氏名（本籍）　臼井　智（広島県）
学位の種類　博士（理学）
学位記番号　甲第1252号
学位授与の日付　2022年3月19日
学位授与の要件　学位規則第4条第1項該当
学位論文題目　**Studies on Tate-Hochschild cohomology for Frobenius algebras and eventually periodic Gorenstein algebras**
（フロベニウス多元環及び終局周期ゴレンシュタイン多元環に対するテイト・ホッホシルトコホモロジーの研究）

論文審査委員　（主査）教授　眞田　克典
教授　木田　雅成　　教授　功刀　直子
教授　佐藤　隆夫　　教授　関川　浩

論文内容の要旨

本論文では，フロベニウス多元環のテイト・ホッホシルトコホモロジー環に，Gerstenhaber構造を生成するようなBatalin-Vilkovisky構造（BV構造）が存在するための十分条件を与える．さらに，ゴレンシュタイン多元環のテイト・ホッホシルトコホモロジー環に正次数の斉次な可逆元が存在するための必要十分条件も与える．前者はWang (2021)による結果の拡張であり，後者はDotsenko-Glinas-Tamaroff (2019)による結果の一般化となっている．

Buchweitz (1986)は，有限群のテイトコホモロジーの一般化として，環の特異圏を用いて加群のテイトコホモロジーを導入した．特に，ゴレンシュタイン環上のテイトコホモロジーが完備分解から誘導されることを示すことで，加群のテイトコホモロジーが有限群のテイトコホモロジーの一般化であることを確認した．この結果を契機として，より一般の環の場合に，完備分解による加群のテイトコホモロジー，及び特異圏による加群のテイトコホモロジーがそれぞれ研究されるようになった．前者は数多くの研究者によって活発に研究されてきた一方，後者の研究にはあまり進展が見られなかった．

最近，Wang (2015)は特異圏による加群のテイトコホモロジーを応用して多元環のテイト・ホッホシルトコホモロジーを導入した．テイト・ホッホシルトコホモロジーが消滅することと多元環の両側射影次元が有限であることは同値であるため，テイト・ホッホシル

トコホモロジーの研究において考察対象となる多元環は両側射影次元が無限なものである．例えば，多元環の表現論において重要な研究対象であるフロベニウス多元環などが該当する．また，テイト・ホッホシルトコホモロジーは次数付き環の構造，そして Gerstenhaber 構造とよばれる代数的構造を有することが知られている．

k を体，A を有限次元 k-多元環，i を整数とする．$\mathcal{D}_{\mathrm{sg}}(A^{\mathrm{e}})$ を A の包絡多元環 $A^{\mathrm{e}} = A \otimes_k A^{\mathrm{op}}$ の特異圏とし，射空間 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\mathrm{sg}}(A^{\mathrm{e}})}(A, A[i])$ を A の i 次テイト・ホッホシルトコホモロジー群 $\widehat{\mathrm{HH}}^i(A)$ として定義する．次数付きベクトル空間 $\widehat{\mathrm{HH}}^\bullet(A) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \widehat{\mathrm{HH}}^i(A)$ は米田積により次数付き環の構造をもつが，Wang (2021) はそれが次数付き可換であることを示した．以下では，その次数付き可換環 $\widehat{\mathrm{HH}}^\bullet(A)$ を A のテイト・ホッホシルトコホモロジー環とよぶ．また Wang (2021) は，任意の多元環に対してそのテイト・ホッホシルトコホモロジーには Gerstenhaber 構造が存在することを示した．Gerstenhaber 構造とは，テイト・ホッホシルトコホモロジー環上の次数付きリー環構造のことである．

近年，テイト・ホッホシルトコホモロジー環 $\widehat{\mathrm{HH}}^\bullet(A)$ 上の BV 構造の研究が行われている．$\widehat{\mathrm{HH}}^\bullet(A)$ が BV 構造をもつとは，ある条件を満たす作用素 $\Delta_* : \widehat{\mathrm{HH}}^*(A) \to \widehat{\mathrm{HH}}^{*-1}(A)$ が存在するときをいい，Δ_* を BV 作用素とよぶ．$\widehat{\mathrm{HH}}^\bullet(A)$ が BV 構造をもつならば，付随する BV 作用素が $\widehat{\mathrm{HH}}^\bullet(A)$ 上に Gerstenhaber 構造を誘導することが知られている．この事実を踏まえ Wang の Gerstenhaber 構造を生成するような BV 構造の研究がなされており，Wang (2021) は特別なフロベニウス多元環である対称多元環に対してそのような BV 構造が存在することを示した．これに対し，一般のフロベニウス多元環に対してはそのような BV 構造の存在の有無は解明されていない．

一方，Dotsenko-Glinas-Tamaroff (2019) によりモノミアル・ゴレンシュタイン多元環のテイト・ホッホシルトコホモロジー環には正次数の斉次な可逆元が存在することが示されている．この結果から，テイト・ホッホシルトコホモロジー環に正次数の斉次な可逆元が存在するような多元環を決定できるか，という問題が自然に考えられる．

以上の先行研究を踏まえ，本研究では，フロベニウス多元環の場合に Wang の Gerstenhaber 構造を生成するような BV 構造が存在するための十分条件について考察するとともに，ゴレンシュタイン多元環の場合にテイト・ホッホシルトコホモロジー環が正次数の斉次な可逆元をもつような多元環の特徴付けを行う．

本論文は 4 章から構成される．以下では，各章の内容を説明するとともに主結果を述べる．

第 1 章では，テイト・ホッホシルトコホモロジーに関する先行研究を紹介し，本論文の概要について述べる．

第 2 章では，本論文で用いるテイト・ホッホシルトコホモロジー，及びゴレンシュタイン多元環に関する定義や基本的事実を紹介する．

第 3 章では，Wang の Gerstenhaber 構造を生成するような BV 構造の存在についてフロベニウス多元環の場合に考察する．A をフロベニウス多元環とする．Wang (2021) は微分次数付き環 $\mathcal{D}^\bullet(A, A)$ で，そのコホモロジー環 $\mathrm{CH}^\bullet(A) := \mathrm{H}^\bullet(\mathcal{D}^\bullet(A, A))$ がテイト・ホッホシルトコホモロジー環 $\widehat{\mathrm{HH}}^\bullet(A)$ と同型であるようなものを与えた．そして対称多元環

A に対して，$\mathcal{D}^\bullet(A,A)$ 上に定義した作用素を $\mathrm{CH}^\bullet(A)$ 上へ持ち上げることでBV作用素を構成し，環同型 $\mathrm{CH}^\bullet(A) \cong \widehat{\mathrm{HH}}^\bullet(A)$ を通して $\widehat{\mathrm{HH}}^\bullet(A)$ が望ましいBV構造をもつことを示した．これに対して一般のフロベニウス多元環 A の場合では，$\mathcal{D}^\bullet(A,A)$ 上に候補となる作用素を定義できるが，$\mathrm{CH}^\bullet(A)$ への持ち上げが可能なのか不明であった．本章では，$\mathcal{D}^\bullet(A,A)$ の微分次数付き部分環 $\mathcal{D}^\bullet_{(1)}(A,A)$ を導入し，$\mathcal{D}^\bullet_{(1)}(A,A)$ 上に候補となる作用素を構成することで $\mathcal{D}^\bullet_{(1)}(A,A)$ のコホモロジー環 $\mathrm{CH}^\bullet_{(1)}(A)$ 上に作用素が持ち上がることを示した．そして持ち上げられた作用素，及び埋め込み $\mathcal{D}^\bullet_{(1)}(A,A) \hookrightarrow \mathcal{D}^\bullet(A,A)$ が誘導する環準同型 $\mathrm{CH}^\bullet_{(1)}(A) \to \mathrm{CH}^\bullet(A)$ を用いることで，次の結果を得た．

主結果 1 (Theorem 3.3.7). A をフロベニウス多元環とする．A の中山自己同型が対角化可能であるならば，$\mathrm{CH}^\bullet(A)$ はBV構造をもつ．特に，そのBV構造が誘導する $\mathrm{CH}^\bullet(A)$ 上の Gerstenhaber 構造は $\widehat{\mathrm{HH}}^\bullet(A)$ 上の Wang の Gerstenhaber 構造に一致する．

特に，対称多元環の中山自己同型は恒等写像であり，したがって対角化可能であることから，主結果1は対称多元環に対する Wang (2021) の結果の拡張になっている．

第4章では，テイト・ホッホシルトコホモロジー環に正次数の斉次な可逆元が存在するようなゴレンシュタイン多元環を決定する．Dotsenko-Glinas-Tamaroff (2019) は，モノミアル・ゴレンシュタイン多元環の極小両側射影分解が十分大きい次数において周期的であることを示し，この結果からテイト・ホッホシルトコホモロジー環における可逆元の存在を証明している．本章では，Dotsenko-Glinas-Tamaroff の手法を拡張して，極小両側射影分解が十分大きい次数において周期的となるような多元環を終局周期多元環（eventually periodic algebra) として導入し，Buchweitz (1986) によるゴレンシュタイン多元環の特異圏に関する結果を応用することで，テイト・ホッホシルトコホモロジー環に可逆元が存在するための必要十分条件を与える次の結果を得た．

主結果 2 (Theorem 4.2.3). ゴレンシュタイン多元環 A に対して次は同値である．

(1) テイト・ホッホシルトコホモロジー環 $\widehat{\mathrm{HH}}^\bullet(A)$ は正次数の斉次な可逆元をもつ．

(2) A は終局周期多元環である．

モノミアル・ゴレンシュタイン多元環は終局周期ゴレンシュタイン多元環であることから，主結果2は Dotsenko-Glinas-Tamaroff (2019) の結果の一般化となっている．

論文審査の結果の要旨

本論文は，多元環のテイト・ホッホシルトコホモロジーを研究の対象とし，二つの主結果を得ている．第一に，フロベニウス多元環のテイト・ホッホシルトコホモロジー環の Gerstenhaber 構造を生成するような Batalin-Vilkovisky 構造（BV 構造）

が存在するための十分条件を与えた．第二に，ゴレンシュタイン多元環のテイト・ホッホシルトコホモロジー環に正次数の斉次な可逆元が存在するための必要十分条件を与えた．

有限群のコホモロジーの負次数への拡張すなわち次数についての完備化であるテイトコホモロジーは，コホモロジーの周期性を研究する手段としてアルティンとテイトにより導入され，コホモロジーが周期をもつような有限群の特定という大きな成果につながった．一方，有限群のコホモロジーの多元環への一般化であるホッホシルトコホモロジーも，1950 年代の中山正のフロベニウス多元環の両側完備分解による研究を端緒としてその完備化が試みられてきたが，Buchweitz によって環の特異圏を用いた加群のテイトコホモロジーが定義されたことで，特に群環を含む環のクラスであるゴレンシュタイン環に対する研究が進み今に至っている．特に，Wang による加群のテイトコホモロジーを用いた多元環のテイト・ホッホシルトコホモロジーの研究は大きな進展である．

さて，多元環のホッホシルトコホモロジーは米田積によって次数付き環の構造をもつが，さらに Gerstenhaber 構造，すなわち次数付きリー代数の構造をもつことが知られており，近年これを生成する Batalin-Vilkovisky 作用素（BV 作用素）の研究，すなわち多元環のホッホシルトコホモロジー環が BV 構造をもつかどうかの研究が大きく進み，さらにこれをテイト・ホッホシルトコホモロジー環に拡張する研究にも発展してきている．そのような中で，Wang は群環を含むクラスである対称多元環のテイト・ホッホシルトコホモロジー環が BV 構造をもつことを示した．

これらを背景として，申請者の第一の研究は，対称多元環を含むクラスであるフロベニウス多元環のテイト・ホッホシルトコホモロジー環が BV 構造をもつための条件を与えることであり，第二の研究は，フロベニウス多元環を含むクラスであるゴレンシュタイン多元環の極小両側射影分解の終局周期性と，テイト・ホッホシルトコホモロジー環が斉次な可逆元をもつことの関係性についてである．

本論文は 4 章から構成されており，第 1 章ではテイト・ホッホシルトコホモロジーに関する先行研究の紹介がされ，第 2 章ではテイト・ホッホシルトコホモロジー，ゴレンシュタイン多元環に関する概念の定義および基本的事実を紹介している．

第 3 章では，フロベニウス多元環に付随する中山自己同型が対角化可能であれば，そのテイト・ホッホシルトコホモロジー環は BV 構造をもつという第一の主結果を得ている．その証明のために，申請者は対称多元環の場合の，Wang による微分次数付き環のコホモロジーを用いるという手法では解決できない部分を，その部分環を用いるというアイデアで解決に結びつけている．この結果は，通常のホッホシルトコホモロジー環の場合に得られていた結果と整合するものとなっており，現状で最良のものと言える．

第４章は，テイト・ホッホシルトコホモロジー環に斉次な可逆元が存在するようなゴレンシュタイン多元環が論じられている．これは，テイト・ホッホシルトコホモロジーの次数に関する周期性の判定に直接つながるものである．申請者による第二の主結果は，テイト・ホッホシルトコホモロジー環に斉次な可逆元が存在するためには，そのゴレンシュタイン多元環が終局周期的であること，すなわちその多元環の極小両側射影分解が十分大きな次数において周期的であることが必要十分であるというものである．申請者はゴレンシュタイン多元環の特異圏に関する先行研究を巧みに利用して，終局周期に関する興味深い結果を得ることに成功している．

以上，本論文で申請者が得た結果は，多元環のコホモロジー論ひいては多元環の表現論の研究に独特の方法を与えるものであり，この分野の研究の新たな方向性を切り開くものとして評価できるものである．したがって，本論文は博士（理学）の学位論文として十分に価値あるものと認められる．