}(t) := \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u^\ell(x,t)\,dx$ とする. また, 初期値 $u_0\in L^\infty(\Omega)$ は非負値の関数とする. 問題 (6) では, 拡散項 $\Delta u^m = m\nabla\cdot(u^{m-1}\nabla u)$ における u^{m-1} が, $m>1$ のとき $u=0$ で退化しているため, 解の正則性が保証されない. そのため, モーメント型関数に対して第4章で導かれる微分不等式の導出ができなくなる. そこで, その微分不等式を積分した形の不等式 (モーメント不等式) を満たす弱解として, 次のモーメント解を定義する.

定義 5.1.1. $T \in (0,\infty]$ とする. $\Omega \times (0,T)$ 上で定義された球対称な非負の関数の組 (u,v) で, 以下を満たすものを (6) の $[0,T)$ 上の**モーメント解**であるという:

- $u \in L^\infty_{\rm loc}([0,T);L^\infty(\Omega))$, $\quad v \in L^\infty_{\rm loc}([0,T);H^1(\Omega))$, $\quad u \in C^0_{\rm w-\star}([0,T);L^\infty(\Omega))$, $u^m \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ $(T<\infty)$; $u^m \in L^2_{\rm loc}([0,T);H^1(\Omega))$ $(T=\infty)$,
- $\varphi \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap W^{1,1}(0,T;L^2(\Omega))$ $(\operatorname{supp}\varphi(x,\cdot) \subset [0,T)$ a.a. $x \in \Omega)$ に対して,
$$\int_0^T \int_\Omega (\nabla u^m \cdot \nabla\varphi - \chi u^\alpha \nabla v \cdot \nabla \varphi - (\lambda u - \mu u^\kappa)\varphi - u\varphi_t)\,dxdt = \int_\Omega u_0(x)\varphi(x,0)\,dx,$$
$$\int_0^T \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \varphi\,dxdt + \int_0^T \left(\overline{M_\ell}(t) \int_\Omega \varphi\,dx\right)dt - \int_0^T \int_\Omega u^\ell \varphi\,dxdt = 0,$$
- 定数 $K>0$ が存在して, (3) のモーメント型関数は次のモーメント不等式を満たす:
$$\phi(t) - \phi(0) \ge K \int_0^t \phi^{\alpha+\ell}(\tau)\,d\tau \quad (t \in (0,T)).$$

第 5 章の主定理を述べる前に, 極大モーメント解の定義を述べる.

定義 5.1.2. $\mathcal{S} := \{(T,u,v) \mid T \in (0,\infty],\ (u,v)$ は (6) の $[0,T)$ 上のモーメント解$\}$ を順序 $(T_1,u_1,v_1) \preceq (T_2,u_2,v_2) :\Longleftrightarrow T_1 \le T_2,\ u_2|_{(0,T_1)} = u_1,\ v_2|_{(0,T_1)} = v_1$ を備えた集合とし, 極大元 $(T_{\max},u,v) \in \mathcal{S}$ が存在するとき, (u,v) を (6) の $[0,T_{\max})$ 上の**極大モーメント解**という.

定義 5.1.1 のモーメント解の枠組みで爆発解を構成し, 次の結果を得る.

定理 5.1.1. $n \in \mathbb{N}$ とする. $m, \alpha \ge 1$, $\kappa > 1$, $\ell > 0$ は
$$\alpha + \ell > \max\left\{m + \frac{2}{n}\kappa, \kappa\right\}$$
を満たすとする. このとき, 任意の $M_0 > 0$ に対して, 以下を満たす $\eta_0 \in (0,M_0)$ と $r_\star \in (0,R)$ が存在する: 非負で球対称かつ動径方向に単調減少な初期値 $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ が, $\int_\Omega u_0(x)\,dx = M_0$, $\int_{B_{r_\star}(0)} u_0(x)\,dx \ge M_0 - \eta_0$ を満たすとき, $T_{\max} \in (0,\infty)$ と $[0,T_{\max})$ 上の (6) の極大モーメント解が存在し, 次の意味で爆発する:
$$\limsup_{t \nearrow T_{\max}} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} = \infty.$$

証明については, まず (6) の近似問題を考え, 第 4 章の手法を利用することで, 近似解に対するモーメント不等式を導出する. その後, 近似解の収束から時間局所的にモーメント解を構成し, 解の延長の議論を用いて解が有限時刻で爆発することを示す. ただし, 本研究の弱解の枠組みでは古典解の枠組みとは違い, 解の一意性が保証されていないため, そのまま解を延長することができない. そこで, 定義 5.1.2 の極大モーメント解を構成することで, 解の延長の議論を可能にする.

論文審査の結果の要旨

本論文では, ロジスティック項をもつ準線形走化性方程式系の解の有限時刻爆発が考察されている. 論文は5章からなり, 序論 (第1章) に続く, 次の2部で構成されている.

第I部 (第2章, 第3章)　準線形放物・楕円型 Keller–Segel 系
第II部 (第4章, 第5章)　準線形放物・楕円型 Jäger–Luckhaus 系

第I部では走化性項の影響が小さいときの解の有限時刻爆発が主な研究テーマである. 以下では, $\Omega := B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ は原点を中心とする半径 $R > 0$ の開球とする. 第2章, 第3章では, 準線形放物・楕円型 Keller–Segel 系

$$(1)\quad \begin{cases} u_t = \Delta(u+1)^m - \chi\nabla\cdot(u(u+1)^{\alpha-1}\nabla v) + \lambda(|x|)u - \mu(|x|)u^\kappa, & x\in\Omega,\ t>0,\\ 0 = \Delta v - v + u, & x\in\Omega,\ t>0 \end{cases}$$

の解の有限時刻爆発が考察されている. ここで, $m,\chi,\alpha > 0$, $\kappa \geq 1$ は定数で, λ,μ は実数値の連続関数とし, $0 \leq \mu(r) \leq \mu_1 r^q$ $(r \in [0,R])$ を満たすとする. また, $\mu_1 > 0$, $q \geq 0$ は定数である. 問題 (1) において, $m = \alpha = 1$ かつ λ, μ が定数関数のとき, ロジスティック項 $\lambda u - \mu u^\kappa$ の影響により解の増大は抑制されるため, 解の爆発は起こりにくくなると考えられる. 実際, Tello–Winkler (2007) により, $m = \alpha = 1$ かつ $\kappa \geq 2$ のときに解は有界になることが示されていた. これに対して, Winkler (2018) は, $n \geq 3$ かつ $m = \alpha = 1$ のときに, $\kappa > 1$ が小さければ, ある時刻で爆発する解が存在することを示した. 本研究では, 解の爆発を促す走化性項 $-\chi\nabla\cdot(u(u+1)^{\alpha-1}\nabla v)$ の影響が小さいときに, 解が爆発するかどうかについて考察されている.
第2章では, $m = 1$, $\alpha \in (0,1)$ で, λ,μ が定数関数の場合の問題 (1) に対して, 先行研究で用いられていたモーメント型関数と, 解のプロファイルの導出により解の有限時刻爆発が示されている. 特に, 解のプロファイルを用いて走化性項のもつ非線形構造から線形構造を作り出す方法が考案されている.
第3章では, 解のプロファイルを精密化し, 第2章で得られた結果の改良及び $m > 1$ や $\alpha > 1$ の場合への拡張を行なっている. さらに, 関連する研究として, 非線形の生産項をもつ準線形放物・放物型 Keller–Segel 系の解の有界性についても考察している.

第II部では, ロジスティック項をもつ準線形放物・楕円型 Jäger–Luckhaus 系の解の有限時刻爆発が考察されている. まず第4章では, 非退化型の方程式系

$$(2)\quad \begin{cases} u_t = \nabla\cdot(D(u)\nabla u) - \nabla\cdot(S(u)\nabla v) + \lambda u - \mu u^\kappa, & x\in\Omega,\ t>0,\\ 0 = \Delta v - \overline{M_f}(t) + f(u), & x\in\Omega,\ t>0 \end{cases}$$

について考察されている. ここで, D は正値関数, S, f は非負値の非減少関数とする. また, $\overline{M_f}(t) := \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(u(x,t))\,dx$ とする. 問題 (2) において, $D(u) = \frac{1}{m}(u+1)^{m-1}$ $(m \geq 1)$, $S(u) = u$, $f(u) = u$ のときには, Winkler (2011), Fuest (2020, 2021), Black–Fuest–Lankeit (2021) により爆発解の存在が示されていた. また, $D(u) = 1$, $S(u) = u$, $f(u) = u^\ell$ $(\ell > 0)$ のときは, Yi–Mu–Xu–Dai (2021) により爆発解の存在が示されていた. 本章では, D,S,f が $D(\xi) \leq C_D(\xi+\delta)^{m-1}$, $S(\xi) \geq C_S\xi(\xi+\delta)^{\alpha-1}$, $f(\xi) \geq L\xi^\ell$

$(C_D, C_S, L > 0)$ を満たす問題 (2) に対して, 方程式の構造を利用して得られる解の単調性を導出することで解の有限時刻爆発が示されている. さらに, 本結果において, $m = \alpha = 1$ とした場合は Yi–Mu–Xu–Dai (2021) の結果の改良になっている. 第 5 章では, 退化放物・楕円型 Jäger–Luckhaus 系

$$
\begin{cases} u_t = \Delta u^m - \chi \nabla \cdot (u^\alpha \nabla v) + \lambda u - \mu u^\kappa, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ 0 = \Delta v - \overline{M_\ell}(t) + u^\ell, & x \in \Omega,\ t > 0 \end{cases} \tag{3}
$$

の解の有限時刻爆発が考察されている. ここで, $m, \alpha \geq 1$, $\chi, \lambda, \mu, \ell > 0$, $\kappa > 1$ は定数とし, $\overline{M_\ell}(t) := \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u^\ell(x,t)\,dx$ とする. 問題 (3) では, 拡散項 $\Delta u^m = m\nabla \cdot (u^{m-1} \nabla u)$ における u^{m-1} が, $m > 1$ のとき $u = 0$ で退化しているため, 解の正則性が保証されない. そのため, モーメント型関数に対して第 4 章で導かれる微分不等式の導出ができなくなる. ここでは, その微分不等式を積分した形の不等式 (モーメント不等式) を満たす弱解として, モーメント解という新しい解の枠組が考案されている. さらに, それに付随して, モーメント解の極大存在時刻及び極大モーメント解の導入も行われている. 解の有限時刻爆発の証明では, 解の延長の議論を用いることが多いが, 本研究における弱解の枠組では古典解の枠組とは異なり, 解の一意性が保証されていないため, 通常の議論を行うことができない. そこで, 本研究では $\star$ 弱位相を用いた弱解の延長と $\star$ 弱連続性を用いたモーメント不等式の延長を行うことでモーメント解の延長を行なっている.

結語　以上述べた学位申請者による多数の優れた研究成果は, ロジスティック項をもつ準線形走化性方程式系の解の有限時刻爆発の研究に対する大きな貢献であるといえる. よって本論文は博士 (理学) の学位論文として十分な価値を有すると認める.