氏名（本籍）	関 川 隆 太郎（静岡県）
学位の種類	博士（理学）
学位記番号	甲第 1267 号
学位授与の日付	2022 年 3 月 19 日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当
学位論文題目	**Relative power integral bases for cyclic extensions** **（巡回拡大の相対冪整基底について）**
論文審査委員	（主査）教授　伊藤　浩行 教授　廣瀬　進　　教授　松本　和子 准教授　加塩　朋和　　教授　宮本　暢子 教授　木田　雅成

論文内容の要旨

本論文では，代数体の冪整基底について，3 次巡回体の場合の既知の存在条件に改良を加え，より高次の素数次巡回拡大における相対冪整基底の存在条件へと拡張した．さらに，希少とされる相対冪整基底を持つ巡回拡大が無限に多く存在することを示した．

有理数体の有限次拡大体を代数体という．代数体の元を代数的数といい，代数的数が最高次の係数が 1 である整数係数多項式の根となるとき，代数的整数という．代数体に含まれる代数的整数全体のなす部分環を，その代数体の整数環という．有理数体は代数体であり，その整数環は有理整数環と一致する．代数体の体拡大に対し，整数環は環拡大を与える．特に，代数体の整数環は有理整数環の環拡大である．

与えられた代数体の整数環が，有理整数環上 1 元生成できるとき，冪整基底をもつ，もしくは monogenic であるという．代数的整数論において，代数体や代数体に付随する様々な不変量の研究は根源的な問題であり，とりわけ与えられた代数体が冪整基底を持つかどうかの判定は古典的な重要問題である．1960 年代に Hasse は冪整基底を持つ代数体を数論的に特徴づけることは可能か問題提起しており，現在では Hasse の問題とも呼ばれる．一方で，冪整基底の有無は，代数体に付随する不変量の一つである判別式に関する方程式の整数解の有無と同値である．すなわち，Diophantus 問題ともみなせる．歴史的に見ると，冪整基底に関する研究は，Diophantus 方程式の解法の研究との関連がある．例えば，3 次体の冪整基底を判定する手法が，Thue 方程式の解法の応用として得られている．また，冪整基底

の直接的な応用も多数ある．簡単な例としては，n 次代数体の冪整基底の生成元を具体的に求めることで，整数環の一般元がその生成元の n−1 次以下の整数係数多項式として一意的に表せる点がある．さらにその結果，整数環における演算，とくに乗法が明示的に計算できることも重要である．代数体が有理数体上 Galois 拡大であれば，Hilbert の分岐理論より，冪整基底の生成元の最小多項式の有限体上での分解を調べることで，任意の有理素数の分解法則を得ることもできる．

数論において古典的に重要である 2 次体や円分体，円分体の最大総実部分体などは全て冪整基底を持つことが，それぞれの判別式を計算することで示されている．冪整基底を持たない最初の例は Dedekind によって与えられた．そして，現在に至るまで様々な結果が得られている．特に，有理数体 Q 上アーベル拡大体に関しての研究は盛んである．先行研究をいくつか紹介する．先に述べたように，2 次体は常に冪整基底を持つことはよく知られている．3 次巡回体に関する研究は，Archinad や Gras によるものがある．特に，Gras は 3 次巡回体が冪整基底を持つための必要十分条件を，ある単数が満たすべき性質として書き表した．また，2 次体とは異なり，3 次巡回体は冪整基底を持つものと，持たないもののどちらも無限個存在することが Dummit と Kisilevsky によって示されている．彼らの手法は，Baker の手法などを活用した不等式の評価である．5 次以上の素数次巡回体については，Gras が円分体の最大実部分体以外は冪整基底を持たないことを証明した．4 次巡回体に関しては Gras や中原の研究がある．中原は，Galois 群が Klein の 4 元群となる 4 次体の冪整基底の研究や，冪整基底を持たない 6 次巡回体に関する研究も行っている．近年では，有理数体上だけでなく，代数拡大の(相対)冪整基底に関しても研究が行われている．例えば，円分体のアナロジーとみなせる虚 2 次体の Hilbert 類体上の ray class field は，多くの場合に冪整基底を持つことが，Schertz によって示されている．ただし，Schertz の手法が使えない幾つかの例外型の存在もする．その例外型においては，高々有限個の具体例が知られているに過ぎず，冪整基底を持たない場合が有限個か無限個かも未解決のままである．一般に，冪整基底を持つ場合の証明に比べて，持たないことの証明は複雑であり，Cougnard と Fleckinger の与えた例などが有名である．現在までの冪整基底に関する研究で多く用いられている手法は Baker の手法などの解析的手法と特定の条件下での代数的手法である．これらは拡大次数の限界や適用条件の厳しさから汎用的ではないという問題点がある．そのため，拡大次数の大きさに影響されずに冪整基底を判定できる汎用的な手法が求められている．本研究は，そのような汎用的な手法を目指し，特に代数的な観点から行われたものである．

第 1 章において，冪整基底問題に関する基本的な事柄と，歴史的背景や既知の結果をまとめ，本論文における主結果の内容や意義を紹介した．

第 2 章では，3 次巡回体の冪整基底に関する研究結果をまとめた．Gras によって与えられた，3 次巡回体が冪整基底を持つための必要十分条件は，ある性質を満たす単数の存在という，実際の判定には不向きな定式化であったが，今回，より明示的で判定がしやすい条件を得ることに成功した．まず始めに，冪整基底を持つ 3 次巡回拡大体は，整数 t でパラメータ付けされる Shanks の 3 次多項式 $x^3-tx^2-(t+3)x-1$ の分解体（simplest cubic field）となる

必要があることを示した．その後, simplest cubic field が冪整基底をもつことの必要十分条件を，パラメータ t に対する明示的な条件として書き表した．証明は，単数群の Galois コホモロジーや，多項式の Newton 多角形など，代数的整数論において普遍的に用いられている道具立てで行われている．また，明示的な必要十分条件が与えられた応用の一つとして，具体的な数値実験の結果を表にまとめた．今回与えた結果の一部は Gras が与えた特徴付けからも，簡単な計算により復元することができる．しかし Gras の手法は, 3 次巡回体の単数論の上に成り立っていることから，判定の難しさのみならず，一般化への道筋が捉えにくい．これに比べて，本章における議論は見通しがよく，普遍的な手法が用いられている．他の場合の冪整基底問題への拡張も考慮した場合，大変意義が結果であると考える．実際に，次章において，本章の結果の一部ではあるが，大幅に一般化できたことを紹介する．尚，第 2 章の内容は東京理科大学の加塩朋和氏との共同研究である．

第 3 章では，第 2 章で得た条件の一般化とその応用を考えている．Shanks の 3 次多項式は，そのパラメータ t を有理数まで広げると，任意の 3 次巡回体を生成することが知られている．この一般化として，陸名は 1 の原始 n 乗根 ζ を用いて， $\mathbb{Q}(\zeta+\zeta^{-1})$ を含む基礎体 k 上の n 次巡回拡大を生成する多項式を発見した．この多項式は陸名の巡回生成多項式と呼ばれ, Shanks の 3 次多項式と同様に，基礎体 k の元 s によるパラメータ付けがなされている．本章では, n は奇素数で，パラメータ s は基礎体 k の整数環に値を取る場合を扱う．このとき, $\mathbb{Q}(\zeta+\zeta^{-1})$上の奇素数次拡大が冪整基底を持つための十分条件を，パラメータ s に対する明示的な条件で与えることに成功した．証明は第 2 章と同様, Newton 多角形などの代数的な道具立てによって展開される．実際, n が 3 の場合は，この条件は必要十分条件となり，第 2 章で得た 3 次巡回体が冪整基底を持つ必要十分条件と一致する．加えて，その条件を用いて, $\mathbb{Q}(\zeta+\zeta^{-1})$上奇素数次巡回拡大で冪整基底を持つものが無限個存在することを, 5 以上の各素数に対して証明した．ここでは，まず Dummit と Kisilevsky の手法を拡張することで，パラメータ s の満たすべき条件を，あるイデアルの満たすべき条件へと書き換えた．その後，その条件を満たすイデアルを数え上げた．一般にイデアルの数え上げは重複の可能性があるため難しい問題である．そこで新谷の基本領域を活用した評価を導入することで，元の数え上げの問題へと帰着させた．更に prime zeta function の類似物の値の評価へと帰着させ，紹介した結果を得ることができた．先行研究から，冪整基底を持つことは基本的には希少なことであるとされている．例えば，先に述べた，有理数体上 5 次以上の素数次巡回拡大は例外を除き，冪整基底を持たないという Gras の結果がある．今回明らかとなった，基礎体を拡張することで冪整基底を持つ素数次巡回拡大が無限個構成できる現象は, Gras の結果と比較して興味深い結果であると考える．

論文審査の結果の要旨

本博士学位論文は、代数体の巡回拡大における冪整基底に関する問題を扱った研究であり、次の 2 つの主結果から構成されている。第一に、M.-N. Gras により与えられていた有理数体上 3 次巡回拡大体が冪整基底を持つための必要十分条件を、Shanks の 3 次多項式を利用した明示的かつ一般化可能な条件に改良した。第二に、その一般化として、ある種の代数体上の奇素数次巡回拡大が冪整基底を持つための十分条件を、陸名の巡回生成多項式を用いた明示的な条件として与え、冪整基底を持つ素数次相対巡回拡大を無限個構成できることを明らかにした。

整数論において代数体やその整数環は最も基本的対象であり、これらが有理数体上や有理整数環上どのように記述されるかは長い研究の歴史がある。代数体 K の整数環が有理整数環上単項生成であるとき、K は冪整基底を持つといい、拡大 K/Q を monogenic 拡大という。同様に代数体 k 上の代数拡大体 K に対して相対冪整基底が定義され、相対冪整基底を持つとき拡大 K/k を monogenic 拡大という。代数体が冪整基底を持つための特徴づけを与えよ、という Hasse の問題は 1960 年代より研究されている古典的問題であり、代数体が冪整基底を持つか否かは、代数体に付随する不変量の一つである判別式に関する方程式の整数解の有無と同値であることから、Diophantus 問題と見なすこともでき、研究は多方面に広がる。冪整基底の存在は、整数論において重要である 2 次体、円分体とそのある種の実部分体などに対して、その判別式を計算することにより示されている。また、ある種の 3 次体、巡回拡大体、4 次体、アーベル拡大体、実円分体などでは無限族として冪整基底を持つ体が知られている。一方で、冪整基底を持たない代数体は、Dedekind による非 Galois 3 次体が最初の例として与えられ、その後も種々の特別な場合に十分条件等が与えられている。

以上のような背景で、申請者は、Galois 群が巡回群となる巡回拡大について冪整基底を扱っている。先行研究によると、2 次体は全て冪整基底を持つ。3 次巡回体の冪整基底については Archinad と M.-N Gras により独立に研究され、M.-N Gras により存在の必要十分条件が与えられている。また、3 次巡回体には冪整基底を持つもの、持たないもの、いずれも無限個存在することが Dummit-Kisilevsky により示されている。

序章に続く第 2 章における議論と結果は次のとおりである。3 次巡回体が冪整基底を持つための必要条件として、代数体が Shanks の 3 次多項式により与えられる特別な 3 次拡大であり、そのノルムが体の導手となる整イデアルが単項生成であることを示し、次に、これら必要条件をみたす 3 次巡回体が冪整基底を持つための条件を単数群の Galois コホモロジー、多項式の Newton 多角形などの道具立てにより与えることで主結果を得た。これにより 3 次巡回体で冪整基底を持つための必要十分条件が具体的に判別式や導手の計算に帰着され、先行研究に比べ数学的にスマートな条件となり、多くの具体例を与えることが可能となったとともに、第 3 章で考察される一般次数の相対冪整基

底の存在条件へのアプローチを可能にするなど優れた結果であると評価される。

第3章においては、これまで有理数体上の代数拡大について考察していた冪整基底の存在について、より一般的に実円分体上の代数拡大について考察を行なった。この代数体上の奇素数次巡回拡大を記述するため、Shanks の3次多項式の一般化である陸名多項式を導入し、第2章にある議論の一般化を試みた。巡回拡大の導手や判別式と、陸名多項式の判別式に関連するイデアルに Newton 多角形などの道具を用いることで十分条件を導いた。この条件は第2章で得られた結果の完全な一般化である。この十分条件により実円分体上奇素数次巡回拡大体で冪整基底を持つものが無限個存在することが示され、Hasse の問題の研究を進める上で、非常に重要な示唆を与えた。実際、有理数体上の5次以上の素数次巡回拡大体は例外を除き冪整基底を持たないことが M.-N Gras により証明されているので、相対冪整基底では様相が異なっているという興味深い結果であり新たな知見を与えるものである。冪整基底を持つ拡大体が無限個存在することの証明では、Dummit-Kisilevsky による解析的手法を独自に発展させて用いている。特に、無限個の体のパラメータをイデアルと対応させ、新谷の基本領域を利用するという独創的なアイディアにより、一般には困難なイデアルの数え上げをある種の元の数え上げに帰着させ、さらにゼータ関数の評価により結果を得た手法は、技術的困難を種々の道具立てにより簡略化していく高度な手法であり高く評価される。

以上の研究成果は多くの先行研究を踏まえた上での、申請者の独創的視点による研究成果であり、代数体の冪整基底に関する研究の進展に大きく貢献したものである。よって博士(理学)の学位論文として十分価値のあるものと認める。