氏名（本籍）	**渡辺将一**（わたなべのぶかつ）（福島県）
学位の種類	博士（理学）
学位記番号	甲第1251号
学位授与の日付	2021年9月30日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
学位論文題目	**Studies on properties of Brauer-friendly modules and slash functors** **（ブラウアーフレンドリー加群とスラッシュ関手の性質に関する研究）**
論文審査委員	（主査）教授　功刀　直子 教授　眞田　克典　　教授　木田　雅成 教授　佐藤　隆夫　　教授　関川　　浩

論文内容の要旨

本論文では, H. Ishioka と N. Kunugi により与えられた Scott 加群に対する Brauer 直既約性の同値条件を Brauer-friendly 加群に対する slash 直既約性の同値条件へと一般化する．さらに, ある条件を満たす直既約 Brauer-friendly 加群が持ち上げ可能であることを示す.

p を素数として, $(K, \mathcal{O}, k)$ を k が代数閉体である p-モジュラー系とする.

有限群のモジュラー表現論は, 1935 年頃から R. Brauer により本格的に研究されはじめた．それから現在に至るまで, 有限群のモジュラー表現論における一つの大きな指針として次のようなことが考えられてきた：

与えられた有限群の素数 p に関するモジュラー表現は, その p-局所部分群のモジュラー表現により統制されているのではないか.

ここで, p-局所部分群とはある p-部分群の正規化群や中心化群のことをいう．実際に, 与えられた有限群とその p-局所部分群の表現の間には Green 対応や Brauer 対応のように密接な関係がある．また上記の指針を定式化した予想の一つとして, M. Broué による予想が存在する．与えられた有限群の可換な不足群をもつブロックとその Brauer 対応子が

導来同値であるという予想である．この Broué 予想は有限群のモジュラー表現論における重要な問題の一つであり，今までに様々な人達により研究されてきた．Broué 予想の成立を確認するためには導来同値を構成する必要があるが，一般には導来同値を直接構成するのは困難である．そのため，T. Okuyama(1997) は森田型安定同値を足掛かりに導来同値を構成する奥山の手法を編み出した．現在までに Broué 予想の成立が確認されている多くの場合において，この奥山の手法が用いられている．このことから，Broué 予想を解決するためには森田型安定同値の構成が重要であることがわかる．森田型安定同値の構成に関しては，主ブロックの場合には，M. Broué(1994) により，共通の可換 Sylow p-部分群 P をもつ二つの有限群 G と $N_G(P)$ を含む G の部分群 H に対して，G と H の主ブロックの間の森田型安定同値が vertex として ΔP をもつ Scott $\mathcal{O}(G \times H)$-加群 M により誘導されることが，P の各非自明な部分群 Q に対する $C_G(Q)$ と $C_H(Q)$ の主ブロックの間の森田同値が M の Brauer construction $\mathrm{Br}_{\Delta Q}(M)$ により誘導されることと同値であることが示された．これを Broué の貼り合わせの原理と呼ぶ．Broué の貼り合わせの原理を適用するにあたり，Kessar-Kunugi-Mitsuhashi(2011) は Brauer 直既約性と呼ばれる性質を導入し，さらに可換な p-部分群を vertex にもつ Scott 加群が Brauer 直既約であるための同値条件を示した．Ishioka-Kunugi(2017) は一般の Scott 加群が Brauer 直既約であるための同値条件を示した．

一般のブロックの場合には，M. Linckelmann(2015) により，Broué の貼り合わせの原理の一般化が示された．Linckelmann の貼り合わせの原理において森田型安定同値を誘導する加群 M は，E. Biland(2014) において定義された Brauer-friendly 加群と呼ばれる (endo-)p-permutation 加群 (特に Scott 加群) を一般化した加群である．また，E. Biland(2014) において Brauer 関手の一般化である slash 関手 Sl も定義されている．Broué の貼り合わせの原理における M の Brauer construction は，Linckelmann の貼り合わせの原理においては，M の slash 関手の像に置き換わる．さらに，Brauer-friendly 加群に対しても Brauer 直既約性と同様に slash 関手に対する slash 直既約性が定義出来る．このとき，Broué の貼り合わせの原理において Brauer 直既約性が重要であったのと同様に，slash 直既約性は Linckelmann の貼り合わせの原理において重要な役割を果たす．

本論文の主結果の一つ目として，Ishioka-Kunugi(2017) により与えられた Scott 加群に対する Brauer 直既約性の同値条件を Brauer-friendly 加群に対する slash 直既約性の同値条件へと一般化する．次の設定を用いる．$M = B(b,(P,b_P,V),Sl_{(P,b_P)},S)$ を Brauer-friendly $\mathcal{O}Gb$-加群とするとき，P の各 fully $\mathcal{F}$-normalized 部分群 Q に対して，$\mathrm{Res}^G_{N_G(Q,b_Q)}(M)$ の直既約因子には vertex subpair $(N_P(Q),b_{N_P(Q)})$ をもつ Brauer-friendly $\mathcal{O}N_G(Q,b_Q)b_Q$-加群が存在し, この加群の source を W_Q により表す. このとき, (Q,b_Q)-slash 関手 $Sl_{(Q,b_Q)}$ による $\mathcal{O}N_G(Q,b_Q)b_Q$-加群 $Sl_{(Q,b_Q)}(M)$ の直既約因子には source triple $(N_P(Q), b_{N_P(Q)}, V_Q)$ をもつ Brauer-friendly $\mathcal{O}N_G(Q,b_Q)b_Q$-加群 B_Q が存在する. ここで, V_Q は W_Q の Q-slashed 加群 $W_Q[Q]$ である. このとき, 以下の結果を得た.

定理 1. b を $\mathcal{O}G$ のブロック, (P,b_P) を (G,b)-subpair, $M = B(b,(P,b_P,V), Sl_{(P,b_P)}, S)$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{(P,b_P)}(G,b)$ とする. $Q \leq P$ に対して, $N_Q = N_G(Q,b_Q)$, $H_Q = N_P(Q)$ とする. $\mathcal{F}$ が saturated で $\mathrm{Res}^{N_P}_{PC_G(P)}(S)$ が単純 $\mathcal{O}PC_G(P)$-加群であるとする. このとき, 以下は同値である.

(i) M は slash 直既約である.

(ii) P の各 fully $\mathcal{F}$-normalized 部分群 Q に対して, $\mathrm{Res}^{N_Q}_{QC_G(Q)}(B_Q)$ は直既約である.

これらの条件が成り立てば, P の各 fully $\mathcal{F}$-normalized 部分群 Q に対して

$$Sl_{(Q,b_Q)}(M) \cong B_Q$$

が成り立つ.

上記の議論により, Broué の貼り合わせの原理や Linckelmann の貼り合わせの原理の場合に対して, 森田型安定同値を構成する一つの方法が与えられたことになる.

次の段階として, 奥山の手法により構成した森田型安定同値を誘導する関手を施した加群を調べる必要がある. このとき有用な性質の一つとして, 持ち上げ可能であるという性質がある. kG-加群 M に対して, $k \otimes_{\mathcal{O}} \widehat{M}$ となる $\mathcal{O}G$-加群 $\widehat{M}$ が存在するとき, M は持ち上げ可能であるという. M が持ち上げ可能であれば, より計算し易い KG-加群 $K \otimes_{\mathcal{O}} \widehat{M}$ の構造を調べることで M の構造を調べることが出来る. このため持ち上げ可能である加群を出来るだけ知りたい. しかし, 持ち上げ可能であることが分かっている加群のクラスはごく少数である. 例えば, p-permutation 加群 (特に Scott 加群) や endo-permutation 加群が持ち上げ可能であることは示されている. また Lassueur-Thévenaz(2018) において, これらを真に含む加群のクラスである endo-p-permutation 加群に対して持ち上げ可能であることが示された.

本論文の主結果の二つ目として, endo-p-permutation 加群を含む加群のクラスでもある Brauer-friendly 加群が持ち上げ可能であるかを考察し, 以下の結果を得た.

定理 2. b を kG のブロック, M を source triple (P,b_P,S) をもつ直既約 Brauer-friendly

kGb-加群とする．$\mathcal{F}_{(P,b_P)}(G,b)$ が saturated あると仮定する．このとき，$\widehat{S}/J(\mathcal{O})\widehat{S} \cong S$ かつ $\widehat{M}/J(\mathcal{O})\widehat{M} \cong M$ を満たす source triple $(P, \widehat{b}_P, \widehat{S})$ をもつある直既約 Brauer-friendly $\mathcal{O}G\hat{b}$-加群 $\widehat{M}$ が存在する．

本論文は以下の 5 章から構成される．第 1 章では，本研究の動機について述べた．第 2 章では，本論文を通して使用する用語や記号の説明，さらに (p-)permutation 加群と endo-(p-)permutation 加群の定義と重要な性質について述べた．第 3 章では，本論文の研究対象である Brauer-friendly 加群と slash 関手の定義と重要な性質に関して述べた．第 4 章では，一つ目の主結果の証明に用いる Brauer-friendly 加群と slash 関手に関する複数の補題を示した後，用意した補題を用いて一つ目の主結果である，Brauer-friendly 加群に対する slash 直既約性の同値条件を示す．第 5 章では，二つ目の主結果の証明に用いる endo-permutation 加群と Brauer-friendly 加群に関する複数の補題を示した後，用意した補題を用いて二つ目の主結果である，ある条件を満たす直既約 Brauer-friendly 加群が持ち上げ可能であることを示す．

論文審査の結果の要旨

本学位論文で申請者は，ブラウアーフレンドリー加群の性質について論じている。
p を素数とし，$(K, \mathcal{O}, k)$ を k が標数 p の代数的閉体となる p-モジュラー系とする。
有限群のモジュラー表現論における問題は，与えられた有限群の表現の情報は p-局所部分群の表現の情報から得られるのではないかという考えに基づいている。とくに，与えられた有限群のブロックと p-局所部分群のブロックについて，森田同値，導来同値，森田型安定同値などの圏同値が存在するかどうか考えることは重要である。Broué は，有限群のブロック A は，Brauer 対応子とよばれる p-局所部分群のブロック B と，不足群が可換という条件のもと，導来同値になるのではないかと予想している。2 つのブロック A と B の導来同値を構成する際，森田型安定同値を構成し，森田型安定同値による加群の対応を調べることで導来同値を構成する 1 つの手法が Okuyama(1997) により与えられている。Broué による予想が非主ブロックについて確認されている例は，主ブロックの場合に比べ少ない。
2 つのブロック A と B に対し，不足群の部分群 Q について対応する p-局所部分群のブロック A_Q, B_Q 間の森田同値が p-置換加群により与えられている場合に，それらを貼り合わせることで，ブロック A, B 間の森田型安定同値を構成する方法が，Broué(1992) により与えられている。これを Broué の貼り合わせの定理とよぶ。主ブロックに対しこの定理を適用する際，スコット加群のブラウアー直既約性が重要となる。Ishioka-Kunugi(2017) は，スコット加群がブラウアー直既約性をもつかどうかを判定するための条件を与えている。
一方，Linckelmann(2015) は p-置換加群をブラウアーフレンドリー 加群へと置き換

えることで，Brouéの貼り合わせの定理を非主ブロックへも適用できるように一般化した。Linckelmannの貼り合わせの定理では，ブラウアー直既約性のかわりにスラッシュ直既約性が重要となり，Ishioka-Kunugi(2017)に対応する定理の整備が必要な状況となる。また，森田型安定同値が構成できた場合，次の段階では森田型安定同値で対応する加群の構造を調べる必要があるが，その際に，k上の加群が$\mathcal{O}$上の加群へ持ち上げ可能であるという性質を持っていると，指標を用いた計算ができるなどの利点がある。しかし，持ち上げ可能であることが知られている加群のクラスは多くはない。

本学位論文で申請者は，ブラウアーフレンドリー加群がスラッシュ直既約性をもつための条件を与えている。さらに，k上のブラウアーフレンドリー加群の$\mathcal{O}$上の加群への持ち上げについて論じている。

本論文は，5章から構成される。第1章では本論文の研究背景と概要を述べている。第2章では，本論文で用いる記号を説明し，置換加群，p-置換加群，endo-置換加群，endo-p-置換加群について定義と基本事項を説明している。第3章では，ブラウアーフレンドリー加群とスラッシュ関手について，定義と基本性質，先行研究を紹介している。

第4章では，申請者の一つ目の結果として，ブラウアーフレンドリー加群がスラッシュ直既約性をもつための必要十分条件を与えている。申請者はこの結果の証明のために，Ishioka-Kunugiで使われるスコット加群に対するいくつかの補題をブラウアーフレンドリー加群にも適用できるように一般化を行っている。この結果は，主ブロック以外の一般のブロックにも適用できる結果である。

第5章では，ブラウアーフレンドリー加群の持ち上げについて論じている。申請者の2つ目の結果として，source triple (P, b_P, V)をもつk上のブラウアーフレンドリー加群は，(P, b_P)に関するブロックのフュージョン・システムが飽和的であるときに，$\mathcal{O}$上のブラウアーフレンドリー加群に持ち上げ可能であることを示している。

以上，本論文において申請者は，ブラウアーフレンドリー加群のスラッシュ直既約性，および持ち上げについて，新しい結果を得ている。とくに，有限群の表現論において，一般のブロックに対する導来同値，森田同値の研究に貢献するものとして，高く評価できるものである。よって本論文は博士（理学）の学位論文として十分に価値あるものと認める。