

氏名（本籍） 小林穂乃香（群馬県）
 学位の種類 博士（理学）
 学位記番号 甲第1275号
 学位授与の日付 2022年9月30日
 学位授与の要件 学位規則第4条第1項該当
 学位論文題目 **Pseudo-Riemannian ruled surfaces with null curves of constant mean and scalar curvature**
 （平均曲率及びスカラー曲率一定の零的曲線に沿う擬リーマン線織面）

論文審査委員 （主査）教授 真田 克典
 教授 横田 智巳 教授 功刀 直子
 教授 佐古 彰史 教授 田中真紀子
 准教授（筑波大学） 山田 光

論文内容の要旨

本論文では、擬球面 S^m_ν または擬双曲空間 \mathbb{H}^m_ν の擬リーマン部分多様体 M^n_ν で、次の条件を満たすものに関する研究を行う：

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{スカラー曲率と平均曲率が一定,} \\ \text{平均曲率 } H \neq 0, \\ \text{形作用素が対角化不可能.} \end{array} \right.$$

ここで、 H は M^n_ν の S^m_ν （または \mathbb{H}^m_ν ）における平均曲率である。

D.S. Kim-Y.H.Kim (2003) は、 S^3_1 または \mathbb{H}^3_1 の平坦でない向きづけ可能なローレンツ超曲面 M^2_1 が条件 (1) を満たすことと、 M^2_1 が B-scroll または complex circle どちらかの開部分であることが同値であることを証明した。 $\gamma(s)$ を S^3_1 内の位数3の null 曲線とする。 γ に沿う Cartan frame field とは、 γ に沿う pseudo-orthonormal な S^3_1 の接フレーム場 (A, B, C) で、次を満たすものである：

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{\gamma}(s) = A(s), \\ \dot{A}(s) = k_1(s)C(s), \\ \dot{B}(s) = k_2(s)C(s) + \varepsilon\gamma(s), \\ \dot{C}(s) = k_2(s)A(s) + k_1(s)B(s). \end{cases}$$

ここで、 k_1 と k_2 は正值関数であり、 ε は S_1^3 の曲率である。 M を、 S_1^3 へのはめ込み $x(s, t) = \gamma(s) + tB(s)$ の像で定義される非退化ローレンツ曲面とする。 k_2 が定数のとき、 M を γ に沿う B-scroll という。 \mathbb{H}_1^3 内の null 曲線についても同様に Cartan frame field と B-scroll が定義される。

また、 N を M_s^n の S_ν^{n+1} (または \mathbb{H}_ν^{n+1}) における単位法ベクトル場、 A_N を M_s^n の N 方向における形作用素とする。 $\nu = 1$ のとき、 形作用素 A_N は次のいずれかの形をとる：

$$(I) \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}, \quad (II) \begin{pmatrix} a_0 & 0 & & & \\ 1 & a_0 & & & \\ & & a_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{n-2} \end{pmatrix},$$

$$(III) \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & a_0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & a_0 & & & \\ & & & a_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & a_{n-3} \end{pmatrix}, \quad (IV) \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & & & & \\ -b_0 & a_0 & & & & \\ & & a_1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & & a_{n-2} \end{pmatrix}$$

ここで、 a_i ($i = 0, 1, \dots, n-2$) は定数であり、 $b_0 \neq 0$ である。 (IV) は複素固有値を持ち、 (I), (II) 及び (III) は実固有値を持つ。 B-scroll は (II) 型の形作用素をもち、 その最小多項式 $P(x)$ は $(x - k_2)^2$ である。 また、 ラプラス作用素 Δ について、 ある定数 λ に対し $\Delta H = \lambda H$ が成り立つ。

B.Bektaş, E.Ö.Canfes and U.Dursun (2017) は、 S_1^3 内の B-scroll の擬球面的ガウス写像の type number を決定した。 本研究では、 \mathbb{H}_1^3 内の B-scroll と complex circle の擬双曲的ガウス写像の type number を決定した。 これらの研究により、 S_1^3 または \mathbb{H}_1^3 内で (1) を満たす向きづけ可能な平坦でないローレンツ超曲面全ての擬球面的 (または擬双曲的) ガウス写像の type number が完全に分類された。

本論文は以下の5章から構成される。 第1章では、 B-scroll に関する先行研究や null 曲線に沿う Frenet 型フレーム場の先行研究を紹介するとともに、 本論文の概略について述べた。

第2章では、 擬リーマン部分多様体の基本的な性質や B-scroll 及び Cartan frame field の定義を説明した。

第3章では、 \mathbb{H}_1^3 内の B-scroll 及び complex circle の擬双曲的ガウス写像の type number を決定した。 本章の主結果は以下の通りである。

主結果 1 (Theorem 3.3) M を \mathbb{H}_1^3 の向きづけられたローレンツ超曲面で, (1) を満たすものとする. このとき, 次の主張が成り立つ.

- (i) M が半径 -1 の complex circle の開部分であることと, M の擬双曲的ガウス写像が 1-type であることは同値である.
- (ii) M が半径 κ ($\text{Re}(\kappa) = -1, \kappa \neq -1$) の complex circle のとき, M の擬双曲的ガウス写像は infinite type である.
- (iii) M が平坦でない B-scroll の開部分であることと, M の擬双曲的ガウス写像が null 2-type であることは同値である.
- (iv) M が平坦な B-scroll のとき, M の擬双曲的ガウス写像は infinite type である.

また, L. J. Alías, A. Ferrández and P. Lucas (1995) によって構成された, B-scroll の次元一般化である generalized umbilical hypersurface で形作用素が (II) 型であるものについても, 擬双曲的ガウス写像の type number を求めた.

第 4 章では, まず指数 2 の擬リーマン多様体における null 曲線に沿う Frenet 型フレーム場について, 先行研究よりも直接的な証明を与えた. 指数 2 のケースでは, $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}$ が null ベクトル場である場合とそうでない場合の, 2 通りの Frenet 型フレーム場が考えられる. $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}$ が null のとき, そのようなフレーム場は bi-null Cartan frame field と呼ばれ, M. Sakaki, A. Uçum and K. İlarıslan が研究している. 本論文では指数 1 のケースと同様に, $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}$ が null でない場合を扱う. 次に, そのフレーム場を用いて指数 2 の generalized umbilical hypersurface について考察した. すなわち, S_2^{n+1} または \mathbb{H}_2^{n+1} 内の null 曲線 γ と, γ に沿う Cartan frame field から構成される擬リーマン超曲面で, (1) と $\Delta H = \lambda H$ を満たす具体例を構成した. 指数 1 のケースでは形作用素 A_N の型は 4 つのみであるが, 指数 2 のケースでは A_N はより様々な型が存在する. ここでは, 本論文に必要なケースのみを紹介する:

$$(I) \quad G = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & & \\ -1 & 0 & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & & & & \\ 1 & \lambda & & & & \\ & & \lambda & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \lambda & \end{pmatrix},$$

$$(II) \quad G = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & & \\ -1 & 0 & & & & \\ & & 0 & -1 & & \\ & & -1 & 0 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & & & & \\ 1 & \lambda & & & & \\ & & \lambda & 0 & & \\ & & 1 & \lambda & & \\ & & & & \lambda & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

ここで λ は実数である. 本章の主結果として, (I) 型の形作用素を持つ generalized umbilical hypersurface の具体例を 6 つ構成した (Example 4.3.1 – Example 4.3.6).

第 5 章では, B-scroll の余次元一般化について考察した. D. S. Kim, Y. H. Kim and D. W. Yoon (2003) は, \mathbb{E}_1^3 における 2 次元曲面である B-scroll を \mathbb{E}_1^m 内に拡張した. そのような曲面は generalized B-scroll と呼ばれる. generalized B-scroll の形作用素の最小多項式は, ある定数 a に対し $P(x) = (x - a^2)^2$ である. 本章では, \mathbb{S}_2^5 または \mathbb{H}_2^5 内の null 曲線 γ で $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}$ が non-null であるものに対し, γ とそれに沿う Cartan frame から構成される非退化な 2 次元擬リーマン線織面で, (1) と $\Delta H = \lambda H$ を満たし, 形作用素の最小多項式が $P(x) = (x - a^2)^2$ であるものを構成した.

主結果 2 (Theorem 5.2) $A := \dot{\gamma}$ とする. (A, B, C, Z_1, Z_2) を γ に沿う \mathbb{S}_2^5 または \mathbb{H}_2^5 のフレーム場とする. ここで, B は null ベクトル場で, $\langle A, B \rangle = -1$ かつ $\langle B, C \rangle = 0$ を満たすものとする. $I \times \mathbb{R}$ から \mathbb{S}_2^5 または \mathbb{H}_2^5 へのはめ込み $x(s, t) = \gamma(s) + tB(s)$ に対し, M を x の像とする. このとき, M は γ に沿う非退化ローレンツ線織面であり, 次を満たす.

- Z_1 が non-null がのとき, $\varepsilon_c = \langle C, C \rangle$ かつ $\varepsilon_1 = \langle Z_1, Z_1 \rangle$ と定義する. ある定数 k_2 と k_3 に対し, M の平均曲率は $\varepsilon_c k_2^2 + \varepsilon_1 k_3^2$ であり, 正規化された平均曲率ベクトル方向の形作用素の最小多項式は $P(\lambda) = (\lambda - (\varepsilon_c k_2^2 + \varepsilon_1 k_3^2))^2$ である.
- Z_1 が null のとき, ある定数 k_2 に対し, M の平均曲率は k_2^2 であり, 正規化された平均曲率ベクトル方向の形作用素の最小多項式は $P(\lambda) = (\lambda - k_2^2)^2$ である.

また, γ と γ に沿う Frenet 型フレーム場から構成される非退化ローレンツ線織面は, この 2 つのいずれかである.

論文審査の結果の要旨

本学位論文は, 擬球面または擬双曲空間内の擬リーマン部分多様体で, 形作用素が対角化不可能かつ平均曲率及びスカラー曲率が一定であるものに関する研究である.

2003 年に D. S. Kim–Y. H. Kim は, 3 次元ド・ジッター空間またはアンチ・ド・ジッター空間の向きづけられた超曲面でそのような条件を満たすものは B-scroll または complex circle どちらかの開部分であることを示した. また, 2017 年に B. Bektaş–E.Ö. Canfes–U. Dursun は, 3 次元ド・ジッター空間における B-scroll の擬球面的ガウス写像の type number を決定した. これらの先行研究を端緒として, 申請者は, 本学位論文において, 3 次元アンチ・ド・ジッター空間における B-scroll 及び complex circle の擬双曲的ガウス写像の type number を決定し, さらに, 指数 2 の擬球面または擬双曲空間において, B-scroll の一般化となる線織面を構成した.

finite type である部分多様体の研究は 1970 年代に始まった。B. Y. Chen は、ユークリッド空間において平均曲率ベクトルがラプラシアン固有ベクトルであるようなリーマン部分多様体の type number を完全に分類した。また、D. S. Kim–Y. H. Kim は、ミンコフスキー時空における null 2-type のローレンツ曲面で平均曲率が一定であるものを完全に分類した。このように、部分多様体の平均曲率と type number は密接な関係にある。

1980 年代に B. Y. Chen–P. Piccinni は、部分多様体における type number の概念を、部分多様体上の可微分関数に拡張した。特に、部分多様体のガウス写像の type number について研究を行い、いくつかの基本的かつ重要な結果を得た。

2007 年に H. S. Lue–B. Y. Chen は、球面にはめ込まれた部分多様体の球面的ガウス写像について研究し、その特徴付けと分類を行った。ガウス写像は部分多様体の各点における接空間によって定義されるが、球面的ガウス写像は、部分多様体の各点における位置ベクトルと接空間によって定義される。双曲的ガウス写像や、擬球面的または擬双曲的ガウス写像も同様に定義される。

申請者の第一の研究は、3次元アンチ・ド・ジッター空間における B-scroll 及び complex circle の擬双曲的ガウス写像に関する研究である。第二の研究は、B-scroll の一般化であるような線織面とそれを構成する null 曲線に沿う Frenet 型フレーム場に関する研究である。

本論文は 5 章から構成されている。第 1 章では、type number に関する研究背景と B-scroll 及びそれを構成する Cartan frame に関する先行研究、そして申請者の研究概要を紹介している。また、第 2 章では、後章への準備として、擬リーマン部分多様体の基本的な性質、B-scroll 及び Cartan frame field の定義を説明している。

第 3 章で、申請者は、3次元アンチ・ド・ジッター空間における B-scroll 及び complex circle の擬双曲的ガウス写像の type number を決定している。この結果と B. Bektaş–E.Ö. Canfes–U. Dursun による先行結果を合わせると、3次元ド・ジッター空間またはアンチ・ド・ジッター空間の向きづけられた超曲面で、形作用素が対角化不可能かつ平均曲率及びスカラー曲率が一定であるもの全てが、擬双曲的（または擬球面的）ガウス写像により分類されることが分かる。また、一般次元アンチ・ド・ジッター空間において、B-scroll の一般次元版である generalized umbilical hypersurface で、形作用素が B-scroll と同じ形になるような超曲面の擬双曲的ガウス写像の type number も決定している。これらは本論文の第一の主結果である。

第 4 章において、申請者は、指数 2 の擬球面または擬双曲空間において、generalized umbilical hypersurface と同様の性質を持つ具体例を 6 つ構成している。よって本章で構成された超曲面は、generalized umbilical hypersurface を指数 2 の擬球面または擬双曲空間へ拡張したものと言える。また、申請者は、これらの超曲面を構成する Cartan frame に、先行研究よりも直接的で簡潔な別証明を与えており、大変興味深

いものである.

第 5 章では, B-scroll の余次元一般化である generalized B-scroll について論じている. 先行研究において, generalized B-scroll はミンコフスキー空間内にのみ定義されることが知られており, よって, 擬球面や擬双曲空間における generalized B-scroll に関する研究は未開拓であり, 発展させる価値がある. 本章では, generalized B-scroll の概念を指数 2 の擬球面及び擬双曲空間に拡張し, その平均曲率や形作用素の最小多項式を求めており, さらに, 5 次元指数 2 のケースにのみ現れる特徴を持つ具体例を発見している. これらは本論文のもう一つの主結果である.

以上, 本論文で得られた一連の結果は, 部分多様体の type number 及び null 曲線に沿う線織面に関する研究に大きく貢献するものとして評価できる. したがって, 本論文は博士 (理学) の学位論文として十分に価値あるものと認められる.