論　文

生徒の深い学びを目指した現物実験を行う定積分の教材の開発と実践による評価

Definite integral teaching materials for conducting experiments with actual products aimed at deep learning of students

佐古 彰史 [a)]　小此木 千鶴 [b)]　郷原 惇平 [c)]
Akifumi Sako　Chizuru Okonogi　Jumpei Gohara

要旨：高校数学では、定積分の指導について、「定積分と面積の概念」が結びつきにくいとの指摘がされている。本研究は、区分求積法を題材とし、現物実験を用いて発見的に原始関数との関連を考えさせる深い学びを実現する教材を開発した。現物実験と協同学習という授業形態で、生徒が主体的に学習を行うことによって、「深い学びに対する意識が高まり、主体的に取り組む姿勢が養われる」効果についても検証した。質問紙調査の結果、定積分分野で深い学びが達成され、深い学びの意識や、主体的な姿勢が養われる教材であることが示された。

キーワード：教材開発、深い学び、現物実験、定積分

1. はじめに

文部科学省（2018a）では、生徒の学習意欲面や数学的に表現すること等、平成 21 年改訂学習指導要領数学編・理数編における課題に対応するため、改善が図られた。そこで、主体的・対話的で深い学びの実現に向けた授業改善を推奨しており、深い学びの鍵として、「事象の特徴や本質を捉える視点」、「思考の進め方や方向性」に関連する数学的な見方・考え方を働かせることが重要であるとしている。また、溝上（2018）は深い学びを「知識を他の知識や考え、経験等との関係のなかに位置づけ構造化すること」と述べている。したがって、深い学びとなるためには、これまで学んできた算数・数学の知識と関連付け、特徴と本質を捉える視点を養うような授業改善の取組みが必要である。

主体的・対話的な学びに関して Johnson, Johnson, & Holubec（2010）は、協同学習は生徒達が一緒に取り組むことによって自分の学習と互いの学習を最大限に高めようとするものであると述べている。また、池田ほか（2018）は現物実験を協同で行わせる効果について検証し、生徒の数学への興味・関心が向上したとしている。ここで採用されている現物実験の定義は、「数学的学習具に具体的操作を加える場面がある。この場面の有無によって 現物実験と思考実験を区別する。」（澁谷 2017a）。本研究でも原物実験の定義としてこの定義を採用する。以上より、本研究では現物実験を伴う協同学習に着目し、深い学びについての効果を検討することにした。

次に高校数学の定積分分野に関する問題点に目を向ける。昭和 45 年度以降の学習指導要領のもとでは、数学 II で無限級数を扱わなくなったため、定積分を原始関数の端点の値の差として定義する教科書が多くなった。この現状の指導について、光永（2007）は、私立高校 2 年生と 3 年生（数学 II 既習）を対象に、

a) 東京理科大学理学部第二部　b) 東京農業大学第二高等学校　c) 麻布学園

区分求積法による面積概念の理解を習得することを目標に、授業実践を行っている。その際に、「数学 II を既習とした上でのものであったが、実践前、『なぜ定積分で面積計算ができるのか。』の問いに完璧に答えられる生徒はいなかった。」と述べている。また、渡部・清水（2014）は高校 2 年生（数学 II「定積分」既習）、高校 3 年生（数学 III「区分求積法」既習）を対象に、Excel 教材を通して、なぜ定積分で面積が求められるのかを、視覚的直感的に理解することを目標に授業実践し、分析を行っている。この調査結果では、数学 II 積分法を既習にも関わらず、定積分と面積の関係の理解が低いことを指摘している。

区分求積法については、計算の煩雑さはあるが小学校算数における図形の面積計算を基礎としているため、直観的に理解しやすいという利点がある。区分求積法とは、ある囲まれた領域の面積を求める際に、長方形等によって近似する方法（以後、長方形近似と書く）である。実際、区分求積法は、古代エジプトや古代ギリシャ時代などの測量術による歴史的観点からも我々人類にとって、馴染み深い考え方であることがわかる。さらに、現代においては、小学校の算数の円の面積の学習において、区分求積法による考えが扱われている（文部科学省 2018b)。それに対して、現行の定積分の導入法である 17 世紀になって発見された微分の逆演算と面積の関係つまり微積分学の基本定理では、抽象度や難解さで大きな差がある。より原始的（歴史的に古い）概念であるほど日常と絡めやすく理解しやすいものが多い。したがって、原始的アイデアである区分求積法で面積を導くことを、本研究では「定積分の本質」と捉えることとする。

定積分の本質である区分求積法について未習であることから、現在の指導要領のもとでは、定積分と面積の関係を理解しづらいのではないかと考える。したがって区分求積法を数学 II の段階で取り入れる事が望ましいと考え、本研究で試みた。

谷川・佐藤（2017）は区分求積法の長方形近似として、長方形型の付箋紙を切り貼りしていく現物実験を数学Ⅱ既習かつ数学Ⅲ未習の段階の生徒を対象とした教材に組み込み、「実物を用いることで区分求積法に抵抗なく取り組め、理解が深められていたようだ。」と述べている。このように、区分求積の長方形近似のアイデアは現物実験を用いると平易に理解できる可能性がある。これは飯島（1989）の「問題解決のための新しいアイデアを思いつくためには、具体的操作や現物実験等において具体的に考えることが不可欠であり、その後でやや抽象的な思考実験ができるようになる。」に当てはめると、定積分を理解するためには、長方形近似を用いた現物実験（谷川・佐藤の場合では付箋を貼って面積を測ること）によって具体的に考えることが不可欠であることがわかる。現物実験を用いた定積分分野の研究において、谷川・佐藤は授業後に 4 件法のアンケート調査を行い、その平均値を求め、また、授業後の感想を用いることによって、分析を行っている。

以上を踏まえ、本研究では現物実験を用いて、定積分の特徴と本質を捉える視点が養われる教材を目指すことにした。また、この教材の体験から、定積分分野に限らず、「深い学びに対する意識、主体的に取り組む姿勢」の変化を調査する。また、以上の背景から、本研究における定積分分野での「深い学び」の鍵である「特徴をとらえる視点」、「本質（区分求積法）を捉える視点」、「思考の進め方」、「思考の方向性」を以下Ⅰ～Ⅳで定義し、それらを養う現物実験を含む教材の開発を本研究の目的とする。尚、「深い学びの鍵」は、文部科学省（2018a）を参考にした。

【定積分分野における深い学びの 4 つの鍵】

Ⅰ **「特徴を捉える視点」**:曲線で囲まれる部分の面積を、長方形の集まりによって近似することができる。
Ⅱ 「本質（区分求積法）を捉える視点」: 長方形の幅を狭めることで求める面積に近づくことを推定する。
Ⅲ 「思考の進め方」:「長方形の面積」から「定積分の区分求積法による定義」にたどり着くプロセスを、現物実験で行うことによって、「区分求積法」を理解する。**Ⅳ 「思考の方向性」**:「区分求積法としての定積分」から「原始関数の値の差としての定積分」を理解する。

2. 教材の概要

2.1. 教材の目的

教材の目的は、数学 II（積分法）既習の生徒を対象に、80 分の授業で次の（i）～（v）ができるようになることである。

（i）曲線で囲まれる部分の面積を、長方形の集まりによって近似する。（ii）分割数を増やす（長方形の幅を狭める）ことで求める面積の値に近づくことを現物実験から推定する。（iii）区分求積のプロセスを現物実験で行うことで定積分の本質である区分求積法を説明する。（iv）面積を表す関数が微分の逆である原始関数であることを指摘する。（v）定積分分野に限らず、深い学びに対する意識が高まり、主体的に取り組む。

（i）～（iv）は定積分分野における深い学びの定義 I ～ IV に対応するように設定した。（v）を加えた理由としては、澁谷（2017b）の結果に依るものである。つまり、数学の授業に「数学的学習具」を取り入れることによって、学習内容の理解を深め、持続可能性の高い定着を生み、主体的・能動的に取り組む姿勢も身に付いたという結果を受け、深い学びはあらゆる教材で目指すべきであると考えた。また、効果検証のため授業前後で質問紙調査を行った。詳細は後述する。

図 1　現物実験①

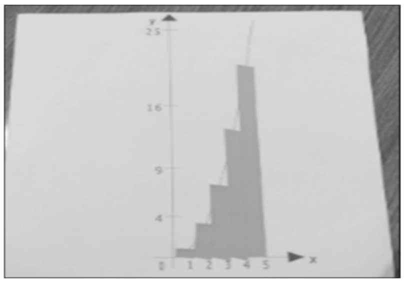

図 2　現物実験②

2.2. 教材の内容

開発した教材では、生徒が定積分と面積の概念について理解できるよう、既習の算数・数学の知識を生かせる問いの系列を用意し、協同学習を通した探求学習を行う。その内容として、谷川・佐藤（2017）の方法を参考に、区分求積法における長方形に見立てた付箋テープを円や 2 次関数のグラフに貼り、付箋の幅と長さから図形の面積の近似値を求めさせる（**図 1**、**図 2**）。この結果を基に、面積がどのような関数となるか考察させる。（本実践では上極限、下極限については扱わず、長方形と曲線の合わせ方は予め指定する。）関数 $f(x)$ とその関数のグラフの面積の対応関係について各班で議論させることにより、面積と微分の逆演算の関係について気付かせることがねらいである。また、ワークシートに、生徒の判断で適切に付箋を切り貼りし、並べ替えて面積を測定する操作を行うことで、現物実験の定義を満たしていると言える。さらに、なぜ面積を調べることで原始関数が現れたのか、現物実験で考察・証明させることで現物実験のプロセスを満たしている（**図 1**）。以下に教材の概要を記す。

2.3. 授業展開

各課題と現物実験は全てグループワーク（各班 5 ～ 6 人）で行い、タイミングを見て発表、答え合わせ、確認の講義を行う。

現物実験①　「円の区分求積」（25 分）

目標：区分求積において、区分（長方形の幅）が細かくなるほど、近似が良くなることに気付き、説明することができる。

まず、面積概念の基本が長方形であることをクラス全体で確認する。「長方形の面積の公式を基に、様々

な図形の面積を求めることができる」と仮説設定をする。次に、作業シートの円に長方形の付箋テープを貼り、円の面積の近似値を求めさせる。ただし、テープの幅は班によって 1cm、1.5cm、2.5cm のものを使う。黒板に各班の円の面積の近似値を記入し、テープ幅ごとに平均値を出す。分割数で近似精度が違うことが確認される。πr^2 に近付けるためには、どのような工夫をすれば良いのか議論させる。

現物実験②　「関数がつくる図形の区分求積」(25 分)

目標：$f(x)=x^2$ と、x 軸、$x=X$ で囲まれた図形の面積 $A(X)$ の近似値を求めさせ、よい近似として原始関数の存在を発見させる。$f(x)=x^n$ がつくる面積 $A(X)$ についても考察させ、面積関数と微分の逆演算の関係について気付く。

まず、座標平面上における、長方形（$f(x)=C$（定数）に対応）と三角形（$f(x)=x$ に対応）の面積についてクラス全体で確認する。次に班ごとに、$f(x)=x^2$ がつくる図形（$f(x)=x^2$ と、x 軸、$x=X$ で囲まれる部分）に 1cm 幅の付箋テープを貼り、面積の近似値を求める。この結果を基に、$f(x)=x^2$ についての面積 $A(X)$ がどのような関数となるか考察させる。ここまでの活動を踏まえ、$f(x)=x^n\,(n=0, 1, 2, 3, 4, \cdots, n)$ に対応する面積 $A(X)$ について考察させ、表にまとめる。最後に、この表を見て、$f(x)$ と $A(X)$ の対応関係について各班で議論させる。これにより、面積関数と微分の逆演算の関係について気付かせることがねらいである。その後、区分求積、定積分、面積関数について解説する（10 分)。

現物実験③　「微分と積分の逆関係について」(20 分)

目標：課題（1)、(2)、(3) に対する協同学習を行い、微分と積分の逆関係を発見する。

(1)「なぜ面積関数を調べると原始関数が現れるのか？」

現物実験②でつくった $f(x)=x^2$ がつくる面積 $A(X)$ を求めるために用いた長方形近似に対応する横幅 1cm の付箋テープを使い、各班で現物実験により考察させる。以下は解説である。

「$f(x)=x^2$ がつくる面積 $A(X)$」$=X^3/3$

≒「付箋の面積の総和」=「付箋を y 軸に沿って積み上げて、一直線に並べたときの長さの総和（つまり積分)」なぜなら、付箋の横幅は 1cm のため、付箋の面積＝付箋の縦の長さであるから。従って、付箋を 1cm づつ横にずらしていくと $y=x^3/3$ の付箋の概形が現れる。

(2)「なぜ面積関数（$y=x^3/3$）を微分すると、元の関数（$y=x^2$）が現れるのか？」

各班で（1）の付箋を使って、考察させる。$y=x^3/3$ の付箋グラフを考察すると、付箋の対角線が $y=x^3/3$ のおよその接線の傾きとなっていることがわかる。したがって、$y=x^3/3$ の接線の傾き $\fallingdotseq \dfrac{\text{付箋の縦}}{\text{付箋の横}}=$ 縦（付箋の横幅は 1cm である特殊性を用いた)。したがって、付箋の縦の長さがおよその接線の傾き（導関数）であるから、付箋を x 軸におろしたときに出来る（付箋の縦の長さで描く）グラフが微分のグラフを表すことがわかる。

(3) ここまでは、現物実験で付箋テープを動かしながら「微分と積分の逆関係」について考察した。しかし、微分と積分の逆関係を考えるとき、一般には上記の付箋をずらして貼る方法は成り立たない。この説明が成り立たない反例を考えさせる。

以上の課題は現行の定積分の導入における、面積と原始関数の対応を見なければいけない事への動機づけにもなる。

表１　因子抽出されなかった項目の M と SD

事前に設定した尺度	因子抽出されなかった項目	授業前		授業後	
		M	SD	M	SD
事象の特徴と本質	(a)自分と他人の解答の違いについて考えることは大切だと思う	4.300	.818	4.700	.537
思考の進め方	(b)数学の問題がわからないとき，既習の知識と技術を基に別のやり方を考えようとすることが大切だと思う	4.250	.864	4.700	.719
積分への理解	(c)区分求積法と定積分の関係について理解している	1.575	.839	3.388	1.196
思考の方向性	(d)数学では単に解法を覚えるよりも考え方を学ぶことの方が大切であると思う	4.613	.626	4.788	.441
主体性	(e)議論の中で他人の意見を聴き積極的に自分の考えを広げることは大切だ	4.663	.550	4.800	.461

表 2　因子抽出された項目の *M* と *SD*

因子	各因子に含まれる項目	授業前		授業後	
		M	*SD*	*M*	*SD*
F1	(f)日常生活の問題を数学的に解決しようとする方だ	2.563	1.221	2.738	1.260
	(g)日常生活の問題を数学的に考える方だ	2.625	1.184	2.813	1.213
	(h)日常生活において数学を用いて物事を考えようとする方だ	2.625	1.184	2.800	1.205
F2	(i)物事の共通点を見つけることは大切だと思う	4.413	.758	4.675	.522
	(j)物事の法則を考えることは大切だと思う	4.313	.789	4.638	.557
	(k)物事の本質を考えることは大切だと思う	4.613	.584	4.725	.477
	(l)自分と他人の解答の共通な部分について比較することは大切だと思う	4.163	.818	4.613	.626
F3	(m)数学の問題でわからなかったとき基礎に戻って考えることが大切だ	4.813	.424	4.888	.318
	(n)数学の問題を解くにあたってわからなかったとき復習することが大事だ	4.900	.341	4.888	.318
	(o)問題とこれまで習った知識を結び付けて考えることは大切だと思う	4.775	.477	4.850	.359
F4	(p)微分と積分の関係について説明できる	2.663	1.169	3.625	1.184
	(q)積分の計算を説明できる	2.125	1.129	3.388	1.307
	(r)図形の面積の求め方について説明できる	3.163	1.174	4.000	1.067
F5	(s)公式をただ使うだけではなく公式がなぜ成り立つのか理解したいと思う	4.213	.964	4.675	.652
	(t)公式を学ぶときは，それを導くまでの流れを説明することができることは大切だ	4.400	.821	4.738	.568
F6	(u)課題について他の人と積極的に話し合いをすることは大切だと思う	4.475	.842	4.700	.644
	(v)自分の考えを深めて積極的に議論に参加することは大切だと思う	4.363	.830	4.700	.644

表 3　各因子の *M* と *SD*

因子		授業前		授業後	
		M（下位尺度得点）	*SD*	*M*（下位尺度得点）	*SD*
F1	日常生活と数学	2.604	1.141	2.783	1.184
F2	事象の特徴と本質	4.375	.620	4.663	.434
F3	思考の進め方	4.829	.340	4.875	.262
F4	積分への理解	2.650	.968	3.671	1.067
F5	思考の方向性	4.306	.832	4.706	.538
F6	主体性	4.419	.789	4.700	.629

表 4　因子の符号検定

因子		post-pre	*N*	*Z*	漸近有意確率（両側）	
F1	日常生活と数学	負の差	19	-1.923	.054	
		正の差	34			
		同順位	27			
		合計	80			
F2	事象の特徴と本質	負の差	9	-4.763	.000	***
		正の差	45			
		同順位	26			
		合計	80			
F3	思考の進め方	負の差	10	-.981	.327	
		正の差	16			
		同順位	54			
		合計	80			
F4	積分への理解	負の差	7	-6.353	.000	***
		正の差	60			
		同順位	13			
		合計	80			
F5	思考の方向性	負の差	1	-5.500	.000	***
		正の差	35			
		同順位	44			
		合計	80			
F6	主体性	負の差	6	-4.269	.000	***
		正の差	34			
		同順位	40			
		合計	80			

* $p < .05$, ** $p < .01$, *** $p < .001$

3. 調査と結果

3.1. 調査対象

都内中高一貫私立高校 理系の 2 年生 80 名（内、数学 III 未履修者 39 名、数学 III 履修者 41 名）。ただし、数学 II は全員既習、数学 III「積分法」は全員未習である。

3.2. 調査方法

授業前後に全ての参加者に対して、5 件法（そう思う、どちらかと言えばそう思う、どちらとも言えない、どちらかと言えばそう思わない、そう思わない）の 22 項目からなる質問紙調査を行った。質問項目（詳細は**表 1**、**表 2**）は以下の 6 群に分かれている。**2.1.** 教材の目的の（i）～（iv）に対応する質問「積分への理解」: 計 4 問、（v）の深い学びと主体性に関する質問「日常生活と数学」: 計 3 問、「事象の特徴と本質を捉える視点」: 計 5 問、「思考の進め方」: 計 4 問、「思考の方向性」: 計 3 問、「数学への主体性」: 計 3 問。以上の質問内容の作成には、文部科学省（2018a）の「主体的・対話的で深い学び」を参考にした。尚、

実践は、授業者が 1 人、TA が大学院生 4 名の体制で実施した。

分析では、5 件法で求めた回答を 1 〜 5 点に点数化した。まず、授業前の調査において、質問紙の計 22 項目に対して最尤法・プロマックス回転による因子分析を行った（**付録 1**）。単純構造を示していない項目や因子負荷量が 0.40 に満たない項目を因子から削除し、因子分析を繰り返した。また、それぞれの因子に含まれる項目の平均点を下位尺度得点とし（**表 3**）、各尺度に対して授業前後で有意差があるかどうか比較した。

3.3. 分析結果

大部分の項目が **3.2.** で事前に設定した下位尺度通りに分かれた。さらに、各因子の内的整合性を検討するため授業前の調査において α 係数を算出した。結果を**付録 1** に示す。まず、各質問項目、因子について正規性の検定を行った結果、pre post 共に、正規分布となっていることは確認できなかった。したがって、ノンパラメトリック検定である符号検定を採用した。符号検定の結果を**表 4**、**付録 2**、**付録 3** に示す。教材の目的（i）〜（iv）に対応する「積分への理解」因子、教材の目的（v）の深い学びに対する意識と主体的に取り組む姿勢に対応する、「事象の特徴と本質」因子、「思考の方向性」因子、「主体性」因子に $p < .001$ で有意差が見られた（**表 4**）。

4. 考察

4.1. 研究目的と教材の目的について

まず、1 において、「定積分分野における深い学び」を、**I　特徴を捉える視点、II 本質（区分求積法）を捉える視点、III 思考の進め方、IV 思考の方向性**として定義した。本研究では、これらを達成すること、および、定積分分野に限らず「深い学びに対する意識、主体的に取り組む姿勢」の変化を調査することが目的である。以上の研究目的を踏まえ、2.1. では、（i）曲線で囲まれる部分の面積を、長方形の集まりによって近似する。（ii）分割数を増やす（長方形の幅を狭める）ことで求める面積の値に近づくことを現物実験から推定する。（iii）区分求積のプロセスを現物実験で行うことで定積分の本質である区分求積法を説明する。（iv）面積を表す関数が微分の逆である原始関数であることを指摘する。（v）定積分分野に限らず、深い学びに対する意識が高まり、主体的に取り組む。これら（i）〜（v）を教材の目的としていた。（i）〜（v）と対応付けて、3.3. の分析結果をもとに教材の効果について以下に考察する。

4.2. 研究目的「定積分分野での深い学び」の達成

まず実践中の生徒の様子を述べる。現物実験①から③の各活動を生徒全員が積極的に参加していた。班を指名し発表させた際、発表に対する反応が活発で自発的な議論・発言も多くあった。現物実験③に関しては通常の高校数学では行わない近似を用いた深い考察が必要な問題であるため、挑戦的な課題と位置付けており正解するグループがあるとは想定していなかった。しかし原始関数が得られる理由を答えることができたグループが複数あり、また正解に辿り着かないグループも難題に対し積極的に議論を行っていたことに驚かされた。これらの生徒の行動から、主体的・対話的で深い学びの実現が期待される。以下では統計的に考察する。

定積分分野における深い学びについて、教材の目的の（i）〜（iv）に対応する「積分への理解」因子に $p < .001$ で有意差が見られた（**表 4**）。さらに、各質問項目では、教材の目的（i）、（ii）、（iv）に対応する質問として**付録 3** の（p）、（q）、（r）の 3 項目、教材の目的（iii）に対応する質問として**付録 3** の（c）に有意差が見られた（$p < .001$）。以上より、研究目的である定積分分野での「深い学び」の達成が示唆される。現物実験を用いて実際に近似精度を確認し、分割数を増やせばより正確な面積が求められることを、実験操作、測定、記録、考察と議論を通して実感として理解できる。これが区分求積法の直感的理解につながったと考える。

4.3. 研究目的「深い学びに対する意識と主体的に取り組む姿勢」の変化

深い学びに対する意識と主体的に取り組む姿勢については、教材の目的（v）に対応する「事象の特徴と本質」因子、「思考の方向性」因子、「主体性」因子に有意差が見られた（**表4**）（$p < .001$）。したがって、研究目的の一つである「深い学びに対する意識が高まり、主体的に取り組む姿勢が養われる教材を開発すること」の達成が示唆された。これは、2.3.で協同学習のよさを感じさせるための工夫として役割分担を与えたことや、発表形態の工夫として、黒板に各班で求めた結果を書かせる等して他の班の活動結果も見えるよう明確化したことがよかったのではないかと考える。本論文では触れていない予備実践の際には有意差が出なかった項目に、本実践で有意差がでている。予備実践と本実践の主な差にグループワーク時の役割分担の明確化があった。そのためこのように考察した。

この結果から、本教材は現行の指導方法と比べて、深い学びや主体的に学ぶ姿勢の造成を促すのではないかと考える。

4.4. 協同学習に対する肯定的意識の変化

付録2の（a）、(l)、**付録3**の（u）、（v）から協同学習に対する肯定的な意見が有意に増加したということがわかる。このことから本教材は協同学習に対する肯定的意識の育成に有効であることが示唆される。

5. まとめと展望

本研究では、定積分分野における「深い学び」をI「特徴を捉える視点」、II「本質（区分求積法）を捉える視点」、III「思考の進め方」、IV「思考の方向性」の4つに分類して定義し、それらを達成する現物実験を含む教材の開発が目的であった。また、協同学習という授業形態で、生徒に主体的な議論を促すことによって、定積分分野に限らず、「深い学びに対する意識、主体的に取り組む姿勢」の変化についても効果を検証した。結果として、これらの研究目的を達成する教材であることが質問紙調査で確認された。また、本教材は協同学習に対する肯定的意識の育成にも有効であることが示唆された。

最後に、本研究の問題と今後の課題について述べる。本研究では中高一貫私立高校理系の2年生80名の被験者を得ることが出来たが、preの結果から潜在的に学習意欲と能力が高い傾向にあったと考える。したがって、今後は様々な学習意欲と学力の生徒で検証する必要があると考える。また、今回は現物実験そのものの評価は行わなかった。したがって、今後は同じ被験者による授業前後の検証だけではなく、現物実験を取り入れた場合と取り入れなかった場合でさらに2群に分けて検証する必要がある。

謝　　　辞

本調査にご協力いただきました山脇学園の高村隆博先生をはじめとする先生方、また、丁寧かつ貴重なご意見をくださった査読者の先生方、東京理科大学の村上秀俊准教授、東京理科大学2020年卒業生の佐々木洸輝氏に心より御礼申し上げます。

参考文献

飯島康男（1989）算数・数学の指導に取り入れる実験の意義。数学教育学論究、**49.50**：3-27

池田真結、郷原惇平、佐古彰史、渡辺雄貴（2018）高等学校数学科における現物実験を取り入れた教材の開発。日本教育工学会論文誌、**42**（Suppl.）：117-120

JOHNSON, D.W., JOHNSON, R.T., and HOLUBEC, E.J 著、石田裕久、梅原巳代子訳（2010）学習の輪 学び合いの協同教育入門。二瓶社、大阪

光永文彦（2007）積分法と求積法を接続する指導の一考「面積を測量する」区分求積法を用いて。第40回日本数学教育論文発表会論文集：421-426

溝上慎一（2018）溝上慎一の教育論。Smizok.net/education/index.html（accessed 2020.02.25）

文部科学省（2018a）高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編。教育出版、東京
文部科学省（2018b）小学校学習指導要領（平成29年告示）解説　算数編。教育出版、東京
澁谷久（2017a）数学教育に個人による現物実験を取り入れる実証的研究。稚内北星学園大学紀要第17号: 19-32
澁谷久（2017b）学習内容の定着を持続可能とする数学的学習具によるイメージ形成の実践的研究。稚内北星学園大学紀要第17号：7-18
谷川智幸・佐藤英樹（2017）高等学校数学から小学校算数へ向けての面積学習の応用。http://hdl.handle.net/2298/38966（accessed 2020.02.25）
渡部敬寛、清水克彦（2014）、数値積分を取り入れた積分法の教材開発 表計算ソフトを用いて。数理解析研究所講究録、(1909)：124-135

付録１　因子分析

項目		因子負荷量					
		F1	*F2*	*F3*	*F4*	*F5*	*F6*
F1	日常生活と数学因子 (α = .951)						
	(f)	**.960**	.024	-.044	.043	-.009	.011
	(g)	**.937**	-.009	-.036	-.028	.051	-.053
	(h)	**.884**	-.014	.102	.004	-.038	.049
F2	事象の特徴と本質因子 (α = .855)						
	(i)	.028	**1.011**	-.084	-.013	-.010	-.043
	(j)	-.017	**.849**	-.044	-.007	.191	.019
	(k)	-.066	**.613**	.334	.068	.036	-.021
	(l)	.031	**.506**	.001	.002	-.206	.317
F3	思考の進め方因子 (α = .742)						
	(m)	.089	-.040	**.905**	-.077	-.021	.029
	(n)	-.044	.064	**.730**	.057	-.204	.103
	(o)	-.036	.078	**.475**	.020	.238	-.100
F4	積分への理解因子 (α = .785)						
	(p)	.026	-.078	.028	**.997**	.028	-.056
	(q)	-.024	.081	.087	**.738**	-.066	-.123
	(r)	.022	.025	-.163	**.574**	.058	.238
F5	思考の方向性因子 (α = .844)						
	(s)	-.042	-.045	-.104	.041	**.933**	.152
	(t)	.084	.206	.047	-.056	**.740**	-.117
F6	主体性因子 (α = .878)						
	(u)	.009	.019	.017	.021	.088	**.841**
	(v)	-.011	.028	.090	-.035	.032	**.822**
	因子間相関	*F1*	*F2*	*F3*	*F4*	*F5*	*F6*
	F1	1.000	.253	.322	.184	.246	.254
	F2	.253	1.000	.137	.464	.509	.357
	F3	.322	.137	1.000	-.016	.080	.003
	F4	.184	.464	-.016	1.000	.303	.393
	F5	.246	.509	.080	.303	1.000	.303
	F6	.254	.357	.003	.393	.303	1.000

付録２　各質問項目の符号検定

（無色：因子抽出されなかった項目）

項目	因子	内容	post-pre	N	正確有意確率 (両側)	Z	漸近有意確率 (両側)	
F1 ：日常生活と数学	(f)	日常生活の問題を数学的に解決しようとする方だ.	負の差	14		-1.601	.109	
			正の差	25				
			同順位	41				
			合計	80				
	(g)	日常生活の問題を数学的に考える方だ.	負の差	12		-1.543	.123	
			正の差	22				
			同順位	46				
			合計	80				
	(h)	日常生活において数学を用いて物事を考えようとする方だ.	負の差	12		-1.973	.049	*
			正の差	25				
			同順位	43				
			合計	80				
F2 ：事象の特徴と本質	(i)	物事の共通点を見つけることは大切だと思う.	負の差	4		-3.334	.001	***
			正の差	22				
			同順位	54				
			合計	80				
	(j)	物事の法則を考えることは大切だと思う.	負の差	4		-3.834	.000	***
			正の差	26				
			同順位	50				
			合計	80				
	(k)	物事の本質を考えることは大切だと思う.	負の順位	6	.115			
			正の順位	14				
			同順位	60				
			合計	80				
	(l)	自分と他人の解答の共通な部分について比較することは大切だと思う.	負の順位	5		-4.685	.000	***
			正の順位	36				
			同順位	39				
			合計	80				
	(a)	自分と他人の解答の違いについて考えることは大切だと思う.	負の差	3		-4.311	.000	***
			正の差	28				
			同順位	49				
			合計	80				
F3 ：思考の進め方	(m)	数学の問題を解くにあたって，わからなかったとき，基礎に戻って考えようとすることが大切だ.	負の差	2	.109			
			正の差	8				
			同順位	70				
			合計	80				
	(n)	数学の問題を解くにあたって，わからなかったとき，復習することが大事だ.	負の差	5	1.000			
			正の差	4				
			同順位	71				
			合計	80				
	(o)	問題とこれまで習った知識を結び付けて考えることは大切だと思う.	負の差	7	.359			
			正の差	12				
			同順位	61				
			合計	80				
	(b)	数学の問題がわからないとき，既習の知識と技術を基に別のやり方を考えようとすることが大切だと思う.	負の差	2		-4.670	.000	***
			正の差	29				
			同順位	49				
			合計	80				

付録３　各質問項目の符号検定

（無色：因子抽出されなかった項目）

F4：積分への理解	(p)	微分と積分の関係について説明できる.	負の差	5		-5.686	.000	***
			正の差	47				
			同順位	28				
			合計	80				
	(q)	積分の計算を説明できる.	負の差	5		-6.402	.000	***
			正の差	56				
			同順位	19				
			合計	80				
	(r)	図形の面積の求め方について説明できる.	負の差	7		-4.950	.000	***
			正の差	43				
			同順位	30				
			合計	80				
	(c)	区分求積法と定積分の関係について理解している.	負の差	4		-7.155	.000	***
			正の差	64				
			同順位	12				
			合計	80				
F5：思考の方向性	(s)	公式をただ使うだけではなく，公式がなぜ成り立つのか理解したいと思う.	負の差	0		-5.199	.000	***
			正の差	29				
			同順位	51				
			合計	80				
	(t)	公式を学ぶときは，それを導くまでの流れを説明することができることは大切だ.	負の差	2		-4.347	.000	***
			正の差	26				
			同順位	52				
			合計	80				
	(d)	数学では，単に解法を覚えるよりも考え方を学ぶことの方が大切であると思う.	負の差	6	.035			*
			正の差	17				
			同順位	57				
			合計	80				
F6：主体性	(u)	課題について他の人と積極的に話し合いをすることは大切だと思う.	負の差	5	.007			**
			正の差	19				
			同順位	56				
			合計	80				
	(v)	自分の考えを深めて，積極的に議論に参加することは，大切だと思う.	負の差	6		-3.946	.000	***
			正の差	31				
			同順位	43				
			合計	80				
	(e)	議論の中で，他人の意見を聴き，積極的に自分の考えを広げることは大切だ.	負の差	7	.064			
			正の差	17				
			同順位	56				
			合計	80				

$^{*}\ p < .05$, $^{**}\ p < .01$, $^{***}\ p < .001$