

学位申請論文

局所線形空間の低次元化に基づく行列補完法と 各種応用に関する研究

*Matrix Completion Algorithm based on Dimensional Reduction of
Local Linear Space and its Application for Multimedia Processing*

2020年3月

東京理科大学大学院工学研究科経営工学専攻

学籍番号 4417703

佐々木 亮平

目次

第1章	序論	1
第2章	線形空間の次元最小化に基づく行列補完	6
2.1	行列補完問題	6
2.2	行列ランク最小化による行列補完	7
2.3	行列因子分解による行列補完	10
2.4	まとめと既存手法の課題	12
第3章	行列ランク最小化に基づく低次元線型部分空間の和集合上での欠損値補完	14
3.1	問題設定	14
3.2	Subspace Clustering	16
3.3	Subspace Clustering に基づく行列補完アルゴリズムの提案	18
3.4	音声デクリッピング応用のためのアルゴリズム	20
3.5	数値実験	26
3.6	まとめと今後の課題	33
第4章	行列ランク最小化に基づく低次元可微分多様体上での欠損値補完	34
4.1	問題設定	34
4.2	局所線形埋め込みに基づく多様体学習	36
4.3	局所線形空間の低次元化に基づく行列ランク最小化を用いた行列補完アルゴリズムの提案	37
4.4	画像インペイント応用のためのアルゴリズム	39
4.5	数値実験	48
4.6	まとめと今後の課題	49
第5章	行列因子分解に基づく低次元可微分多様体上での欠損値補完	51
5.1	問題設定	51
5.2	局所線形空間の低次元化に基づく行列因子分解を用いた行列補完アルゴリズムの提案	53
5.3	協調フィルタリング応用のためのアルゴリズム	58
5.4	数値実験	59
5.4.1	シミュレーションデータ	60

5.4.2	MovieLens データセットを対象とした協調フィルタリング	64
5.5	まとめと今後の課題	67
第 6 章	結論	69
	参考文献	72
	図目次	76
	表目次	78

第1章 序論

研究背景

本論文では行列補完問題を扱う。行列補完問題とは、観測要素と未観測要素が混在する行列に対して未観測要素を推定する問題である。観測データから未観測データを推定する一般の問題において、推定変数を行列という構造として定義できるのであれば行列補完問題を設計できるため、その単純さを理由に応用の汎用性に富む。例として、推薦システムにおける協調フィルタリング、無線通信におけるチャンネル推定、マルチメディア信号処理においては画像・音声修復などが挙げられる [1, 2, 9, 3, 4, 5, 6, 7]。近年では同問題に対して、対象の行列が低ランクであるとの仮定に基づいた行列の低ランク近似による行列補完手法が盛んに研究されている [8, 9, 10, 11, 12, 13]。同手法は、対象とする行列の各列ベクトル（または行ベクトル）が低次元線形空間に属すると仮定し、その線形空間を構成する基底と行列の部分欠損値を同時に推定する手法である。しかしながら、現在までに提案されている手法のほとんどは、推定対象の行列の列空間が低次元線形空間であるという仮定に基づいており、同仮定が成り立たない場合、すなわち、推定対象の行列が高ランクとなる場合には推定精度が劣化しやすい。同仮定が成り立たない場合の重要な例としては線型部分空間の和集合 (Union of Linear Subspaces : ULS) と可微分多様体 (Differentiable Manifold : DM) が挙げられる。ULS の場合、一つ一つの線型部分空間が低次元であっても、その和集合をすべて含む線形空間の次元は最大で各線型部分空間の次元の和となり、推定対象の行列は各線形空間の次元と比べて高ランク行列となる。また、機械学習におけるデータ分析の一つとして、実応用として用いられるデータの多くは高次元線形空間上の低次元多様体に属するという多様体仮説 [14, 16] に基づく様々な分析手法が提案されており、

同応用における行列補完問題に関しても推定対象の行列は多様体の次元と比べて高ランクとなりやすい。このため、ULS と DM のいずれの場合にも、推定対象の行列が高ランク行列となりやすく、既存の行列の低ランク近似に基づく手法は適切でない。

本論文は上述の行列補完問題における欠損推定精度の向上を目的とする。推定対象の行列の各列ベクトルが ULS に属する場合と DM に属する場合のそれぞれについて最適な行列補完アルゴリズムを提案し、各種実データを用いた数値実験により有効性を示す。

1 つ目の例として、ULS 上の部分欠損推定手法について述べる。ULS 上の代表的なデータ分析手法として、ULS を構成する各低次元線型部分空間を分割する Subspace Clustering(SC) と呼ばれる手法が提案されている [17, 18, 19]。同手法は与えられた行列の各列ベクトルが ULS に属するという仮定の下、どの列がどの線型部分空間に属するかを推定する手法である。このとき、SC は与えられた行列を複数の低ランク部分行列に分割する問題を解く手法であるとみなせる。この考えに基づき、行列ランク最小化を用いた部分行列分割手法が提案されている [18]。同手法は複数の部分行列のランク総和を最小にする問題を解くことで達成される。そこで、本論文 3 章では、同最小化問題に基づき、部分行列分割と欠損推定を交互に行うアルゴリズムを提案する。提案アルゴリズムの有効性は、音声のクリッピングノイズ除去応用に関する数値実験の定量評価により示される。

2 つ目の例として、DM 上の部分欠損推定手法について述べる。多様体仮説に基づく、多様体学習と呼ばれるデータ分析の 1 つとして、局所線形埋め込み (Locally Linear Embedding : LLE) と呼ばれる手法が提案されている [14, 15]。同手法は与えられた行列の各列ベクトルに関してより小さな次元での埋め込み表現を求めることを目的とし、高次元空間の基底に関する結合係数を求める手法である。同手法は各列ベクトルがその近傍ベクトル (ユークリッド距離の小さいものが少数選択される) の線形結合で近似されるという仮定の下、近似誤差二乗和の最小化により各列ベクトルに関する結合係数を求める。本論文 4 章では LLE の考えに基づき、各列ベクトルとその近傍ベクトルで為す部分行列が低ランク近似できると仮定す

る。その後、各列ベクトルごとに生成されるすべての部分行列に関して、その部分行列に低ランク近似される行列のランク総和を最小化する問題を設計する。同問題の解法として、各列ベクトルごとに近傍ベクトルを推定し、生成される部分行列について行列ランク最小化を逐次的に行うアルゴリズムを提案する。提案アルゴリズムの有効性は、画像インペイント応用に関する数値実験の定量評価により示される。

さらに、DM上の欠損推定問題のうち、対象とする行列サイズが大きい場合に有効な手法について述べる。同問題の代表例として推薦システムにおける協調フィルタリングが挙げられる [1, 2]。推薦システムとは Amazon や Netflix などで行われる、各ユーザに対してユーザの好むアイテムを推薦するシステムを示し、この方法論である協調フィルタリングは一般に、ユーザ・アイテムごとの嗜好評価値を蓄え、疎な行列の補完問題として定式化し、各ユーザの未知の嗜好評価値を行列補完により推定することで達成される。推薦システムの実応用上において、推定対象の行列は一般に規模の大きな行列となる。このとき、行列ランク最小化に基づく低ランク行列近似アルゴリズムのほとんどは行列の特異値分解を繰り返し用いる手法であり、大規模な行列に対しては計算時間が大幅に増大することとなる。そのため、協調フィルタリングにおいては行列因子分解に基づく低ランク行列近似による行列補完アルゴリズムが多く提案されている [2, 20, 21, 22, 23]。行列因子分解とは、行列 X を $X = P^T Q$ として P と Q の2つの行列に分解するモデル化の手法を示す。行列因子分解に基づく行列補完は、推定対象の行列を X とし、観測要素との誤差二乗和を最小化する問題へと定式化され、交互最小二乗法により求めた P, Q を用いて未知の要素を推定する手法である [2]。同手法は予め最大行列ランク (P, Q の行数) を与えなければならないが、 P, Q の要素数は与えた最大行列ランクに依存するため、予め低い最大行列ランクを与えた場合には行列ランク最小化と比べて大幅に計算時間を削減できる。しかしながら、同行列因子分解に基づく行列補完アルゴリズムのほとんどは低ランク行列を仮定しており、実データである行列が低ランク近似できる保証はない。そこで本論文5章では、上述した多様体仮説に基づき、埋め込み空間が低次元ながらも高次元空間上の点を

表現できる，多様体学習に基づいた行列補完手法により推定精度を向上させることを考える．提案手法は P, Q の各列ベクトルが低次元 DM に属するという制約条件の下で行列因子分解を行う手法である．提案アルゴリズムの有効性は，協調フィルタリング問題の代表例である MovieLens データセットを用いた数値実験の定量評価により示される．

本論文の構成

本節では，本論文の構成について述べる．

第 2 章 “線形空間の次元最小化に基づく行列補完” では，はじめに本論文における行列補完問題の定式化を行う．その後，これに関連して，既存研究である低ランク行列近似による行列補完法を，行列ランク最小化，ならびに，行列因子分解の 2 つについてそれぞれ説明を行う．

第 3 章 “行列ランク最小化に基づく低次元線型部分空間の和集合上での欠損値補完” では，はじめに UoS の上の欠損推定問題を定式化する．次に，関連研究である Subspace Clustering について説明を行った後に，同考え方に基づいた提案手法である多重行列ランク最小化アルゴリズムの説明を行う．その後，音声デクリッピング応用に対するアルゴリズムの説明を行った後に，数値実験を経て提案手法の有効性を確認する．

第 4 章 “行列ランク最小化に基づく低次元可微分多様体上での欠損値補完” では，はじめに本論文で扱う可微分多様体とその性質について説明を行う．続いて，多様体学習の 1 つである LLE について説明を行い，同考え方に基づいた提案手法である局所線形空間低次元化アルゴリズムを説明する．その後，画像インペイント応用に対するアルゴリズムの説明を行った後に，数値実験を経て提案手法の有効性を確認する．

第 5 章 “行列因子分解に基づく低次元可微分多様体上での欠損値補完” では，はじめに行列因子分解による行列補完問題設定を定式化する．次に，4 章の可微分多様体の局所線形空間低次元化アルゴリズムを用いた，行列因子分解による行列補完アルゴリズムを説明する．その後，協調フィルタリング応用のためのアルゴリ

ズムについて説明を行った後に，数値実験を経て提案手法の有効性を確認する．

第6章“結論”では，本論文で述べた研究成果に関する総括と今後の課題，展望について簡単に触れる．

第2章 線形空間の次元最小化に基づく 行列補完

本章では、推定対象の行列の各列ベクトルが低次元線形空間に属する場合の行列補完手法に関する既存研究を解説する。本章では、はじめに、2.1節で一般の行列補完問題について定式化を行う。その後、既存の行列補完アルゴリズムとして、2.2節では行列ランク最小化アルゴリズムについて、2.3節では行列因子分解を用いた行列補完法について説明を行う。最後に、本章のまとめとして、2.4節で既存研究のまとめと課題について総括する。

2.1 行列補完問題

本節では一般的な行列補完 (Matrix Completion) について説明する。本論文で対象とする行列補完問題とは、ある行列 $X \in \mathbb{R}^{M \times N} (M < N)$ のうち、ある添字集合 Ω 上の添字 (m, n) における X の要素 $x_{m,n}$ が観測された場合に、残りの要素を求める問題である。この問題は以下のように定式化される。

$$\begin{aligned} & \text{Find } X \\ & \text{subject to } x_{m,n} = x_{m,n}^0 \text{ for } (m, n) \in \Omega \end{aligned} \quad (2.1)$$

ただし、 $x_{m,n}^0$ は観測された既知の要素とする。式 (2.1) は、デジタル信号処理における問題として、その単純さを理由に応用の汎用性に富む。例として、推薦システムにおける協調フィルタリング、無線通信におけるチャネル推定、マルチメディア信号処理においては画像・音声修復などが挙げられる [1, 2, 9, 3, 4, 5, 6, 7]。

このとき、式 (2.1) の一意な解を得るためにはなんらかの評価指標を必要とするが、広い応用性やその高い補完精度を理由に近年まで行列ランク最小化や、行列因子分解に基づく行列補完アルゴリズムが研究されてきた。次節以降では、行列因

子分解を用いた行列補完問題，ならびに最適化アルゴリズムについて説明し，その問題点を指摘する．

2.2 行列ランク最小化による行列補完

行列補完のためには多くの場合なんらかの目的関数を必要とするが，本節では，同問題に対して最もよく使われる行列ランク最小化について説明する．式 (2.1) において，対象とする行列の列空間が低次元で，かつ，その空間が既知であれば，同問題は一般的な 1 次連立方程式の解を求めればよい．しかしながら，実応用上において線形空間は未知であることが多く，その場合には未知の行列要素とともに，同線形空間を推定しなければならない．これを同時に達成する 1 つの手法が行列ランク最小化である．このとき，行列ランク最小化問題とは式 (2.1) を満たす行列 X の推定のために，推定対象の行列 X のランクを目的関数として用いる以下のような最適化問題を指す．

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } \text{Rank}(X) \\ & \text{subject to } x_{m,n} = x_{m,n}^0 \text{ for } (m,n) \in \Omega \end{aligned} \quad (2.2)$$

問題 (2.2) における制約は凸であるが，目的関数である Rank が非凸であるためこの大域的最適解を推定することは困難である．また，デジタル信号処理分野において多くの場合，与えられた問題を適切な時間内に解くことが要求されるため，計算コストの観点から問題の近似解を求めることが一般的である．

式 (2.2) の近似解 (または厳密解) を求めるために用いられる手法の最もよく知られた手法は核ノルム最小化 (Nuclear Norm Minimization: NNM) である [9]．核ノルムとは行列 X の特異値の総和を示し，

$$\|X\|_* = \sum_{i=1}^M \sigma_i \quad (2.3)$$

として定義される．ただし，行列 X の特異値 $\sigma \in \mathbb{R}_+^M$ に関して， σ_i は行列 X の第 i 番目に大きい特異値を示す．このとき，目的関数を行列ランクから核ノルムに代替することで，式 (2.2) の近似解を得ることが可能であり，この核ノルム最小化問

題は以下のように定式化される.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } \|X\|_* \\ & \text{subject to } x_{m,n} = x_{m,n}^0 \text{ for } (m,n) \in \Omega \end{aligned} \quad (2.4)$$

また, 核ノルム最小化手法において, 式 (2.4) を以下の最適化問題に緩和し, なん判定しきい値関数を用いて最適化を行う手法が提案されている [9].

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } \gamma \|Z\|_* + \frac{1}{2} \|Z - X\|_F^2 \\ & \text{subject to } x_{m,n} = x_{m,n}^0 \text{ for } (m,n) \in \Omega \end{aligned} \quad (2.5)$$

ただし, $Z \in \mathbb{R}^{M \times N}$ は行列変数, γ は正の定数を示し, $\|\cdot\|_F$ は

$$\|X\|_F = \sqrt{\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N x_{m,n}^2} \quad (2.6)$$

と定義される行列のフロベニウスノルムを示す. 式 (2.5) の厳密解は以下の手続きを収束するまで繰り返す Singular Value Thresholding (SVT) アルゴリズムが提案されている [9].

$$\begin{aligned} \text{Step 1. } & Z \leftarrow \mathcal{T}_\gamma(X). \\ \text{Step 2. } & x_{m,n} \leftarrow x_{m,n}^0 \text{ for } (m,n) \in \Omega. \end{aligned} \quad (2.7)$$

ただし, $\mathcal{T}_\gamma(\cdot) : \mathbb{R}^{M \times N} \mapsto \mathbb{R}^{M \times N}$ は以下に定義される行列のなん判定しきい値関数を示す.

$$\mathcal{T}_\gamma(X) = U \text{diag}(\boldsymbol{\sigma}^+) V^T \quad (2.8)$$

ただし, $U \in \mathbb{R}^{M \times M}$, $V \in \mathbb{R}^{N \times N}$ は行列 X の特異値分解に関して $X = U \text{diag}(\boldsymbol{\sigma}) V^T$ を満たす左, 右の特異ベクトルを並べた行列を示し, $\boldsymbol{\sigma}^+$ は行列 X の特異値 $\boldsymbol{\sigma}$ に関して

$$\boldsymbol{\sigma}^+ = [(\sigma_1 - \gamma)_+ \ (\sigma_2 - \gamma)_+ \ \cdots \ (\sigma_M - \gamma)_+], \quad (2.9)$$

$$(a)_+ = \begin{cases} a & : a > 0 \\ 0 & : a \leq 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

と定義される.

しかしながら, 核ノルムは式 (2.3) が示すように, 核ノルム最小化手法は推定対象である行列の特異値の主成分も含めて最小にするアルゴリズムであるため, 既知の要素数が少ない場合には推定対象の行列の列空間が正しく推定できず, その

結果推定結果が劣化してしまう。その問題を回避するために、目的関数を以下に示す切断核型ノルム (Truncated Nuclear Norm: TNN) に代替した手法が提案されている [11, 12, 13].

核ノルムと同様に、式 (2.2) の目的関数を行列ランクから切断核型ノルムに代替した緩和問題を以下に示す。

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & \gamma \|Z\|_{*,r} + \frac{1}{2} \|Z - X\|_F^2 \\ \text{subject to} \quad & x_{m,n} = x_{m,n}^0 \text{ for } (m, n) \in \Omega. \end{aligned} \quad (2.11)$$

ただし、 r は $N > r \geq 0$ は 0 以上の整数定数とする近似を行いたい行列のランクを示す。また、 $\|\cdot\|_{*,r}$ は第 r 番目に大きい特異値以降の特異値総和を示し、行列 X の特異値 σ に関して

$$\|X\|_{*,r} = \sum_{i=r+1}^M \sigma_i \quad (2.12)$$

と定義される。同問題は $r = 0$ のとき核ノルム最小化問題 (2.5) と等価である。式 (2.11) の解法として IPMS 法が提案されている [12]. 同手法は式 (2.7) と同様に、以下の Step 1 と Step 2 を繰り返すとくことで式 (2.11) 近似解を得るものである。

$$\begin{aligned} \text{Step 1.} \quad & Z \leftarrow \mathcal{T}_{r,\gamma}(X). \\ \text{Step 2.} \quad & x_{m,n} \leftarrow x_{m,n}^0 \text{ for } (m, n) \in \Omega. \end{aligned} \quad (2.13)$$

ただし、 $\mathcal{T}_{r,\gamma}(R)$ は X の特異値分解 $X = U \text{diag}(\sigma) V^T$ に関して以下のように定義される作用素である。

$$\mathcal{T}_{r,\gamma}(X) = U \text{diag} \left(\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_r^+ \end{bmatrix} \right) V^T, \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r &= [\sigma_1 \ \sigma_2 \ \cdots \ \sigma_r]^T, \\ \sigma_r^+ &= [(\sigma_{r+1} - \gamma)_+ \ (\sigma_{r+2} - \gamma)_+ \ \cdots \ (\sigma_N - \gamma)_+]^T, \end{aligned} \quad (2.15)$$

IPMS 法は $r = 0$ を与えた場合には核ノルム最小化と等価な手続きである。また、実応用上では近似する行列ランク r は未知であることが多いため、文献 [12] は繰り返し手続きである式 (2.13) に加えて、繰り返しごとに r を以下のように推定する方法を推奨している。

$$r = \underset{\hat{r}}{\text{argmin}} \sigma_{\hat{r}} \text{ s.t. } \sigma_{\hat{r}} \geq \alpha \sigma_1. \quad (2.16)$$

ただし, $\alpha > 0$ は正の定数を示す. 式 (2.16) は繰り返し手続きごとに推定された X の特異値 σ に関して, 第 r 特異値と第 1 特異値の比が α 以上となる最大の添字を推定することを表す.

2.3 行列因子分解による行列補完

本節では, 行列補完に関する行列因子分解について説明する. 行列補完問題における一般的な行列因子分解では, 真の行列要素 X は 2 つの行列 $P \in \mathbb{R}^{r \times M}$ と $Q \in \mathbb{R}^{r \times N}$ を用いて以下の式で表されると仮定する.

$$X = P^T Q + \Xi. \quad (2.17)$$

ただし, $\Xi \in \mathbb{R}^{M \times N}$ は各要素 $\xi_{m,n}$ が期待値を 0 とする確率密度関数に従う独立同分布の確率変数行列とする. また, 式 (2.17) に関して, 一般的な行列補完問題においては潜在因子の要素数 r が M よりも十分に小さいと仮定する. このとき, 行列因子分解による行列補完手法は, 式 (2.17) における $\xi_{m,n}$ の誤差二乗が十分に小さいと仮定し, 以下の最小化問題を P, Q の各列ベクトル $\mathbf{p}_m, \mathbf{q}_n$ について解くことに帰着する.

$$\text{Minimize} \quad \sum_{(m,n) \in \Omega} (x_{m,n}^0 - \hat{x}_{m,n})^2 + \lambda (\|\mathbf{p}_m\|_2^2 + \|\mathbf{q}_n\|_2^2). \quad (2.18)$$

ただし, $\|\cdot\|_2$ はベクトルの l_2 ノルムを示す. また, $\hat{x}_{m,n}$ は $x_{m,n}$ の推定値を示し,

$$\hat{x}_{m,n} = \mathbf{p}_m^T \mathbf{q}_n \quad (2.19)$$

として定義され, $\lambda > 0$ は式 (2.19) における過剰適合を防ぐための正則化パラメータを示す. その後, 式 (2.18) の解 $\mathbf{p}_u, \mathbf{q}_i$ を用いて, 式 (2.19) により行列の未知の要素を推定する. 式 (2.18) の解法の 1 つとして, 各 $\mathbf{p}_u, \mathbf{q}_i$ ($1 \leq m \leq M, 1 \leq n \leq N$) における交互最小二乗法による繰り返し更新則を以下に示す.

$$\begin{aligned} \text{Step 1. } \mathbf{p}_m &\leftarrow \left(\lambda I + \sum_{n \in \Omega_m} \mathbf{q}_n \mathbf{q}_n^T \right)^{-1} \sum_{n \in \Omega_m} \mathbf{q}_n x_{m,n}^0. \\ \text{Step 2. } \mathbf{q}_n &\leftarrow \left(\lambda I + \sum_{m \in \Omega^n} \mathbf{p}_m \mathbf{p}_m^T \right)^{-1} \sum_{m \in \Omega^n} \mathbf{p}_m x_{m,n}^0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

ただし、 $I \in \mathbb{R}^{r \times r}$ は単位行列を示し、 Ω_m は X の第 m 行に関して要素 $x_{m,n}^0$ が観測可能な列の添字集合、 Ω_n は X の第 n 列に関して要素 $x_{m,n}^0$ が観測可能な行の添字集合を示す。同解法は行列ランク最小化手法で用いていた特異値分解は行わず、変数ベクトル $\mathbf{p}_m, \mathbf{q}_n$ について両凸問題である式 (2.18) の解を交互最小二乗法により求めるため、大規模な行列や観測要素数が少ないときに計算時間少なくてできるといった利点がある。

本節では上記に加え、協調フィルタリングにおける行列因子分解を用いた行列補完アルゴリズムについて説明する。協調フィルタリングにおいて、行列因子分解を用いた行列補完手法の多くは式 (2.18) と同様の定式化を行い、その最適化により行列変数の各要素であるユーザー・アイテムの嗜好評価値を推定する。近年では、式 (2.19) にユーザー・アイテムにおけるバイアス項を付与したり、推定誤差 $(x_{m,n}^0 - \hat{x}_{m,n})^2$ に対して重みを加えて最適化するといった手法が数多く提案されている [21, 22, 23]。これらに共通する定式化を近年 Wu ら [23] によって提案された手法の定式化に基づいて説明する。同手法では、 $x_{m,ndaetr451345}$ における推定値を

$$\hat{x}_{m,n} = b_m^{row} + b_n^{col} + \mathbf{p}_m^T \mathbf{q}_n \quad (2.21)$$

と定め、 $b_m^{row}, b_n^{col} + \mathbf{p}_m, \mathbf{q}_n$ について以下の最小化問題

$$\text{Minimize } \sum_{(u,i) \in \Omega} \left\{ \begin{array}{l} (r_{u,i}^0 - \hat{r}_{u,i})^2 w_{u,i} \\ + \lambda (\bar{w}_u \|\mathbf{p}_u\|_2^2 + \bar{w}_i \|\mathbf{q}_i\|_2^2) \\ + \lambda (\bar{w}_u b_u^2 + \bar{w}_i b_i^2) \end{array} \right\} \quad (2.22)$$

を解き、その後に式 (2.21) を用いて未知の行列要素を推定する。ただし、 $w_{u,i}$ はユーザー・アイテム毎の嗜好評価に対する非負の重みを示し、 \bar{w}_u, \bar{w}_i はそれぞれ $\bar{w}_u = \sum_{i=1}^{N_I} w_{u,i} / N_I, \bar{w}_i = \sum_{u=1}^{N_U} w_{u,i} / N_U$ で定義される。文献 [21] では、式 (2.21) による真値との推定誤差の確率密度関数をガウス分布でモデル化しており、この場合重み $w_{u,i}$ はそのガウス分布の分散の逆数に相当する。同様に、文献 [23] では各ユーザー・アイテムに関する評価の分散を正規化するような重み係数を設定している。また、文献 [23] では同解法として以下の更新則を繰り返す確率的勾配降

下法を採用している.

$$\begin{aligned}
\text{Step 1. } & b_m^{row} \leftarrow b_m^{row} - \eta(\lambda b_m^{row} - e_{m,n}). \\
\text{Step 2. } & b_n^{col} \leftarrow b_n^{col} - \eta(\lambda b_n^{col} - e_{m,n}). \\
\text{Step 3. } & \mathbf{p}_m \leftarrow \mathbf{p}_m - \eta(\lambda \mathbf{p}_m - e_{m,n} \mathbf{q}_m). \\
\text{Step 4. } & \mathbf{q}_n \leftarrow \mathbf{q}_n - \eta(\lambda \mathbf{q}_n - e_{m,n} \mathbf{p}_n).
\end{aligned} \tag{2.23}$$

ただし, $\eta > 0$ は勾配法におけるステップサイズを示し, $e_{u,i}$ は $e_{u,i} = r_{u,i}^0 - \hat{r}_{u,i}$ とする推定誤差を示す.

そのため, 特に, 推薦システムにおける協調フィルタリングには行列因子分解に基づく行列補完手法が主に用いられる.

2.4 まとめと既存手法の課題

本章では, 低ランク行列近似に基づく行列補完手法について, 行列ランク最小化, ならびに, 行列因子分解に基づく手法に関する既存手法を紹介した. 要約すれば, 行列ランク最小化は行列ランクを推定しながら推定対象の行列の欠損要素を推定することができるが, 大規模行列に対しては特異値分解を繰り返し行わなければならないために計算時間が膨大になるといった不利点が挙げられる. また, 行列因子分解は繰り返し手続きごとの交互最小二乗法が行列ランク最小化手法と比べて計算コスト (計算時間と使用メモリ) の面で利点があるが, 未知である行列ランクを予め適切に与えなければならないといった不利点がある. このため, いずれの手法も, 問題に応じて使い分ける必要がある.

しかしながら, 低ランク行列近似に基づく行列補完はいずれの手法も, 推定対象の行列が低ランク行列に近似できることを仮定しており, 推定対象の行列の各列ベクトルが低次元線形空間に属していない場合には欠損値の推定が適切に行えない. 第1章でも示したように, 各列ベクトルが低次元線形空間に属さないケースとして重要なものは2つあり, 各列ベクトルが UoS, または, DM に属する場合である. そのいずれの場合においても, 推定行列は高ランク行列になりやすく, 結果として, 既存の低ランク行列近似に基づく行列補完では推定精度が劣化する. このことは, 3-5章における節“数値実験”において, 上述のアルゴリズムの推定精度によって示される. それゆえに, 本論文は上述の行列補完問題における欠損

推定精度の向上を目的とし，UoS，DM のそれぞれの場合において適切な行列補完手法を 3-5 章にて解説する．

第3章 行列ランク最小化に基づく低次元線型部分空間の和集合上での欠損値補完

本章では，推定対象の行列の各列ベクトルが UoS に属する場合の行列補完問題について説明する．本章ははじめに，3.1 節で同問題設定の定式化を行う．3.2 節では，関連の問題として，各列ベクトルがどの部分空間に属するかを推定する SC について説明する．その後，3.3 節では提案手法として，SC に基づく行列補完手法について説明を行う．さらに，3.4 節では音声のクリッピングノイズ除去応用のためのアルゴリズムを，音声モデルと SC の関係性について明らかにしながら説明を行い，3.5 節で数値実験により提案手法の有効性を示す．最後に，3.5 節で提案手法におけるまとめと課題について総括する．

3.1 問題設定

本節では，行列 X の各列ベクトル $\mathbf{x}_n (n = 1, 2, \dots, N)$ が UoS に属する場合の行列補完問題，すなわち，以下のような問題について議論する．

$$\begin{aligned} & \text{Find } X \\ & \text{subject to } x_{m,n} = x_{m,n}^0 \text{ for } (m,n) \in \Omega . \\ & \mathbf{x}_n \in \mathcal{U} \end{aligned} \tag{3.1}$$

ただし， \mathbf{x}_n は行列 X の第 n 列目を示し， \mathcal{U} は以下に定義される UoS を示す．

$$\mathcal{U} = \bigcup_{l=1}^L \mathcal{S}_l. \tag{3.2}$$

ただし， L は各部分空間の総数， $\mathcal{S}_l \subset \mathbb{R}^M$ は M 次元線形空間上の部分空間を示す．図 3.1 に，その例として 3 次元線形空間上の UoS の概略図を示す．図 3.1 の例

では, U 上のベクトル \boldsymbol{x} は $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ のいずれかに属する. このとき, それぞれの線型部分空間 \mathcal{S}_l の次元は 2 次元であるが, その和集合全体が張る空間の次元は 3 次元である. 一般に, 推定対象の行列 X の各列ベクトル \boldsymbol{x}_n が式 (3.2) が示す UoS に属している場合, X の行列ランクは

$$\text{Rank}(X) \leq \min \left(M, \sum_{l=1}^L \dim(\mathcal{S}_l) \right) \quad (3.3)$$

を満たすため, 各 \mathcal{S}_l が低次元線形空間であったとしても, 推定対象の行列 X は高ランクとなりやすい. そのため, 第 2 章で説明している, 低ランク行列の仮定に基づく行列ランク最小化や行列因子分解による部分欠損推定手法では推定精度が劣化しやすくなる. この問題を回避するために, 本章では各部分空間 \mathcal{S}_l ごとに行列を分解し, 分割された部分行列ごとに行列ランク最小化を行う行列補完手法を提案する. この関連研究として, 次節では, 行列 X のみを与えられた場合に, 各 \mathcal{S}_l の推定と, 各 \boldsymbol{x}_n が \mathcal{S}_l のどれに属するかの推定を同時に行う SC について説明を行う.

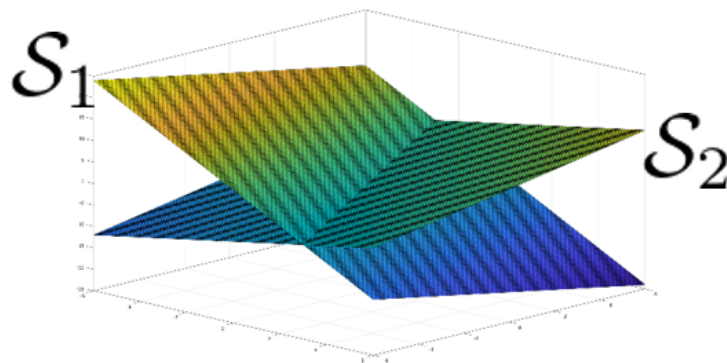


図 3.1: 3次元線形空間上の UoS の例 ($\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ の和集合)

3.2 Subspace Clustering

本論文における Subspace Clustering (SC) [17, 18] とは与えられた N 個の列ベクトル $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^M$ から L 個の異なる低次元線形部分空間を同定する手法であり、また同時にそれら N 個のベクトル \mathbf{x}_n がどの部分空間に属するかを推定すること、あるいはその手法を指す。SC は一般化主成分分析 (Generalized Principal Component Analysis : GPCA) とも呼ばれる主成分分析の拡張であり [17]、その次元縮約を目的とする。通常の主成分分析では、ベクトル \mathbf{x}_n が単一の線形部分空間上に属するとみなし、変量の次元を縮約することが目的であるが、図 3.1 のように各部分空間の和集合の次元が変量の次元と一致する場合には用いることが出来ない。それに対して SC は各サンプルを各線形部分空間を基準にクラスタリングを行い、同時に各部分空間において次元縮約が行えるため、分析対象の空間をより小さくすることが出来る。

SC には幾つかの手法があるが、本論文では切断核型ノルムを目的関数に用いた最適化問題として定式化し、同問題における解法を示す [18]。本節では、行列 X が与えられている場合の SC に関して、以下の問題を議論する。

$$\begin{aligned}
 & \text{Find } D_1, D_2, \dots, D_L \\
 & \text{s.t. } D_i \in \mathcal{D} \quad \text{for } l = 1, 2, \dots, L \\
 & \quad \text{Rank}(XD_l) \leq r_l \quad \text{for } l = 1, 2, \dots, L, \\
 & \quad \sum_{l=1}^L D_l = I, \\
 & \quad \text{Trace}(D_k D_l) = 0 \quad \forall k \neq l
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

ただし、 r_l は UoS を構成する各部分空間に対応する線形空間の次元を表す定数を示し、 I は単位行列を示し、 D_l は各列ベクトル \mathbf{x}_n が第 l 番目の線形部分空間に属していることを表す対角行列変数を示し、 $\mathcal{D} \subset 0, 1^{N \times N}$ は対角要素に 0 か 1 の値を持つ対角行列の集合を示す。問題 (3.4) の解 $\{D_l\}_{l=1}^L$ は、 D_l の第 (j, j) 成分が 1 ならば \mathbf{x}_j が l 番目の部分空間に属し、 D_l の第 (j, j) 成分が 0 ならば \mathbf{x}_j が l 番目以外の部分空間に属していることを示している。ただし、問題 (3.4) は予め各部分空間の次元 r_l を適切に与えなければならない。この問題を解消するために、[18] は同

問題を緩和した問題として，以下のランク総和最小化問題を定式化している．

$$\begin{aligned}
& \text{Minimize} && \sum_{l=1}^L \text{Rank}(XD_l) \\
& \text{s.t.} && D_l \in \mathcal{D} \text{ for } l = 1, 2, \dots, L \\
& && \sum_{l=1}^L D_l = I \\
& && \text{Trace}(D_k D_l) = 0 \quad \forall k \neq l
\end{aligned} \tag{3.5}$$

問題 (3.4)，(3.5) は，制約 $\text{Trace}(D_k D_l) = 0$ の下で解 D_i は $\{0, 1\}$ の要素を持つため，同問題は組み合わせ最適化問題である．また問題 (3.4) はランク不等式制約付き問題，問題 (3.5) はランク最小化問題として，どちらも厳密解を解くことは非常に困難である．そのため問題 (3.4)，(3.5) の近似解法はいくつか提案されているが，本論文では問題 (3.5) における行列のランクの代わりに式 (2.11) のように，切断核型ノルムを用いた以下の最小化問題を扱う [18]．

$$\begin{aligned}
& \text{Minimize} && \sum_{l=1}^L \|XD_l\|_{*,r_l} \\
& \text{s.t.} && D_l \in \mathcal{D} \text{ for } l = 1, 2, \dots, L \\
& && \sum_{l=1}^L D_l = I
\end{aligned} \tag{3.6}$$

ただし，同問題において， $\mathcal{D} \subset [0, 1]^{N \times N}$ は対角要素に 0 以上 1 以下の値を持つ対角行列の集合を示し，問題 (3.4)，(3.5) の制約条件を緩和している．それと同時に，問題 (3.6) では問題 (3.5) の目的関数である行列ランクを切断核型ノルムで緩和している．また問題 (3.4) の最適解である $\{D_l\}_{l=1}^L$ は，文献 [18] により問題 (3.6) の最適解であることが証明されている．

ここで，問題 (3.6) における目的関数を，切断核型ノルム $\|X\|_{*,r}$ の代わりに核ノルム $\|X\|_*$ を用いることが出来ないことに留意したい．何故ならば，核ノルム $\|\cdot\|_*$ は凸関数であり，このとき問題 (3.6) における切断核型ノルム $\|X\|_{*,r}$ の代わりに別の凸関数 $f(\cdot)$ を用いると，劣加法性により以下の不等式を満たす．

$$\sum_{l=1}^L f(XD_l) \geq f\left(\sum_{l=1}^L XD_l\right) = f(X).$$

すなわち問題 (3.6) における切断核型ノルムを凸関数である核ノルムを代替すると， D_i はその自明な解である $D_i = I, D_j = 0 \quad \forall j \neq i$ として一般化主成分分析として意

味の無い解が得られてしまう。故に文献 [18] では非凸関数である切断核型ノルムを用いてランク総和最小化問題を緩和している。

また文献 [18] では更に問題 (3.6) を以下の問題へと緩和している。

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & \sum_{l=1}^L \left\{ \gamma \|Z_l\|_{*,r_l} + \frac{1}{2} \|Z_l - XD_l\|_F^2 \right\} \\ \text{s.t.} \quad & D_l \in \mathcal{D} \text{ for } l = 1, 2, \dots, L \\ & \sum_{l=1}^L D_l = I \end{aligned} \quad (3.7)$$

ただし, $\{Z_l \in \mathbb{R}^{M \times N}\}_{l=1}^L$ は行列変数を示す。このとき問題 (3.7) の近似解は問題 (2.11) の解法のように, 射影勾配法を利用して以下を繰り返すことで求められる。

Step 1 $Z_l \leftarrow \mathcal{T}_{r_l, \gamma}(Z_l)$.

Step 2 Obtain D_l by solving the following problem,

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & \sum_{l=1}^L \|Z_l - XD_l\|_F^2 \\ \text{subject to} \quad & \sum_{l=1}^L D_l = I \end{aligned} \quad (3.8)$$

このとき **Step 2** における問題 (3.8) は以下の式で解析的に求めることができる。

$$(D_l)_{j,j} = \frac{1}{L} \left(1 - \sum_{k=1}^L \frac{\langle \mathbf{z}_j^{(k)}, \mathbf{x}_j \rangle}{\langle \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_j \rangle} \right) + \frac{\langle \mathbf{z}_j^{(l)}, \mathbf{x}_j \rangle}{\langle \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_j \rangle}, \quad (3.9)$$

ただし $\langle \cdot, \cdot \rangle$ はベクトルの内積を, また $\mathbf{z}_j^{(l)} \in \mathbb{R}^M$ は Z_l の第 j 列ベクトルを示す。

以上を踏まえ, 次節では SC と同時に行列補完も同時に達成するアルゴリズムについて提案する。

3.3 Subspace Clustering に基づく行列補完アルゴリズムの提案

本節では補完対象の行列の各列ベクトルが UoS 上に存在する場合の行列補完問題を扱う。同問題は, 推定対象の行列のいくつかの要素が既知であり, そのとき

UoS を構成する l 番目の部分空間の次元が r_l となるように行列 X を推定すれば良い。しかしながら、前節と同様に、UoS を構成する各部分空間の次元は一般の応用問題において未知であるため、本節では以下の部分行列の切断核型ノルム総和最小化問題を議論する。

$$\begin{aligned}
& \text{Minimize} && \sum_{l=1}^L \left\{ \gamma \|Z_l\|_{*,r_l} + \frac{1}{2} \|Z_l - X D_l\|_F^2 \right\} \\
& \text{s.t.} && D_l \in \mathcal{D} \text{ for } l = 1, 2, \dots, L \\
& && \sum_{l=1}^L D_l = I \\
& && x_{m,n} = x_{m,n}^0 \text{ for } (m, n) \in \Omega
\end{aligned} \tag{3.10}$$

この問題 (3.10) の解は、前節の SC 手法と前章の切断核型ノルムによるランク最小化手法の 2 つの手順を組み合わせるにより、以下の手順を用いて近似解を得ることが出来る。

Step 1 $Z_l \leftarrow \mathcal{T}_{r_l, \gamma}(X D_l)$.

Step 2 Obtain D_l by solving (3.8) .

$$\begin{aligned}
\text{Step 3} \quad X \leftarrow & \operatorname{argmin} \sum_{l=1}^L \|Z_l - X D_l\|_F^2 \\
& \text{s.t. } x_{m,n} = x_{m,n}^0 \text{ for } (m, n) \in \Omega
\end{aligned}$$

しかしながら、問題 (3.10) における制約条件 $D_l \in \mathcal{D}$ は D_l の対角要素が 0、または、1 を以外の値を持つ可能性がある。特に、各部分空間が直交せず、その張る空間同士が類似する場合には各 $(D_l)_{j,j}$ が $\frac{1}{L}$ に近づくことが予想され、その場合には従来の行列ランク最小化と同様に推定精度が劣化する恐れがある。そこで本論文では、 D_l の対角要素が 0、または、1 となるように、 D_l の対角要素の L^1 ノルムを用いて正則化を行った以下の最小化問題を定式化する。

$$\begin{aligned}
& \text{Minimize} && \sum_{l=1}^L \left\{ \gamma \|Z_l\|_{*,r_l} + \frac{1}{2} \|Z_l - X D_l\|_F^2 + \tau \sum_{j=1}^N |(D_l)_{j,j}| \right\} \\
& \text{s.t.} && D_l \in \mathcal{D} \text{ for } l = 1, 2, \dots, L \\
& && \sum_{l=1}^L D_l = I \\
& && x_{m,n} = x_{m,n}^0 \text{ for } (m, n) \in \Omega
\end{aligned} \tag{3.11}$$

ただし, $\tau \geq 0$ は L^1 正則化による緩和係数を示す.

また, 同問題の解法として, 以下の手順を繰り返すアルゴリズムを提案する.

$$\text{Step 1} \quad Z_l \leftarrow \mathcal{T}_{r_l, \gamma}(XD_l).$$

$$\text{Step 2} \quad (D_l)_{j,j} \leftarrow \max \left(0, \frac{1}{L} \left(1 - \sum_{k=1}^L \frac{\langle \mathbf{z}_j^{(k)}, \mathbf{x}_j \rangle}{\langle \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_j \rangle} \right) + \frac{\langle \mathbf{z}_j^{(l)}, \mathbf{x}_j \rangle}{\langle \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_j \rangle} - \tau \right).$$

$$\text{Step 3} \quad (D_l)_{j,j} \leftarrow \frac{(D_l)_{j,j}}{\sum_{k=1}^L (D_k)_{j,j}}.$$

$$\text{Step 4} \quad X \leftarrow \underset{\text{s.t. } x_{m,n} = x_{m,n}^0 \text{ for } (m,n) \in \Omega}{\operatorname{argmin}} \sum_{l=1}^L \|Z_l - XD_l\|_F^2.$$

Step 2 では, 式 (3.9) に加え, L^1 ノルム最小化によく用いられるなん判定しきい値関数を用いることで D_l の対角要素を 0, または, 1 に近づける処理を行う. ただし, このとき, 制約条件 $\sum_{i=1}^L D_i = I$ を満たすために, **Step 2** の後に **Step 3** が示す最小二乗射影を用いて D_l を正規化している.

以上をまとめて, 提案手法のアルゴリズムを Algorithm 1 に示す. 同アルゴリズムは切断核型ノルム最小化 [12] と同様に, α を繰り返し毎に減少させることにより XD_l の行列ランクを推定しながら行列 X の部分欠損要素を推定する手法である.

3.4 音声デクリッピング応用のためのアルゴリズム

本節では, はじめに音声信号のデクリッピング問題を説明し, その後に前節で説明した行列ランク最小化を用いた UoS 上での欠損修復手法を同問題に適用した場合のアルゴリズムについて説明する.

はじめに, 音声信号のクリッピング (Clipping) について説明する. クリッピングとはデジタル信号における量子化最大許容振幅を超過した区間が平坦化されることであり (図 3.2), これにより音声信号の品質が劣化する. このクリッピングによって失われた情報を推定することをデクリッピングと呼び, 本章では以下音声修復問題のうちデクリッピング問題について扱う. デクリッピング問題におい

Algorithm 1 Matrix completion algorithm based on multiple rank minimization

Input: $X^{(0)}, \Omega, \{D_l\}_{l=1}^L, \alpha, \alpha_{min}, \eta_\alpha, \lambda, \tau, \epsilon, t_{max}$

- 1: $t \leftarrow 0$
 - 2: $X \leftarrow X^{(0)}$
 - 3: **repeat**
 - 4: $X^{old} \leftarrow X$
 - 5: $\alpha \leftarrow \max(\alpha/\eta_\alpha, \alpha_{min})$
 - 6: **for** $l = 1$ to L **do**
 - 7: $[U, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M, V] \leftarrow \text{svd}(XD_l)$
 - 8: $r_l \leftarrow \operatorname{argmax}_r \sigma_r$ s.t. $\sigma_r \geq \alpha\sigma_1$
 - 9: $Z_l \leftarrow \mathcal{T}_{r_l, \lambda\sigma_{r_l}}^r(XD_l)$
 - 10: **end for**
 - 11: **for** $l = 1$ to L **do**
 - 12: $(D_l)_{j,j} \leftarrow \frac{1}{L} \left(1 - \sum_{k=1}^L \frac{\langle \mathbf{z}_j^{(k)}, \mathbf{x}_j \rangle}{\langle \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_j \rangle} \right) + \frac{\langle \mathbf{z}_j^{(l)}, \mathbf{x}_j \rangle}{\langle \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_j \rangle} - \tau$ for all j
 - 13: $(D_l)_{j,j} \leftarrow \max(0, (D_l)_{j,j})$ for all j
 - 14: **end for**
 - 15: $(D_l)_{j,j} \leftarrow (D_l)_{j,j} / \sum_{k=1}^L ((D_k)_{j,j})$ for all l, j
 - 16: $X \leftarrow \left(\sum_{l=1}^L Z_l D_l \right) \left(\sum_{l=1}^L D_l^2 \right)^{-1}$
 - 17: $x_{m,n} \leftarrow x_{m,n}^0$ for $(m, n) \in \Omega$
 - 18: $t \leftarrow t + 1$
 - 19: **until** $\|X - X^{old}\|_F / \|X\|_F < \epsilon$ or $t_{max} < t$
- Output:** X
-

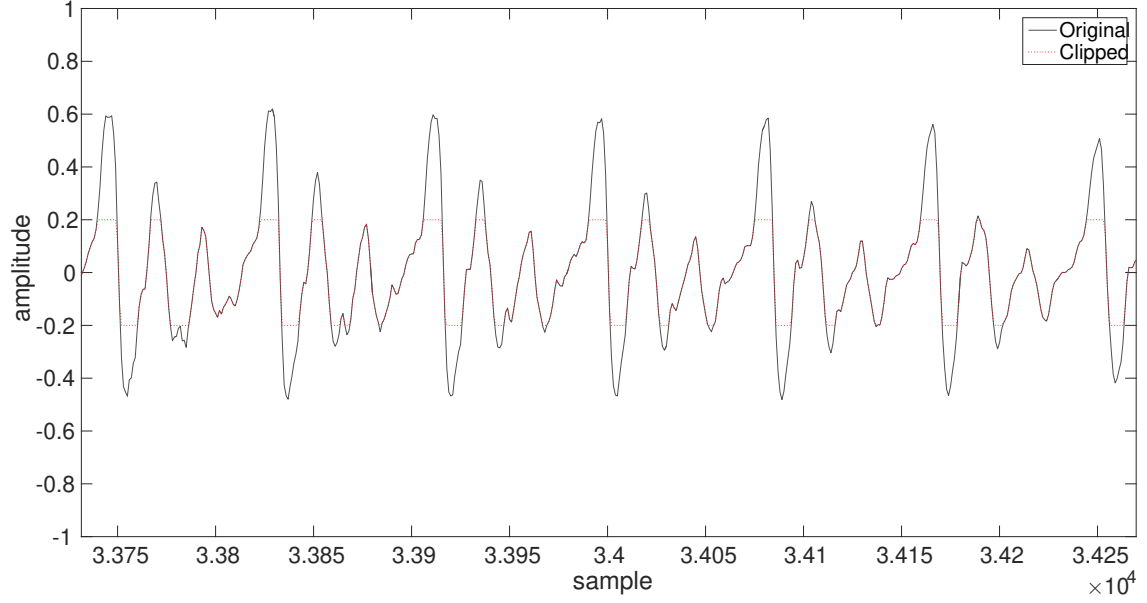


図 3.2: 音声クリッピングの例 ($C = 0.2$)

て、本論文ではクリッピングによる元音声信号 $\{y_t\}_{t=1}^T$ から観測信号 $\{y_t^0\}_{t=1}^T$ が得られる過程を以下で定義する.

$$y_t^0 = g(y_t) = \begin{cases} C & \text{if } y_t > C \\ -C & \text{if } y_t < -C \\ y_t & \text{else} \end{cases}, \quad (3.12)$$

ただし C はクリッピングレベルと呼ばれるデジタル信号 y_t に関する量子化最大許容幅を表し、また、本章で扱うすべての音声信号 y_t は $\max(|y_t|) = 1$ として振幅を正規化されているものとする. このとき、与えられた観測信号 y_t^0 に関して、 $\Theta^+ = \{t \mid y_t^0 = C\}$ 、 $\Theta^- = \{t \mid y_t^0 = -C\}$ を定義すれば、デクリッピング問題は以下の問題へと定式化出来る、

$$\begin{aligned} & \text{Find } \{y_t\}_{t=1}^T \\ & \text{s.t. } y_t \in \mathcal{I}_t \quad t = 1, 2, \dots, T \end{aligned} \quad (3.13)$$

ただし \mathcal{I}_t は以下で定義される集合とする.

$$\mathcal{I}_t = \left\{ z \in \mathbb{R} \left| \begin{array}{l} z \geq C \quad \text{if } t \in \Theta^+ \\ z \leq -C \quad \text{if } t \in \Theta^- \\ z = y_t^0 \quad \text{if } t \notin \Theta^+ \cap \Theta^- \end{array} \right. \right\}. \quad (3.14)$$

問題 (3.13) を解くためには何らかの仮定に基づく評価関数が必要であるが、推定精度の高さや仮定の拡張性を考慮し、本論文では AR モデルに基づくハンケル行列ランク最小化 [4, 5] の考え方を採用する。

文献 [4] では、音声信号の生成過程が以下の AR モデルに基づいていると仮定する。

$$y_t = \sum_{k=1}^r a_k y_{t-k} \quad (1 \leq t \leq T), \quad (3.15)$$

ただし $a_t \in \mathbb{R}$ は AR 係数を示し、 r は AR 次数を示す。この仮定が成り立つ場合、 $\{y_t\}_{t=1}^T$ を用いた M 行 N 列 ($T = M + N - 1$ を満たすものとする) のハンケル行列

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_N \\ y_2 & y_3 & \cdots & y_{N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_M & y_{M+1} & \cdots & y_{M+N-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{M \times N} \quad (3.16)$$

の行列ランク $\text{Rank}(Y)$ は AR 次数 r 以下であることが保証される。このことから、文献 [4] ではハンケル行列の行列ランクを推定しながら欠損要素を推定するための以下の問題を定式化し、行列ランク最小化により音声デクリッピングを行う手法を提案している。

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } \text{Rank}(Y) \\ & \text{s.t. } Y_{i,j} = Y_{i,j}^{(0)} \text{ for } (i,j) \in \Omega, \\ & Y \in \mathcal{H} \end{aligned} \quad (3.17)$$

ただし、 \mathcal{H} はハンケル行列の集合を示す。また、 Ω は出力信号のハンケル行列の Y に関して既知の観測信号を示す添字集合とし、また $Y^{(0)}$ は欠損を含む全ての観測信号のハンケル行列を示す。また音声の部分欠損修復問題のうちより厳しい制約が設けられる音声デクリッピング問題 (3.13) は、問題 (3.17) 同様に以下のように定式化される。

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } \text{Rank}(Y) \\ & \text{s.t. } X \in \mathcal{H} \cap \mathcal{I}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

ただし $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}^{M \times N}$ は

$$\mathcal{I} = \left\{ X \in \mathbb{R}^{M \times N} \left| \begin{array}{l} Y_{i,j} \leq C \text{ for } (i,j) \in \Theta^+ \\ Y_{i,j} \geq -C \text{ for } (i,j) \in \Theta^- \\ Y_{i,j} = Y_{i,j}^{(0)} \text{ for } (i,j) \notin \Theta^+ \cup \Theta^- \end{array} \right. \right\}, \quad (3.19)$$

とし, また Θ^+, Θ^- は観測信号のハンケル行列 \bar{Y} とクリッピングレベル C に関して $\Theta^+ = \{(i, j) \mid Y_{i,j}^{(0)} = C\}$, $\Theta^- = \{(i, j) \mid Y_{i,j}^{(0)} = -C\}$ とする添字集合とする. 本論文では以下音声デクリッピング問題を問題 (3.18) ならびにその近似解を得るための問題として取り扱い, 次項では問題 (3.18) 近似解法として先行研究である NSAO 法 [4] に基づく音声デクリッピング手法について説明する.

しかしながら図 3.3 が示すように, 音声信号全体における任意の区間には複数の音素が含まれる場合があり, このような場合においては単一のモデルを仮定することは不適當である. かつて音声認識等では前処理として, 与えられた音声信号を予め音素毎に適切にセグメンテーションを行うことで認識精度の向上を行っていたが, デクリッピング問題のような音声欠損修復においてはセグメンテーションの対象となる音声信号に歪みが発生しているために予め適切にフレーム分割することは困難である. そのため本論文ではこのフレーム分割を適切に行いながら音声デクリッピングを行う手法を提案する.

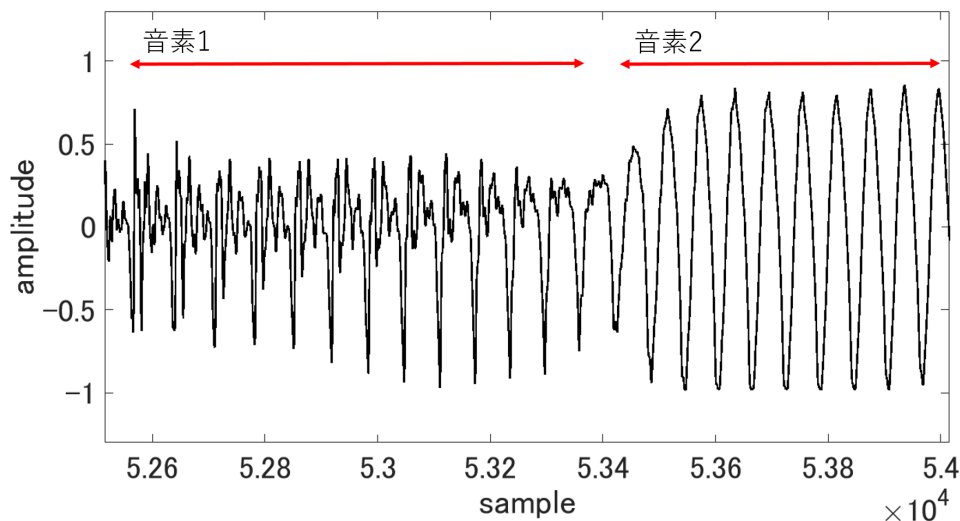


図 3.3: 1 フレーム中に 2 つの音節が含まれる例

はじめに, 1 フレーム中の音声信号 y_t について, 本節では短時間区間における音声信号のモデルが, 異なるサブモデルで構成されることを示す以下の Switched

AR モデルであると仮定する.

$$y_t = \sum_{k=1}^{r(\lambda_t)} a_k(\lambda_t) y_{t-k}, \quad (3.20)$$

ただし $\lambda_t \in \{1, 2, \dots, L\}$ はある時刻 t において用いられたサブモデルの番号とし, $r(\lambda)$ は λ 番目のサブモデルにおける AR 次数を示す. また λ 番目のサブモデルはある程度の時間区間 $[T_\lambda, T_{\lambda+1})$ の間変化していないと仮定し, 本論文では 1 フレーム中の音声信号のハンケル行列 $Y \in \mathcal{H} \subset \mathbb{R}^{M \times N}$ に関連し $T_{\lambda+1} - T_\lambda \geq N$ とおく. さらに各サブモデルにおける AR 次数の最大次数 r に関して $r \leq N$ とおくことで, これら仮定により各サブモデルが生成した音声信号のハンケル行列 $Y_{T_\lambda:T_{\lambda+1}-1}$ のランクは以下のように示される.

$$\text{Rank}(Y_{T_\lambda:T_{\lambda+1}-1}) = r(\lambda),$$

ただし,

$$Y_{T_\lambda:T_{\lambda+1}-1} = \begin{bmatrix} y_{T_\lambda} & y_{T_\lambda+1} & \cdots & y_{T_{\lambda+1}-T_\lambda-M} \\ y_{T_\lambda+1} & y_{T_\lambda+2} & \cdots & y_{T_{\lambda+1}-T_\lambda-M+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{T_\lambda+M-1} & y_{T_\lambda+M} & \cdots & y_{T_{\lambda+1}-1} \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

$$\in \mathbb{R}^{M \times (T_{\lambda+1} - T_\lambda - M)}$$

とする. また音声信号のハンケル行列 Y は式 (3.21) を用いれば以下のように近似出来る.

$$Y \approx \begin{bmatrix} Y_{T_1:T_2-1} & 0 & Y_{T_2:T_3-1} & 0 & \cdots & Y_{T_{L-1}:T_L-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

これら仮定から, 任意の区間における音声信号 Y のデクリッピング問題においては, Y をデータ行列とみなすことで前節で述べた SC に基づく行列補完問題として定式化することが出来る. そのため本論文では Switched AR モデルにより生成された音声信号のデクリッピング問題を, 以下の問題として定式化を行う.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && \sum_{l=1}^L \|Y D_l\|_{*,r_l} \\ & \text{s.t.} && D_l \in \mathcal{D} \text{ for } l = 1, 2, \dots, L. \\ & && \sum_{l=1}^L D_l = I \\ & && Y \in \mathcal{H} \cap \mathcal{I} \end{aligned} \quad (3.22)$$

この問題 (3.22) における変数 D_i は,

$$D_i X = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 0Y_{T_i:T_i-1} & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix},$$

となるように各サブモデルを同定するための列選択行列であり, 問題 (3.22) はこの変数 $\{D_l\}_{l=1}^L$ を求めながら同時に元の音声信号 Y に関して $Y \in \mathcal{H} \cap \mathcal{I}$ を満たすような行列 $\{y_t\}_{t=1}^T$ を推定する問題である. さらに本論文では2章で解説した切断核型ノルム最小化問題の緩和問題 (2.5) と同様に, 問題 (3.22) の緩和問題を以下に定式化する.

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & \sum_{l=1}^L \left\{ \gamma \|Z_l\|_{*,r_l} + \frac{1}{2} \|Z_l - Y D_l\|_F^2 \right\} \\ \text{s.t.} \quad & D_i \in \mathcal{D} \text{ for } i = 1, 2, \dots, L \\ & \sum_{l=1}^L D_l = I \\ & Y \in \mathcal{H} \cap \mathcal{I} \end{aligned} \quad (3.23)$$

同問題は前節で解説した SC に基づく複数の行列ランク総和最小化問題と同様であるため, 音声デクリッピング問題に対するアルゴリズムも前節同様の繰り返し手続きにより近似解を得る. 以上を踏まえ, Algorithm 2 に音声デクリッピング問題における提案アルゴリズムを示す. ただし, $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}: \mathbb{R}^{M \times N} \mapsto \mathbb{R}^{M \times N}$ は行列を \mathcal{I} 上に射影する線形演算子とし, $\mathcal{P}_{\mathcal{H}}: \mathbb{R}^{M \times N} \mathcal{H}$ は説明変数行列とのフロベニウスノルムが最も近いハンケル行列を得る関数とする.

3.5 数値実験

既存手法と Algorithm 2 の性能を比較するために数値実験を行う. ここで本実験内で用いる全ての音声信号 y_t は, 信号の最大値を $\max(|y_t|) = 1$ となるように正規化を行い, クリッピングレベル $C = 0.2, 0.3, \dots, 0.8$ を用いて人為的にクリッピングを生じさせた信号を与えてデクリッピングを行うものとする. 比較対象に用いた既存手法は, 提案手法と同じく部分空間法に基づく手法である NSAO 法に基づく手法 [5](NSAO), 信号のスペクトログラムスパース最適化に基づく手法である OMP 法による手法 [24](OMP) ならびに同最適化問題を l_1 最小化問題として解を与える手法 [25](PEW) の3つを用いる. デクリッピング精度は SNR による定量評

Algorithm 2 Audio inpainting algorithm based on multiple rank minimization

Input: $Y^{(0)}, \mathcal{I}, \{D_l\}_{l=1}^L, \alpha, \alpha_{min}, \eta_\alpha, \lambda, \tau, \epsilon, t_{max}$

```

1:  $t \leftarrow 0$ 
2:  $X \leftarrow Y^{(0)}$ 
3: repeat
4:    $X^{old} \leftarrow X$ 
5:    $\alpha \leftarrow \max(\alpha/\eta_\alpha, \alpha_{min})$ 
6:   for  $l = 1$  to  $L$  do
7:      $[U, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M, V] \leftarrow \text{svd}(XD_l)$ 
8:      $r_l \leftarrow \text{argmax } \sigma_r \text{ s.t. } \sigma_r \geq \alpha\sigma_1$ 
9:      $Z_l \leftarrow \mathcal{T}_{r_l, \lambda\sigma_{r_l}}^r(XD_l)$ 
10:  end for
11:  for  $l = 1$  to  $L$  do
12:     $(D_l)_{j,j} \leftarrow \frac{1}{L} \left( 1 - \sum_{k=1}^L \frac{\langle \mathbf{z}_j^{(k)}, \mathbf{x}_j \rangle}{\langle \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_j \rangle} \right) + \frac{\langle \mathbf{z}_j^{(l)}, \mathbf{x}_j \rangle}{\langle \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_j \rangle} - \tau$  for all  $j$ 
13:     $(D_l)_{j,j} \leftarrow \max(0, (D_l)_{j,j})$  for all  $j$ 
14:  end for
15:   $(D_l)_{j,j} \leftarrow (D_l)_{j,j} / \sum_{k=1}^L ((D_k)_{j,j})$  for all  $l, j$ 
16:   $X \leftarrow \left( \sum_{l=1}^L Z_l D_l \right) \left( \sum_{l=1}^L D_l^2 \right)^{-1}$ 
17:   $X \leftarrow \mathcal{P}_{\mathcal{I}}(X)$ 
18:   $t \leftarrow t + 1$ 
19: until  $\|X - X^{old}\|_F / \|X\|_F < \epsilon$  or  $t_{max} < t$ 
20:  $X \leftarrow \mathcal{P}_{\mathcal{H}}(X)$ 
Output:  $X$ 

```

価により比較し、各クリッピングレベルにおける SNR の改善量の平均により比較を行う。

本実験では修復対象とする信号は男女 5 話者ずつの計 10 種類の 16kHz の音声信号 (<http://small-project.eu/>) を用いる。また精度比較は 2 つ行い、1 つは各 10 種類の単一の音声信号とし、もう一方はそれら男女の音声の混声音声 5 種類とする。表 3.1 に本提案手法 (Algorithm 2) における設定パラメータを示す。また行

表 3.1: 計算条件

フレーム長	64ms ($M + N - 1 = 1024$)
オーバーラップ率	75%
ハンケル行列のサイズ	$Y \in R^{128 \times 897}$
ランク推定用係数	$\alpha = 1$
	$\alpha_{min} = 5.0 \times 10^{-3}$
	$\eta_\alpha = 1.01$
軟判定しきい値関数用係数	$\lambda = 1.0 \times 10^{-1}$
行選択行列推定用係数	$\tau = 1.0 \times 10^{-1}$
繰り返しにおける収束判定しきい値	$\epsilon = 10^{-5}$
繰り返し上限	$t_{max} = 3 \times 10^3$

選択行列 $\{D_l\}_{l=1}^L$ の初期値はガウス関数 $\mathcal{N}(j|\mu, \sigma^2)$ を用いて $(D_l)_{j,j} = \mathcal{N}(j|(2l-1)/2L, \sigma^2) / \sum_{k=1}^L \mathcal{N}(j|(2k-1)/2L, \sigma^2)$, とし, $\sigma = 10.0 \times N/2L$ とし, 観測信号のハンケル行列の初期値 $Y^{(0)}$ には前回までに逐次的に求めた解 (768 samples) をフレーム区間の前半に用い, 残りのフレーム区間 (256 samples) にはクリッピングされた信号を用いる。これら条件の下, 本提案手法は行選択行列の個数 L を $L = 1, 2, 3$ として 3 つ用い, 既存手法とともにそれぞれ較を行う。

本実験において精度比較に用いた評価量は以下に示される SNR[dB] とする。

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \frac{\|\mathbf{y}_{true} - \mathbf{y}_{clp}\|_2^2}{\|\mathbf{y}_{true} - \mathbf{y}_{est}\|_2^2}, \quad (3.24)$$

ただし $\mathbf{y}_{true}, \mathbf{y}_{clp}, \mathbf{y}_{est}$ はそれぞれ真の音声信号, クリッピングが生じた信号 (観測信号) および推定した信号を並べたベクトルとし, $\|\cdot\|_2$ はベクトルの l_2 ノルムとする。

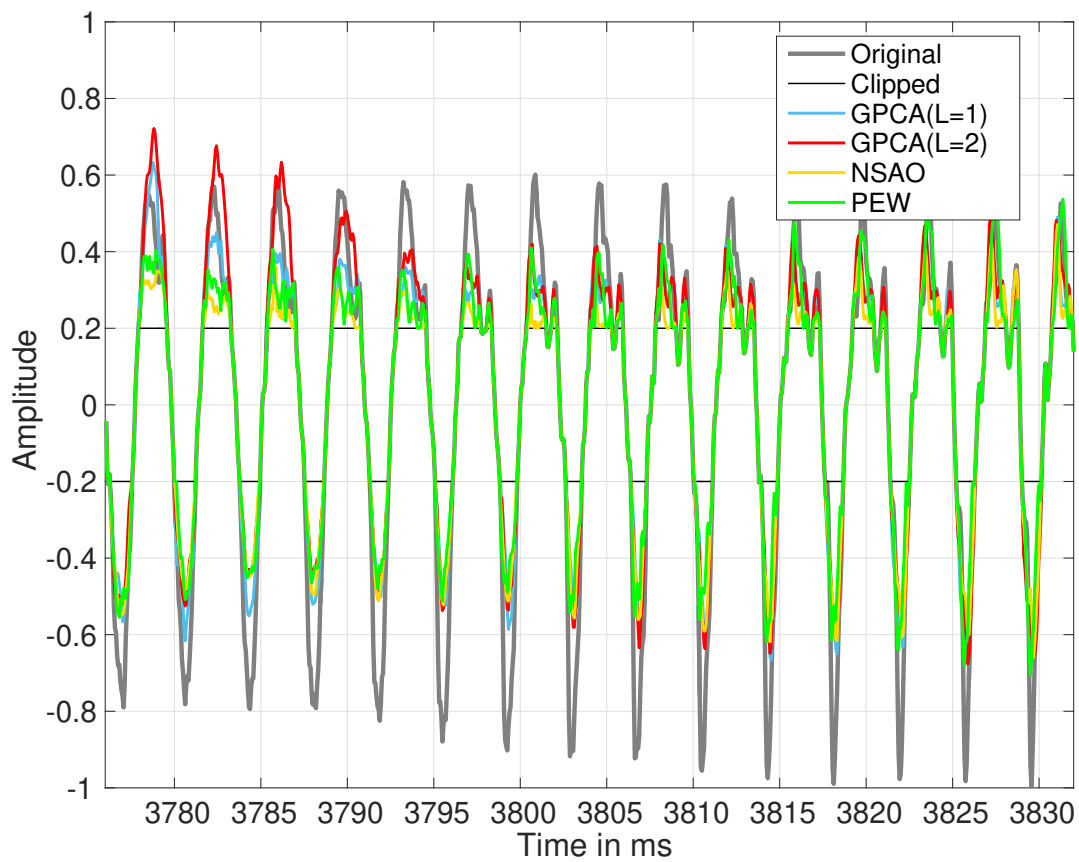
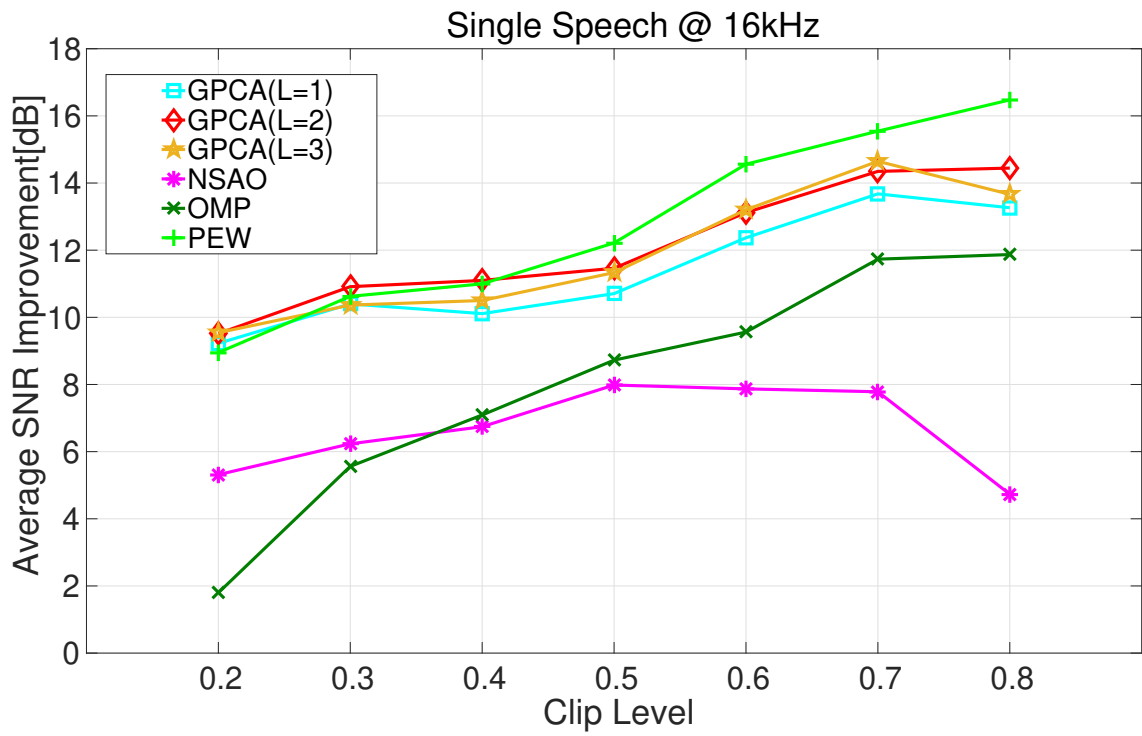


図 3.4: クリッピングレベル $C = 0.2$ における単一話者音声のデクリッピング結果

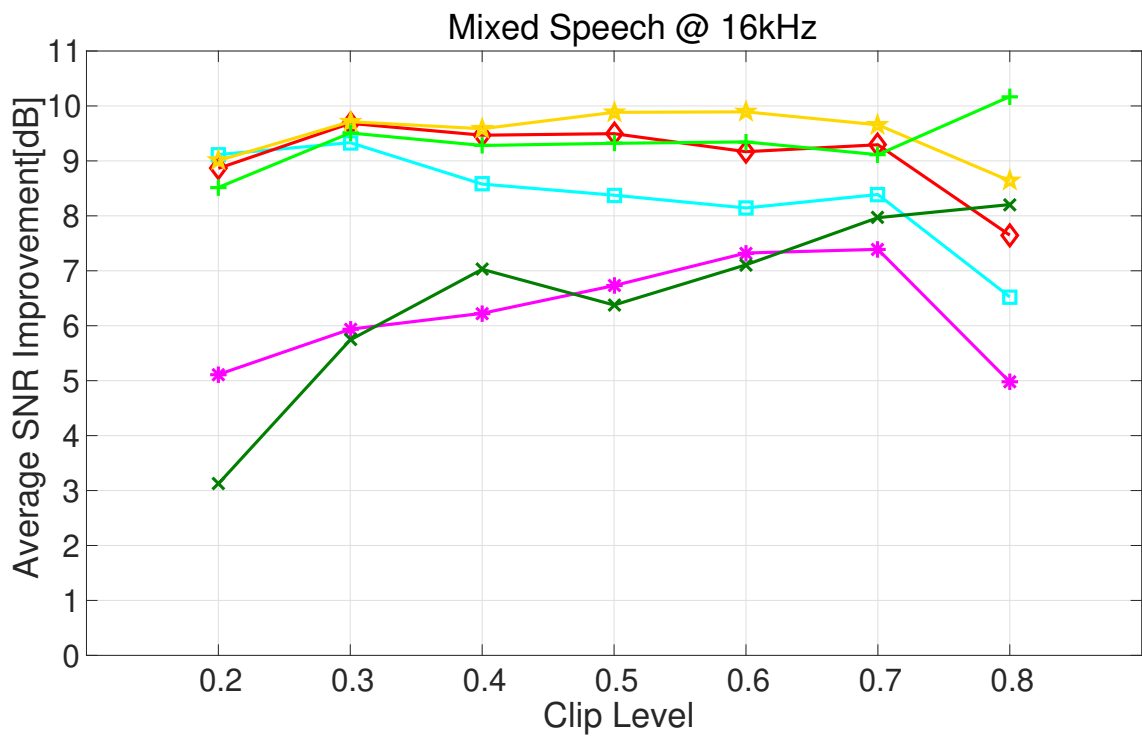
図 3.4 に修復結果の例を示す．本提案手法 (GPCA($L = 1$)) と従来法 (PEW) は 3795ms 以降で同程度の推定結果を示している．しかしながら Algorithm 2 における $L = 2$ による手法 (GPCA($L = 2$)) は 3795ms 以前とそれ以降のサブモデルで分割が行われるため，特に 3795ms 以前の推定結果は大きく異なる．このことは推定対象の信号区間に 2 つのサブモデルが現れる場合に本提案手法が有効であることを示している．

また，図 3.5 にデクリッピング精度比較として各手法による SNR[dB] の平均を示す．図 3.5(a) における単一話者音声，図 3.5(b) 混合話者音声ともに本提案手法は同じ部分空間法に基づく NSAO 法による修復手法よりも高い修復精度を示している．また図 3.5(a) が示す単一話者音声の修復において，提案手法は $L = 2$ のときにクリッピングレベル $C = 0.2, 0.3$ において音声信号のピリオドグラムスパース推定手法 (PEW) と比較して精度は勝っている．また図 3.5(b) が示す混合話者音声の修復において，提案手法は $L = 3$ のときにクリッピングレベル $0.2 \leq C \leq 0.7$ において同手法と比べて有効であることを示している．

続いて提案手法における行選択行列の個数 L による影響を示すために，図 3.6 に行選択行列の個数を変更した場合の修復精度を実験に用いた単一話者音声毎に示す．同図から，本実験で用いた音声のうち話者番号 10 を除く全ての音声において， $L = 2$ での手法は $L = 1$ と比べて有効であることがわかる．また図 3.6 に関して，図 3.7 に単一話者音声である話者番号 2(図 3.7(a))，7(図 3.7(b)) のピリオドグラムを示す．同図から，話者番号 7 は話者番号 2 と比べて各周波数に広く振幅を持つことがわかる．これに関して，図 3.6 が示すように $L = 3$ での手法は $L = 2$ と比較して，ピリオドグラムがスパースで無い音声信号に対し有効であることがわかる．混合話者音声のスペクトログラムは図 3.7 が示すようなスペクトログラムの和となるため，同様に各時刻におけるスペクトルがスパースになり難い．このことは先で述べた図 3.5(b) における本提案手法の有効性に関連し，混合話者音声における音声デクリッピング問題については提案手法における行選択行列の個数は $L = 3$ の方がより有効であることが確かめられた．



(a) 単一話者音声における SNR 平均 [dB]



(b) 混合話者音声における SNR 平均 [dB]

図 3.5: $C = 0.2, 0.3, \dots, 0.8$ におけるデクリッピング精度比較

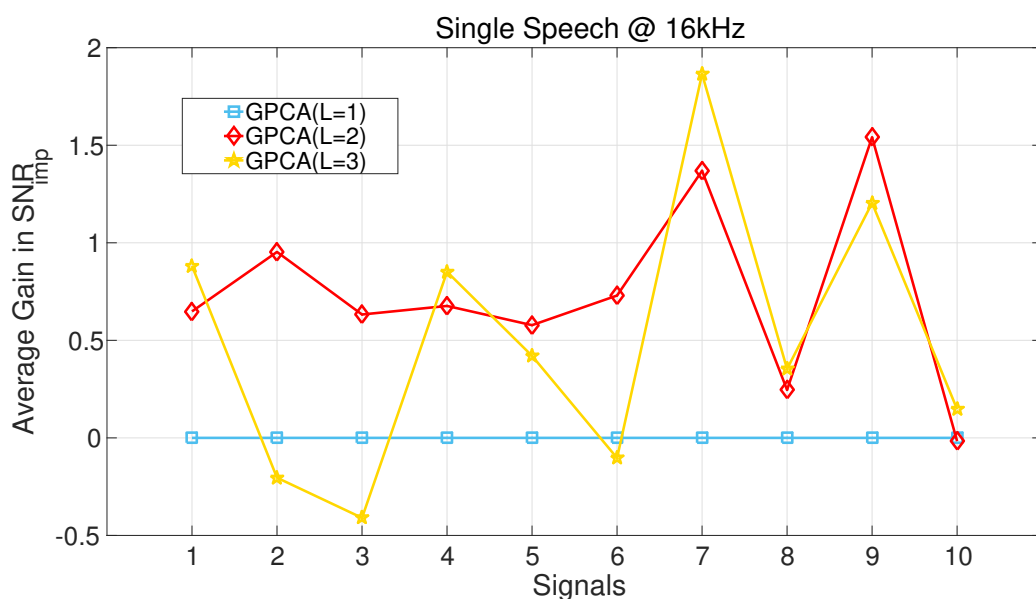
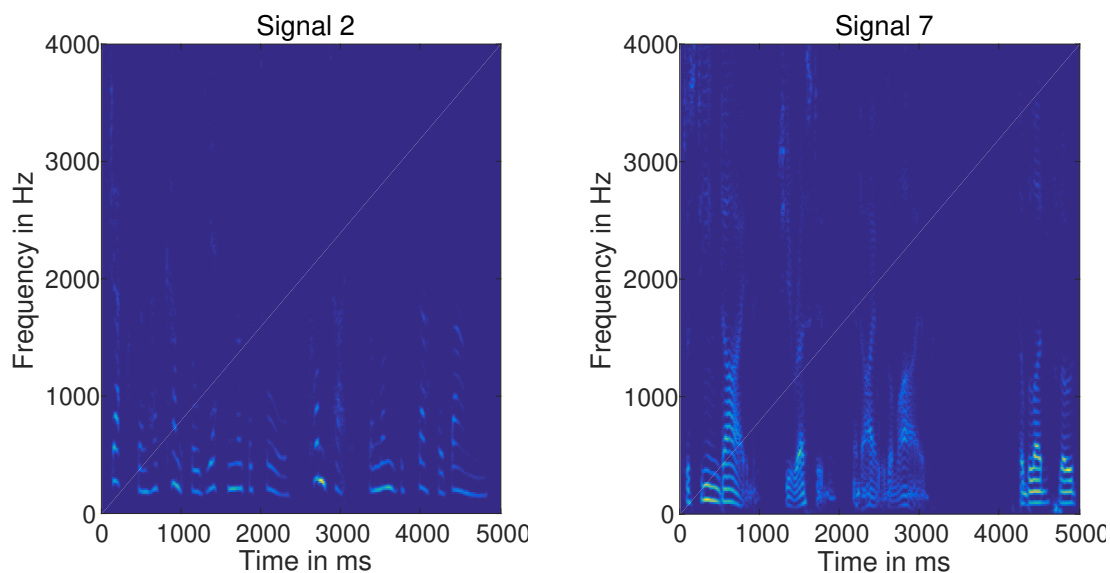


図 3.6: 各単一話者音声における提案手法 (GPCA) の行選択行列の個数 L による修復精度の差異 (提案手法における $L = 1$ を基準とした, $L = 2, 3$ における誤差改善比 SNR の各クリッピングレベル $C = 0.2, \dots, 0.8$ における平均 [dB])



(a) 話者番号 2 の音声信号のピリオドグラム

(b) 話者番号 7 の音声信号のピリオドグラム

図 3.7: 単一話者音声のピリオドグラム

3.6 まとめと今後の課題

本章では行列の各列ベクトルが UoS 上に存在する場合の行列補完問題について、SC と行列ランク最小化を組み合わせた新たな行列補完手法を提案した。本提案手法は従来の行列ランク最小化では推定精度が劣化してしまう恐れがある高ランク行列に対しても精度良く行列補完が行える手法である。同手法はさらに、音声デクリッピング応用のためのアルゴリズムへ拡張された。従来には音声信号の生成過程を AR モデルとみなし、音声信号のハンケル行列のランク最小化によりデクリッピングを行う手法が提案されているが、本研究では AR モデルを Switched AR モデルであると仮定し、ハンケル行列の各列が UoS に存在する場合の問題について SC とハンケル行列のランク最小化を組み合わせた手法を提案した。音声クリッピング修復問題に関して、数値実験により、提案手法は各時刻におけるスペクトログラムがより複雑となる複数話者の音声信号に対して有効であることが確かめられた。今後の課題として、行列補完問題において最適な分割数が未知の場合に対して、その分割数も同時に推定する方法が挙げられる。

第4章 行列ランク最小化に基づく低次元可微分多様体上での欠損値補完

本章では、推定対象の行列の各列ベクトルがDMに属する場合の行列補完問題について説明する。本章ははじめに、4.1節で同問題設定の定式化を行う。4.2節では、関連研究として、ある次元の多様体に属するベクトルを同じ次元の線形空間に写像(埋め込み)する方法論の1つとして良く用いられる手法である、局所線形埋め込み(Locally Linear Embedding : LLE)について解説し、本節におけるDM上の行列補完問題との関連について説明する。その後、4.3節では提案手法として、局所線形埋め込みに基づく行列補完手法について説明を行う。さらに、4.4節ではデジタル画像欠損補完問題の一種である文字インペイントについて従来法を交えて説明し、DM上の行列補完問題を応用した画像インペイントアルゴリズムを解説する。4.5節で数値実験により提案手法の有効性を示し、最後に、4.6節で提案手法におけるまとめと課題について総括する。

4.1 問題設定

本節では、行列 $X \in \mathbb{R}^{M \times N}$ の各列ベクトル $\mathbf{x}_n (n = 1, 2, \dots, N)$ がDMに属する場合の行列補完問題、すなわち、以下のような問題について議論する。

$$\begin{aligned} & \text{Find } X \\ & \text{subject to } x_{m,n} = x_{m,n}^0 \text{ for } (m,n) \in \Omega . \\ & \mathbf{x}_n \in \mathcal{M}_\psi \end{aligned} \tag{4.1}$$

ただし、 \mathbf{x}_n は行列 X の第 n 列目を示し、 \mathcal{M}_ψ は

$$\mathcal{M}_\psi = \{ \psi(\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^M \mid \mathbf{y} \in \mathbb{R}^r \} \tag{4.2}$$

で定義される DM を示し， $\psi(\cdot) : \mathbb{R}^r \mapsto \mathbb{R}^M$ は何らかの微分可能な同相写像， r は多様体の次元を示す．図 4.1 に，その例として 3 次元線形空間上の DM の概略図を示す．図 4.1 の例では， X の各列ベクトルが \mathcal{M}_ψ 上に存在している場合，その行列 X の行列ランクはほとんどの場合に 3 となる．同様にして，一般的には対象とする行列 X の各列ベクトルが DM 上に存在するとき，その行列ランクは高ランクになりやすく，第 2 章で解説している従来の行列補完法である低ランク行列を仮定した手法ではその推定精度が劣化しやすい．そのため，本章ではこの DM 上の行列補完問題において，多様体の局所的な領域に着目し，その領域を低次元線形空間で近似することを考え，局所的な行列ランク最小化により行列補完を行う手法を提案する．この関連研究として，次節では，DM 上のベクトル列 $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^N$ が与えられた場合に，同じ次元の線形空間に埋め込む手法として良く用いられる LLE について解説する．

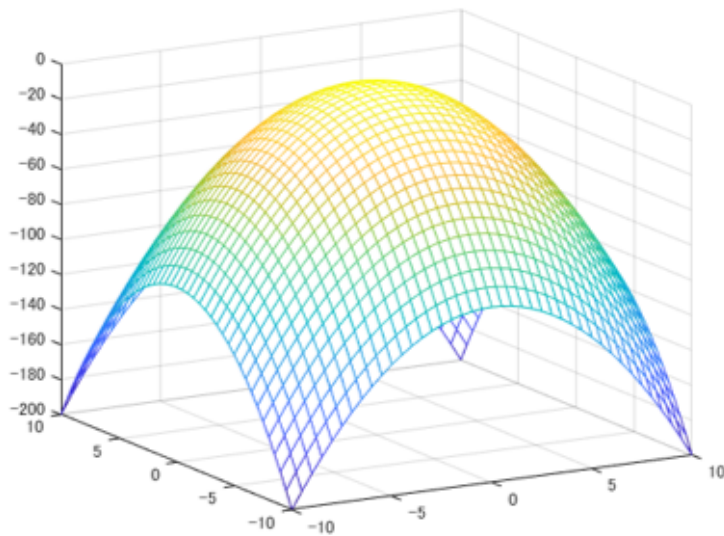


図 4.1: 3 次元線形空間上の DM の例 (2 次元多様体)

4.2 局所線形埋め込みに基づく多様体学習

本節では、多様体学習とその手法の1つであるLLE[14, 15]について説明する。

多様体学習とは、 \mathcal{M}_ψ と同じ次元の線形空間上での埋め込み表現 $\{\mathbf{y}_n = \psi^{-1}(\mathbf{x}_n)\}_{n=1}^N$ を得ることを目的とする。ただし、多様体学習において、 ψ は未知であり、かつ、 $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^N$ を r 次元線形空間上の $\{\mathbf{y}_n\}_{n=1}^N$ に写像できる ψ^{-1} は任意性を伴うが、多様体学習の目的は未知の ψ そのものを学習することではなく、多様体の次元 r を推定することと、 \mathbf{x}_n の近傍と \mathbf{y}_n の近傍の関係性を分析することにある。図4.2に多様体学習の概略図として、例として3次元空間に含まれる2次元多様体 (swiss roll) を2次元線形空間に写像することを示す。図4.2において、左図と右図の色の濃淡は、ユークリッド空間中の各点の位置関係を示しており、多様体学習においては同図のように元の空間中での距離に近いベクトル同士は埋め込み先においても距離が近くなることが理想である。

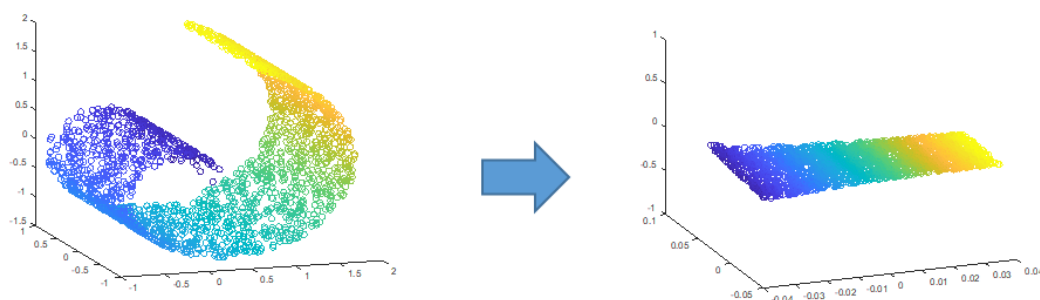


図 4.2: 3次元空間上の2次元多様体 (左図) と2次元埋め込み表現 (右図)

その多様体学習の手法の1つとしてよく用いられるLLEについて説明する。LLEの基本とする概念は、対象とする可微分多様体が局所的な領域に着目すれば線形空間に近似できるという考え方であり、ある低次元多様体 \mathcal{M}_ψ 上のデータ $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^N$ がその局所近傍データの線形結合で近似されるという考えに基づいて埋め込み表現を得る手法である。LLEは多様体の構成に関する考え方とそのアルゴリズムが非常に単純でありながら、多様体の埋め込み性能が高い手法であると知られている。

基本的なLLE [14]の手続きは以下の3つであり、この手順により埋め込み表現

$\{\mathbf{y}_n\}_{n=1}^N$ が得られる.

Step 1 各データ \mathbf{x}_n の近傍 $\mathcal{K}(n) \subset \{1, 2, \dots, N\}$ を取得

Step 2 各データの線形結合係数 (再構成重み) \mathbf{w}_n を $\mathcal{K}(n)$ により求める

Step 3 $\{\mathbf{w}_n\}_{n=1}^N$ を用いて低次元データ $\{\mathbf{y}_n \in \mathbb{R}^r\}_{n=1}^N$ を求める

このとき 2,3 の手続きではそれぞれ以下の式により $\{\mathbf{w}_n\}_{n=1}^N, \{\mathbf{y}_n\}_{n=1}^N$ を求める.

$$\mathbf{w}_n = \operatorname{argmin}_{\mathbf{1}_N^T \mathbf{w}_n = 1} \left\| \mathbf{x}_n - \sum_{j \in \mathcal{K}(n)} w_{n,j} \mathbf{x}_j \right\|_2^2, \quad (4.3)$$

$$\{\mathbf{y}_n\}_{n=1}^N = \operatorname{argmin}_{n=1}^N \left\| \mathbf{y}_n - \sum_{j \in \mathcal{K}(n)} w_{n,j} \mathbf{y}_j \right\|_2^2, \quad (4.4)$$

ただし, $\mathbf{1}_N \in \mathbb{R}^N$ は全ての要素が1のベクトルであり, 式(4.3)における制約は結合係数 w_i の要素の総和が1となることを示す.

式(4.3), (4.4)からも確認できるように, LLEは点 \mathbf{x}_n はその局所近傍 $\{\mathbf{x}_j\}_{j \in \mathcal{K}(n)}$ の線形結合で近似できることを表しており, 理想的には $\{\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_j\}_{j \in \mathcal{K}(n)}$ の張る空間の次元が r となることを表している. このLLEの考え方に基づき, 次節では行列の各列ベクトルの局所近傍を探索し, それらベクトルで構成される部分行列の行列ランク最小化により行列補完を行う手法を提案する.

4.3 局所線形空間の低次元化に基づく行列ランク最小化を用いた行列補完アルゴリズムの提案

本節では補完対象の行列 $X \in \mathbb{R}^{M \times N}$ の各列ベクトルがDM上に存在する場合の行列補完問題を扱う. 前節で述べたとおり, LLEの考え方に基づけば, 各列ベクトルとその局所近傍の張る空間の次元は多様体の次元 r に近似される. しかしながら, 多様体の次元は一般の応用において未知であるため, その次元も同時に推定しなければならない. そこで本論文では図(4.3)が示す提案手法の概略図のように, 各列ベクトルの局所近傍を探索し, 各局所近傍に対応する部分行列の行列ラ

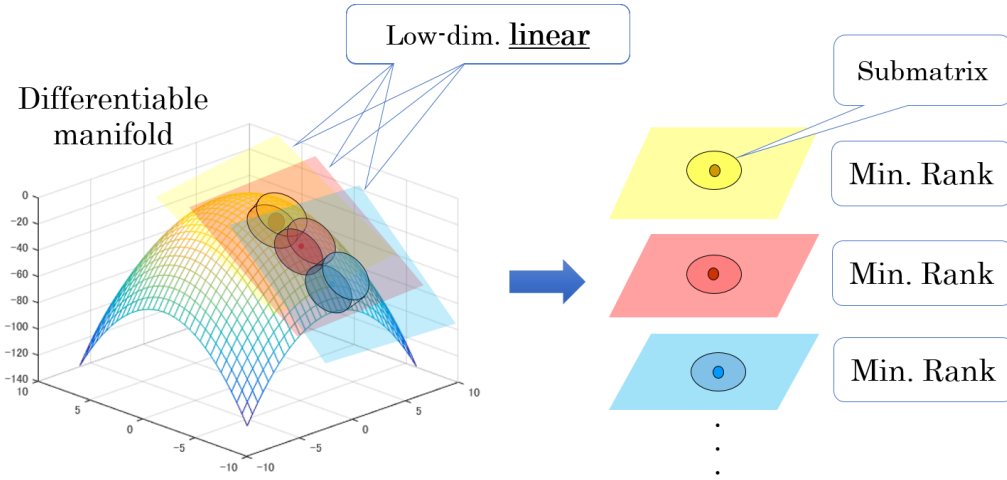


図 4.3: 局所線形空間の低次元化アルゴリズムの概要

ランク最小化を行うことで行列補完を達成することを考える。いま、各列ベクトルにおいて選択する近傍の個数を K とし、本節では以下の K 近傍の列ベクトルで構成される部分行列の切断核型ノルム総和最小化問題を議論する。

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimize} \quad \sum_{n=1}^N \left\{ \gamma \|Z_n\|_{*,r} + \frac{1}{2} \|XD_n - Z_n\|_F^2 \right\} \\
 & \text{s.t.} \quad (D_n)_{j,j} = c_{n,j} \quad \text{for } n = 1, 2, \dots, N \\
 & \quad \quad x_{m,n} = x_{m,n}^0 \quad \text{for } (m, n) \in \Omega
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

ただし、 $\epsilon > 0$ は正の実数定数とし、また、 $D_n \in \mathbb{R}^{N \times N}$ は3章と同様に列選択行列を示す対角行列とし、 $c_{n,j}$ は

$$c_{n,j} = \begin{cases} 1 & \text{if the } \mathbf{x}_j \text{ is } K \text{ nearest neighborhood of } \mathbf{x}_n \\ 0 & \text{if the } \mathbf{x}_j \text{ is not } K \text{ nearest neighborhood of } \mathbf{x}_n \end{cases} \tag{4.6}$$

と定義される。このとき、問題 (4.5) における制約条件のうち、 $(D_n)_{j,j} = c_{n,j}$ は D_n と X に関する非線形な従属関係を示す。同問題の最適解は未知の近傍関係を表す D_n に関する組み合わせ最適化と欠損要素を含む X の推定を同時に行わなければならないため、NP 困難である。そこで本論文ではヒューリスティックな解法として、Algorithm 3 に示される問題 (4.5) の解法を提案する。Algorithm 6 は推定途中の行列 X の各列ベクトルに対して局所近傍を探索し、その局所近傍で生成される行列 XD_n に対してなん判定しきい値関数 $\mathcal{T}_{r,\lambda}$ を用いて行列ランク最小化を繰

り返す手法である。同アルゴリズムは、更新前の行列 X^{old} と更新後の行列 X について $\|X - X^{old}\|_F / \|X\|_F < \varepsilon$ を満足するか、規定回数に達するまで繰り返し X の更新を行う手法である。

Algorithm 3 Local dimensionality reduction algorithm

Input: $X^0, \Omega, K, \lambda, \alpha_{min}, \eta_\alpha, t_{max}, \varepsilon$

- 1: $X \leftarrow X^0$
- 2: $t \leftarrow 0$
- 3: $\alpha \leftarrow 1$
- 4: **repeat**
- 5: $t \leftarrow 0$
- 6: $X^{old} \leftarrow X$
- 7: **for** $n = 1 : N$ **do**
- 8: generate diagonal matrix D such that the j th diagonal element is 1 if \mathbf{x}_j is in the K nearest neighbors of \mathbf{x}_n and 0 otherwise
- 9: $[U, \sigma_1, \dots, \sigma_M, V] \leftarrow \mathbf{svd}(XD)$
- 10: $r \leftarrow \operatorname{argmin} \sigma_r$ s.t. $\sigma_r \geq \alpha \sigma_1$
- 11: $\gamma \leftarrow \lambda \sigma_r$
- 12: $Z \leftarrow \mathcal{T}_{r, \gamma}(HD)$
- 13: $X \leftarrow \operatorname{argmin}_X \|XD - Z\|_F^2$
- 14: $x_{m,n} \leftarrow x_{m,n}^0$ for $(m, n) \in \Omega$
- 15: **end for**
- 16: **until** $\|X - X^{old}\|_F / \|X\|_F < \varepsilon$ or $t_{max} < t$

Output: X

4.4 画像インペイント応用のためのアルゴリズム

本節では、はじめに画像欠損修復問題である画像インペイントについて説明を行い、従来手法として行列ランク最小化を用いた画像インペイント手法について解説を行った後に前節で説明した行列ランク最小化を用いたDM上での欠損修復手法を同問題に適用した場合のアルゴリズムについて説明する。

画像インペイント問題は、各座標 $(m, n) \in \{1, \dots, M\} \times \{1, \dots, N\}$ に実数の

画素値を持つ行列 $X \in \mathbb{R}^{M \times N}$ を対象に、一般的に次のように定式化できる.

$$\begin{aligned} \text{Find } & X \\ \text{s.t. } & x_{m,n} = x_{m,n}^0 \text{ for } (m,n) \in \Omega, \end{aligned} \quad (4.7)$$

ただし、 Ω 全ての観測画素の座標を含む集合とし、 $x_{m,n}^0$ はその観測された画素値を示す. このとき、問題 (4.7) を解くためには何らかの指標が必要であるが、文献 [7, 6] では同問題を解くための指標として、対象とする画像 $x_{m,n}$ ($\hat{q} < m \leq M - \hat{q}$, $\hat{q} < n \leq N - \hat{q}$) が以下の 2 次元 AR モデルに従うと仮定している.

$$\sum_{\hat{m}=-\hat{q}}^{\hat{q}} \sum_{\hat{n}=-\hat{q}}^{\hat{q}} a_{\hat{m},\hat{n}} x_{m+\hat{m},n+\hat{n}} + d_{m,n} = 0, \quad (4.8)$$

ただし、 $a_{m,n}$ は AR 係数 ($a_{0,0} = 1$), \hat{q} はモデル次数を示し、 $d_{m,n}$ はモデル化誤差を示す. 式 (4.8) において、 $d_{m,n} = 0$ を満たし、かつ、 $\hat{q} \leq q$ を満たす q が存在するとき、以下に定義される行列のブロックハンケル行列 $\mathcal{H}(X) \in \mathbb{R}^{(2q+1)^2 \times (M-2q)(N-2q)}$ の行列ランクは $(2\hat{q} + 1)^2$ 以下であることが保証される.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(X) &= \\ & \begin{bmatrix} \mathcal{H}(\mathbf{x}_1) & \mathcal{H}(\mathbf{x}_2) & \cdots & \mathcal{H}(\mathbf{x}_{N-2q}) \\ \mathcal{H}(\mathbf{x}_2) & \mathcal{H}(\mathbf{x}_3) & \cdots & \mathcal{H}(\mathbf{x}_{N-2q+1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{H}(\mathbf{x}_{2q+1}) & \mathcal{H}(\mathbf{x}_{2q+2}) & \cdots & \mathcal{H}(\mathbf{x}_N) \end{bmatrix}, \\ \mathcal{H}(\mathbf{x}_n) &= \begin{bmatrix} x_{1,n} & x_{2,n} & \cdots & x_{M-2q,n} \\ x_{2,n} & x_{3,n} & \cdots & x_{M-2q+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{2q+1,n} & x_{2q+2,n} & \cdots & x_{M,n} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

なお、ブロックハンケル作用素 \mathcal{H} に関して、 $\mathcal{H}(X)$ の各列ベクトルは、画像のある小領域を意味するパッチ (パッチサイズ: $(2q+1) \times (2q+1)$) の画素値をベクトル化したものに等しいことに留意されたい. このことを踏まえれば、文献 [7] における式 (4.8) の仮定は、画像上の各座標におけるパッチはその周りのパッチの線形結合で表すことができることを示している. さらに、文献 [7] ではその結合されるパッチの個数が十分に少ない、すなわち、そのモデル次数 \hat{q} が定数 q よりも十分に小さいことを仮定することで、画像インペイント問題を以下の行列ランク最小

化に帰着させている.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } \text{Rank}(\mathcal{H}(X)) \\ & \text{s.t. } x_{m,n} = x_{m,n}^0 \text{ for } (m,n) \in \Omega \end{aligned} \quad (4.9)$$

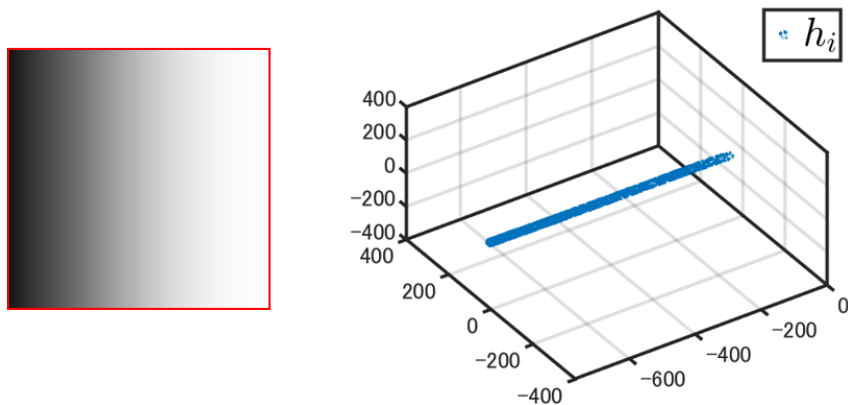


図 4.4: グラデーション画像 (左図) におけるブロックハンケル行列の各列ベクトルの 3次元射影散布図 (右図)

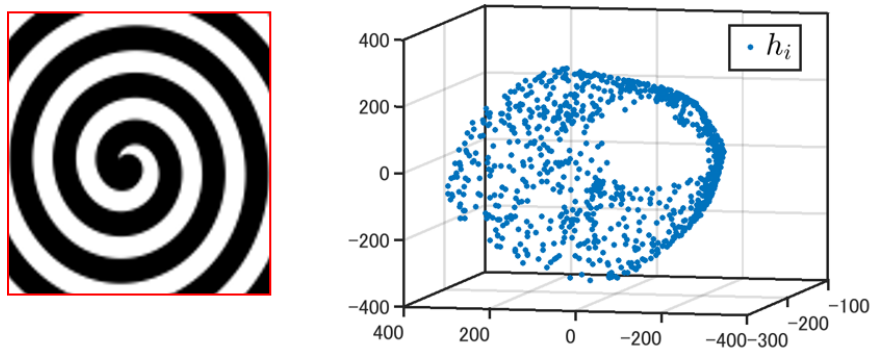


図 4.5: 渦巻き模様画像 (左図) におけるブロックハンケル行列の各列ベクトルの 3次元射影散布図 (右図)

しかしながら、実際のデジタル画像において、そのブロックハンケル行列の行列ランクが常に小さくなるとは限らず、その行列ランクが大きい場合には画像修復精度が劣化してしまう恐れがある。画像応用においてブロックハンケル行列の行列ランクのみに、画像 X のブロックハンケル行列 $\mathcal{H}(X)$ に関して、その行列ラ

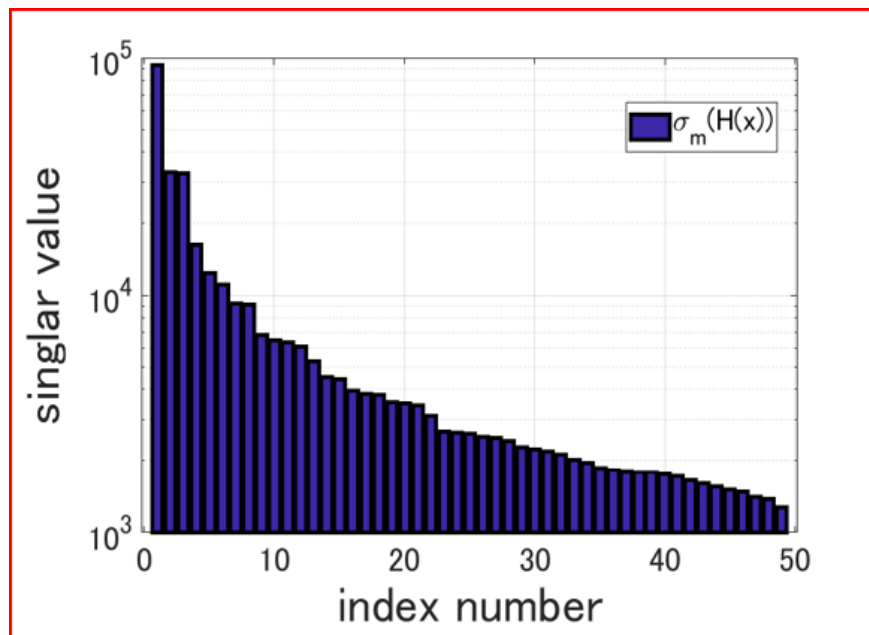


図 4.6: 渦巻き模様画像におけるブロックハンケル行列の特異値の分布

ンクが小さくなる例と小さくならない例を図 4.4, 4.5 に示す. 図 4.4, 4.5 において, 左図は用いたデジタル画像を示し, 右図は対応する画像のブロックハンケル行列の各列ベクトルにおける第 1-3 主成分の要素を 3 次元散布図として表示したものを示す. 図 4.4 の例では, その散布図から確認できるように, ブロックハンケルの各列ベクトルは 1 次元線形空間上に属する. これは, 用いた画像であるグラデーション画像の性質によるものであり, ある座標のパッチは左 (または右) 隣のスカラ倍で表示することが可能であることを示している. これに対して, 図 4.5 に用いた画像は, 図 4.4 と同様に単調なテクスチャ画像の 1 種である渦巻き模様の画像であるが, そのブロックハンケルの行列ランクは明らかに 3 以上であることが確認できる. また, その図 4.5 に用いた画像のブロックハンケル行列の行列ランクを示すために, そのブロックハンケル行列の特異値の分布を図 4.6 に示す. 同図から確認できるように, その第 1-第 49 特異値はすべて 0 ではなく, かつ, 第 1 特異値に対する第 49 特異値の比 (条件数) はおよそ 10^2 程度であり, 渦巻き模様画像のブロックハンケル行列を低ランク行列とみなすことができないことが確認できる. このように, 一般の画像応用において, 渦巻き模様のような単純な画像であって

もそのブロックハンケル行列の行列ランクは小さくならないため、行列ランク最小化に基づくアルゴリズムでは高精度な画像修復を行えない可能性がある。しかし、図 4.5 の右図からも確認できるように、そのブロックハンケル行列の各列ベクトルの分布は限定的であり、それゆえに、本論文では画像インペイント応用において、画像 X のブロックハンケル行列 $\mathcal{H}(X)$ の各列ベクトルが DM 上に属すると仮定し、4.3 節で定式化した問題 (4.5) を以下の最適化問題に置き換え、その最適化により画像修復精度を向上させることを試みる。

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & \sum_{i=1}^{(M-2q)(N-2q)} \left\{ \gamma \|Z_i\|_{*,r} + \frac{1}{2} \|\mathcal{H}(X)D_i - Z_i\|_F^2 \right\} \\ \text{s.t.} \quad & (D_i)_{j,j} = c_{i,j} \text{ for } i = 1, 2, \dots, (M-2q)(N-2q) \\ & x_{m,n} = x_{m,n}^0 \text{ for } (m, n) \in \Omega \end{aligned} \quad (4.10)$$

また、問題 (4.10) のヒューリスティックな解法として、画像インペイント応用のためのアルゴリズムを Algorithm 4 に示す。ただし、 $O_{M,N} \in \mathbb{R}^{M \times N}$ はすべての要素が 0 の行列を示し、 $\mathcal{P}_\Omega : \mathbb{R}^{M \times N} \rightarrow \mathbb{R}^{M \times N}$ と $\mathcal{P}_\Omega^c : \mathbb{R}^{M \times N} \rightarrow \mathbb{R}^{M \times N}$ は

$$\begin{aligned} \{\mathcal{P}_\Omega(X)\}_{m,n} &= \begin{cases} x_{m,n} & : (m, n) \in \Omega \\ 0 & : (m, n) \notin \Omega \end{cases} \\ \mathcal{P}_\Omega^c(X) &= X - \mathcal{P}_\Omega(X) \end{aligned}$$

で定義される射影関数を示し、 $\mathcal{H}^* : \mathbb{R}^{(2q+1)^2 \times (M-2q)(N-2q)} \rightarrow \mathbb{R}^{M \times N}$ は

$$\mathcal{H}^*(Z) = \underset{X}{\operatorname{argmin}} \|Z - \mathcal{H}(X)\|_F^2$$

で定義される関数を示す。また、画像 X の行列サイズを $M \times N$ とした場合、そのブロックハンケル行列のサイズは $(2q+1)^2 \times (M-2q)(N-2q)$ であり、Algorithm 3 と同様にすべての列ベクトルに対して D_i を求めた場合、その近傍を判定するための距離の計算回数は、繰り返し構文内で $(M-2q)^2(N-2q)^2$ 回である。このため、例えば、 $M = 128, N = 128, q = 3$ の場合に要する計算回数は 221,533,456 回であり、近傍判定のための距離計算における計算時間が非常に大きくなる。この問題を回避するために、Algorithm 4 では画像上の座標について繰り返し構文を設け、12 行目である座標 (m, n) の座標近傍 $\mathcal{C} \leftarrow \{(\hat{m}, \hat{n}) \in \mathcal{I} \mid |\hat{m} - m| \leq Q, |\hat{n} - n| \leq Q\}$ を求め、13 行目でその座標近傍に対応するブロックハンケル行列の列添字集合を

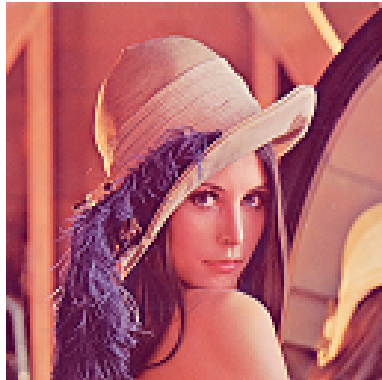
求め、その添字集合で近傍判定のための距離計算を行うことでその計算時間を短縮している。ただし、 Q は画像上の座標における近傍探索範囲の最大幅を示す。これにより、例えば、 $M = 128, N = 128, q = 3, Q = 32$ とした場合、近傍判定のための距離計算回数は 62,884,900 回であり、上述の例と比べて約 3 分の 1 回の計算回数で近傍を探索できる。

Algorithm 4 Local dimensionality reduction algorithm for image inpainting

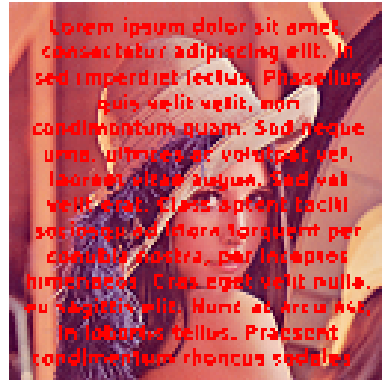
Input: $X^0, \Omega, q, K, Q, \lambda, \alpha_{min}, \eta_\alpha, t_{max}, \varepsilon$

- 1: $X \leftarrow X^0$
- 2: $t \leftarrow 0$
- 3: $\alpha \leftarrow 1$
- 4: $P_\Omega \leftarrow \mathcal{H}(\mathcal{P}_\Omega(O_{M,N}))$
- 5: $H_\Omega \leftarrow \mathcal{H}(\mathcal{P}_\Omega(x))$
- 6: **repeat**
- 7: $t \leftarrow 0$
- 8: $H \leftarrow \mathcal{H}(X)$
- 9: $H^{old} \leftarrow H$
- 10: **for** $(m, n) \in \{1, \dots, M-2q\} \times \{1, \dots, N-2q\}$ **do**
- 11: $i \leftarrow m + (M-2q)(n-1)$
- 12: $\mathcal{C} \leftarrow \{(\hat{m}, \hat{n}) \in \mathcal{I} \mid |\hat{m}-m| \leq Q, |\hat{n}-n| \leq Q\}$
- 13: $\mathcal{J} \leftarrow \{j \mid j = \hat{m} + (M-2q)(\hat{n}-1), (\hat{m}, \hat{n}) \in \mathcal{C}\}$
- 14: generate diagonal matrix D such that the j th diagonal element is 1 if \mathbf{h}_j is in the K nearest neighbors of \mathbf{h}_i for $j \in \mathcal{J}$ and 0 otherwise
- 15: $[U, \sigma_1, \dots, \sigma_{(2q+1)^2}, V] \leftarrow \mathbf{svd}(HD)$
- 16: $r \leftarrow \operatorname{argmin}_r \sigma_r$ s.t. $\sigma_r \geq \alpha \sigma_1$
- 17: $\gamma \leftarrow \lambda \sigma_r^r$
- 18: $Z \leftarrow \mathcal{T}_{r,\gamma}(HD)$
- 19: $H \leftarrow \operatorname{argmin}_H \|HD - Z\|_F^2$
- 20: $H \leftarrow H_\Omega + H - H \odot P_\Omega$
- 21: **end for**
- 22: $X \leftarrow \mathcal{H}^*(H)$
- 23: **until** $\|H - H^{old}\|_F / \|H\|_F < \varepsilon$ or $t_{max} < t$

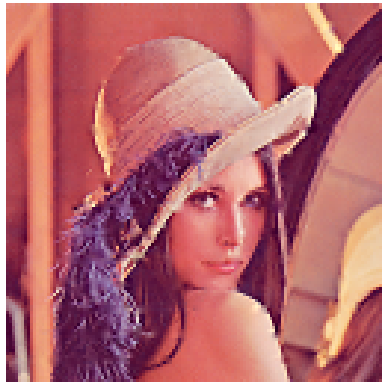
Output: X



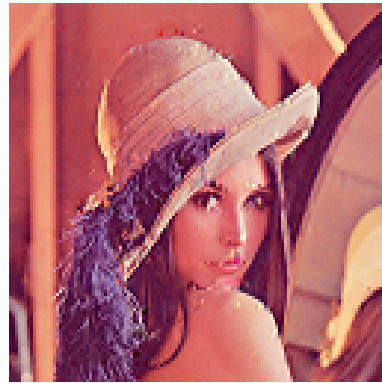
(a)



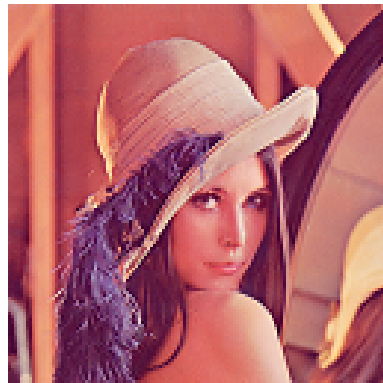
(b)



(c)

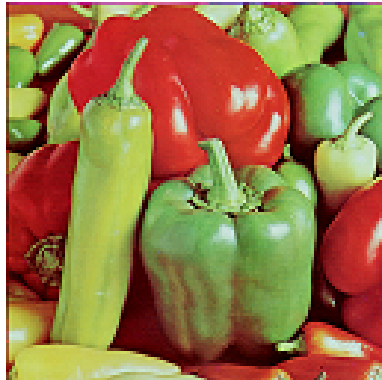


(d)



(e)

図 4.7: テスト画像 (Lenna) の欠損修復結果: (a) 元画像, (b) 観測画像, (c) higher-order [26] による修復結果, (d) NSAO [7] による修復結果, (e) 提案手法による修復結果.



(a)



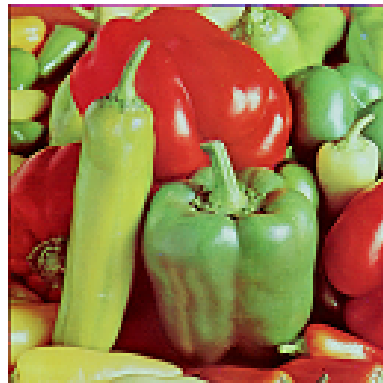
(b)



(c)

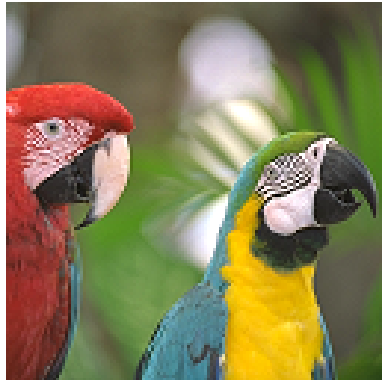


(d)

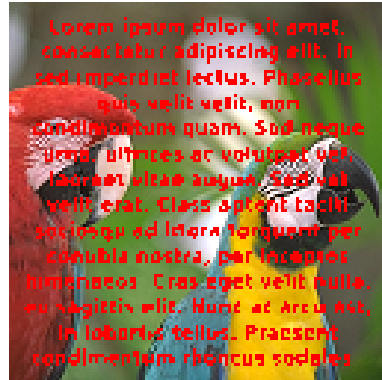


(e)

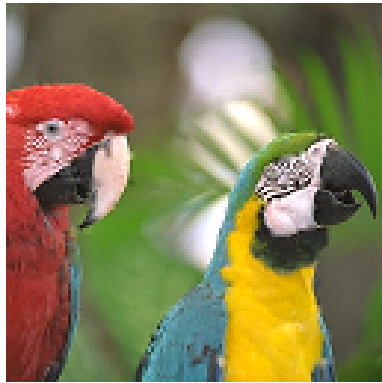
図 4.8: テスト画像 (Pepper) の欠損修復結果: (a) 元画像, (b) 観測画像, (c) higher-order [26] による修復結果, (d) NSAO [7] による修復結果, (e) 提案手法による修復結果.



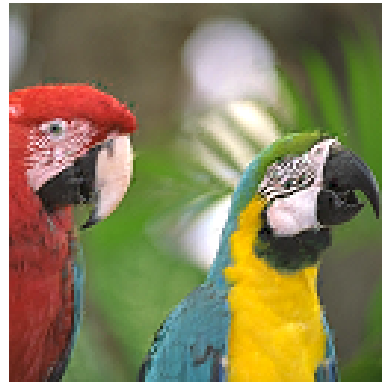
(a)



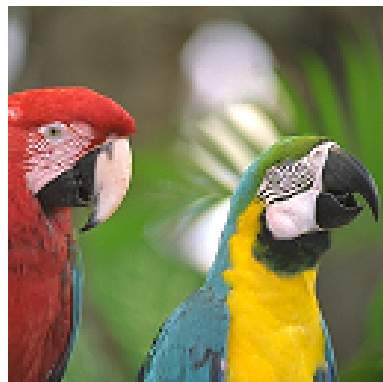
(b)



(c)



(d)



(e)

図 4.9: テスト画像 (Parrots) の欠損修復: (a) 元画像, (b) 観測画像, (c) higher-order [26] による修復結果, (d) NSAO [7] による修復結果, (e) 提案手法による修復結果.

表 4.1: PSNR[dB] による客観評価

Images	higher-order [26]	NSAO [7]	proposed
Aerial	28.63	28.12	29.13
Parrots	29.43	29.07	31.59
Pepper	30.78	29.95	33.44
Sailboat	29.01	28.34	29.31
Airplane	28.05	27.03	29.46
Balloon	31.98	31.59	33.52
Couple	33.07	32.85	35.14
Earth	31.67	30.04	32.12
Girl	33.11	31.76	34.21
Lenna	29.47	28.76	32.43
Mandrill	26.87	26.96	28.48
Milkdrop	34.20	32.27	37.08

4.5 数値実験

本節では、提案手法の有効性を示すために、いくつかのテスト画像を用いて画像インペイントの1種である文字インペイントを行った。本実験は、CPUをCore i7 3.60 GHz、メモリを16 GBとする計算機において、MATLAB上で実施した。本実験に用いた画像は、デジタル画像処理分野でよく用いられる12枚の画像 (Aerial, Parrots, Pepper, Sailboat, Airplane, Balloon, Couple, Earth, Girl, Lenna, Mandrill, Milkdrop, すべての画像サイズは 128×128 ピクセルとする) を使用し、画像修復精度はPSNR[dB]による客観評価を用いて評価を行った。また、提案手法 (Algorithm 4) におけるパラメータは12枚のテスト画像におけるPSNRの平均が最も良くなる以下のパラメータを用いた。 $q=3$, $K=50$, $Q=32$, $\lambda=0.1$, $\varepsilon=1.0 \times 10^{-7}$, $\alpha_{min}=1.0 \times 10^{-3}$, $\eta_{\alpha}=10^{4/t_{max}}$, $t_{max}=20$ 。提案手法の有効性を示すために、本実験では画像の全変動 (Total Variation : TV) 最小化に基づく、高次TVによるインペイント手法 (high-order) [26] と、行列ランク最小化に基づくインペイント手法 (NSAO) [7] を用いて比較実験を行った。ただし、実験の公平性を考慮し、行列ランク最小化に基づくインペイント手法ではそのモデル化次数を $q=3$ として提案

手法と同じ値を用いた。

図 4.7, 4.8, 4.9 に各アルゴリズムの修復結果を示す。特に、図 4.7 において、高次 TV に基づく手法 (high-order) と従来の行列ランク最小化に基づく手法 (NSAO) の修復結果は人物の肩や顔に偽色が発生していることが確認できるが、提案手法ではそれら手法と比べて自然な修復が行えていることが確認できる。また、表 4.1 に修復画像ごとの PSNR を示す。表 4.1 の結果から、すべてのテスト画像において、提案手法の推定精度が高いことが確認できる。特に、従来の行列ランク最小化による画像修復手法と比べて、平均 2[dB] 以上の精度改善が行えたことから、提案手法の有効性が確かめられた。

4.6 まとめと今後の課題

本章では行列の各列ベクトルが DM 上に存在する場合の行列補完問題について、局所線形埋め込みと行列ランク最小化を組み合わせた新たな行列補完手法を提案した。本提案手法は、行列の各列ベクトルごとにユークリッド空間上で K 近傍の列ベクトルを探索し、その列ベクトルと K 近傍の列ベクトルで構成される部分行列の行列ランク最小化を繰り返すことにより欠損要素を推定する手法である。同手法はさらに、画像の欠損要素を推定する問題である画像インペイント応用のためのアルゴリズムへ拡張された。従来において、画像の画素値を要素に持つ行列のブロックハンケル行列の行列ランク最小化により欠損要素を推定する手法が提案されているが、実データを用いた画像応用では対象の行列ランクは低くなり難しく、推定精度が劣化しやすいといった課題があった。この問題点を回避するために、本論文ではそのブロックハンケル行列の各列ベクトルが次元の低い DM 上に属すると仮定し、上述の局所線形埋め込みと行列ランク最小化に基づくアルゴリズムを用いた画像修復手法を提案した。画像インペイントの 1 種である文字インペイントに関する数値実験では、実験に用いたすべての画像において、従来の行列ランク最小化による画像修復手法の推定精度と比べて提案手法の推定精度が向上したことから、提案手法の有効性が確認できた。提案アルゴリズムと従来の行列ランク最小化手法はどちらも行列の特異値分解を繰り返し行う必要があるが、従

来と比べて提案手法では特異値分解の回数が与えられた行列の列数倍必要となるため、特異値分解の回数を減らす方法の検討が今後の課題として挙げられる。

第5章 行列因子分解に基づく低次元 可微分多様体上での欠損値 補完

本章では、推定対象の行列の各列ベクトルがDMに属する場合の行列補完問題に関して、行列因子分解を用いた補完手法について説明する。本章ははじめに、5.1節で同問題設定の定式化を行う。同問題設定におけるDMの仮定に基づく制約条件は前章と同様であるため、5.2節では4.3節同様に、部分行列の低ランク性を考慮した、行列因子分解による行列補完法を提案する。その後、5.3節では推薦システムを実現するための方法論として良く用いられる協調フィルタリングとその定式化について説明し、協調フィルタリングのためのアルゴリズムについて解説する。5.4節で数値シミュレーションと実データによる数値実験により提案手法の有効性を示し、最後に、5.5節で提案手法におけるまとめと課題について総括する。

5.1 問題設定

本章では行列 $X \in \mathbb{R}^{M \times N}$ の行列補完問題を、2.3節で解説した行列因子分解を用いて解くことを考える。すなわち、以降の議論では真の行列 X が2つの行列 $P \in \mathbb{R}^{r \times M}$ と $Q \in \mathbb{R}^{r \times N}$ を用いて以下の式で表されると仮定する。

$$X = P^T Q + \Xi. \quad (\text{再掲 (2.17)})$$

ここで、 P, Q の各列ベクトルが低次元線形空間上に属するならば、2.3節で解説した低ランク行列近似に基づく行列補完問題である以下の問題

$$\text{Minimize} \quad \sum_{(m,n) \in \Omega} (x_{m,n}^0 - \hat{x}_{m,n})^2 + \lambda (\|p_m\|_2^2 + \|q_n\|_2^2). \quad (\text{再掲 (2.18)})$$

$$\hat{x}_{m,n} = \mathbf{p}_m^T \mathbf{q}_n \quad (\text{再掲 (2.19)})$$

を P, Q について解き, 未知の要素 $x_{m,n}$ の推定量を $\hat{x}_{m,n}$ として求めることで行列補完を達成することができる. 2.3 節でも述べたとおり, このような行列因子分解による行列補完は計算時間が短く, かつ, 計算に必要なメモリコストを削減できるといった利点があるため, 特に大規模行列に対する行列補完には適している.

しかしながら, このような行列因子分解による行列補完問題である式 (2.18), (2.22) に関連して, 実際の応用例では P, Q の各列ベクトルが張る空間の次元が低いことを保証できない場合がある. 特に, 大規模行列補完問題の最もたる例である協調フィルタリングにおいて扱われるデータは実データであるため, 推定対象の行列を少ない要素数で適切に行列因子分解を行うことは難しく, P, Q の各列ベクトルが張る空間の次元が大きくなりやすい. これを改善するために, Liu らはカーネル法を用いた行列因子分解による行列補完手法を提案している [27]. 同手法では, カーネル主成分分析に基づき [16], 予め与えられた辞書ベクトル $\{\mathbf{d}_j \in \mathbb{R}^m\}_{j=1}^k$ とカーネル関数 $K(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^r \mapsto \mathbb{R}$ が定める無限次元空間を $\mathcal{K} = \{\sum_{j=1}^r K(\cdot, \mathbf{d}_j) a_j \mid a_j \in \mathbb{R} \text{ for } j = 1, 2, \dots, r\}$ と定義し, 各 $\mathbf{p}_m, \mathbf{q}_n$ を \mathcal{K} に属するように推定する手法である. この考えは多様体学習に基づくものであり, これにより P, Q の各列ベクトルが DM 上に属している場合にも適切な推定を可能としている. 文献 [27] は従来の行列因子分解と比べ, より高い精度で行列補完を行っている. しかしながら, 一般の行列補完問題において空間 \mathcal{K} は未知であるため, カーネル関数, ならびに辞書ベクトルをその制約条件として適切に設計することは難しく, 修復精度がカーネル関数や辞書ベクトルの次数に依存することが示されている [27]. そこで本論文では, 多様体に対して明示的なモデルを与えず, 第 4 章で解説した一般的な DM の構造に着目した行列因子分解による行列補完アルゴリズムを提案する.

以上を踏まえ, 式 (2.17) により得られる各 $\mathbf{p}_m, \mathbf{q}_n$ が一般的な DM 上に存在すると仮定した場合の行列補完問題に関して, 本章では以下の最適化問題を議論する.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && \sum_{(m,n) \in \Omega} (x_{m,n}^0 - \hat{x}_{m,n})^2 + \lambda (\|\mathbf{p}_m\|_2^2 + \|\mathbf{q}_n\|_2^2) \\ & \text{s.t.} && \mathbf{p}_m \in \mathcal{M}_\psi \text{ for } m = 1, \dots, M \\ & && \mathbf{q}_n \in \mathcal{M}_\psi \text{ for } n = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\mathcal{M}_\psi = \{\psi(\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^r \mid \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\tilde{r}}\}. \quad (\text{再掲 (4.2)})$$

ただし、前章と同様に、 $\psi(\cdot) : \mathbb{R}^{\tilde{r}} \mapsto \mathbb{R}^r$ は何らかの微分可能な同相写像、 \tilde{r} は多様体の次元、 r は多様体 \mathcal{M}_ψ を含む線形空間の次元を示す。

5.2 局所線形空間の低次元化に基づく行列因子分解を用いた行列補完アルゴリズムの提案

本節では 4.3 節同様に、局所線形空間の次元に着目した行列補完手法について述べる。

はじめに、多様体の構造について、式 (4.2) が示す DM に含まれる局所的な集合に着目して説明を行う。いま、多様体 \mathcal{M}_ψ は r 次元多様体であるため、ある K 個の要素を持つベクトル集合 $\{\mathbf{x}_k \in \mathcal{M}_\psi\}_{k=1}^K$ の各 \mathbf{x}_k において、そのベクトル集合から \mathbf{x}_k とユークリッド距離の十分に小さいものを選べば、選ばれた各ベクトルは r 次元線型部分空間上のベクトルで近似可能となる。このことをより厳密に定義する。

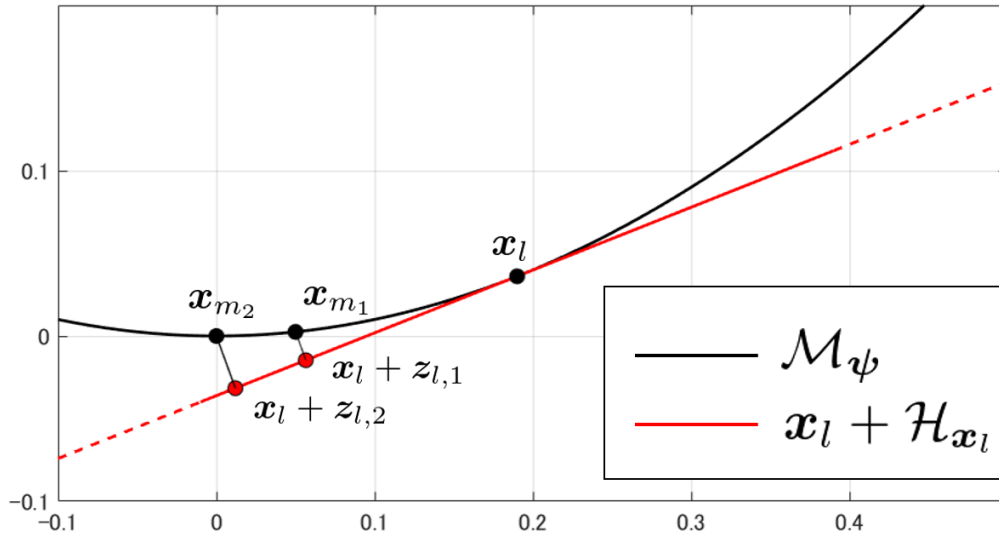


図 5.1: $\mathbf{x} = \psi(\mathbf{y}) = [y \ y^2]^T$ による、1次元多様体の局所的な線形化の例

いま、ベクトル集合 $\{\mathbf{x}_k \in \mathcal{M}_\psi\}_{k=1}^K$ 上の各点 \mathbf{x}_k において、 $\|\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_k\|_2^2$ が最も小

さな L 個のベクトルを選び，以下のような行列を生成する．

$$S(\mathbf{x}_k) = [\mathbf{x}_{l_1} - \mathbf{x}_k \quad \mathbf{x}_{l_2} - \mathbf{x}_k \quad \cdots \quad \mathbf{x}_{l_L} - \mathbf{x}_k] \in \mathbb{R}^{r \times L} \quad (5.2)$$

ただし $\{l_j\}_{j=1}^L$ は $\|\mathbf{x}_{l_1} - \mathbf{x}_k\|_2^2 \leq \|\mathbf{x}_{l_2} - \mathbf{x}_k\|_2^2 \leq \cdots$ を満たす正の整数とし， L は $\tilde{r} < L \leq K$ を満たす正の自然数とする．このとき，以下に定義される集合 $\mathcal{H}_{\mathbf{x}_k}$ 上で $\|\mathbf{x}_{l_j} - \mathbf{x}_k - \mathbf{z}_{k,j}\|_2^2$ を最小にする点 $\mathbf{z}_{k,j}$ を求めることによって，点 \mathbf{x}_k で多様体 \mathcal{M}_ψ に接する超平面上に $(\mathbf{x}_{l_j} - \mathbf{x}_k)$ を射影した点 $\mathbf{z}_{k,j}$ を求めることができる．

$$\mathcal{H}_{\mathbf{x}_k} = \{J(\mathbf{x})\Delta\mathbf{y} \in \mathbb{R}^r \mid \Delta\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\tilde{r}}, \|\Delta\mathbf{y}\|_2^2 \leq \epsilon\}. \quad (5.3)$$

ただし ϵ は正の定数とし， $J(\mathbf{x})$ は点 $\mathbf{x} = \psi(\mathbf{y})$ における \mathbf{y} によるヤコビ行列とする．ある点で 1 次元多様体に接する超平面上に，その多様体上の点を射影する例を図 5.1 に示す．図 5.1 は，放物線が示す多様体の十分小さな領域に限定すれば，1 次元多様体の各点が局所的には 1 次元線形空間上の点に近似できることを示している．

この考えに基づいて，式 (5.1) を $\mathbf{p}_m, \mathbf{q}_n$ について解くことを考える．はじめに，式 (5.3) と同様に，各 $\mathbf{p}_m, \mathbf{q}_n \in \mathcal{M}_\psi$ 上で \mathcal{M}_ψ に接する超平面をそれぞれ $\mathcal{H}_{\mathbf{p}_m}, \mathcal{H}_{\mathbf{q}_n}$ とする．ここで，行列変数 $Z_m^P, Z_n^Q \in \mathbb{R}^{r \times L}$ を用意し，それら各列ベクトル $\mathbf{z}_{m,j}^P, \mathbf{z}_{n,j}^Q \in \mathbb{R}^r$ がすべての $m = 1, \dots, M, n = 1, \dots, N, j = 1, \dots, L$ について， $\mathbf{z}_{m,j}^P \in \mathcal{H}_{\mathbf{p}_m}, \mathbf{z}_{n,j}^Q \in \mathcal{H}_{\mathbf{q}_n}$ を満たすように行列補完を行う以下

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} \quad \sum_{(m,n) \in \Omega} (x_{m,n}^0 - \hat{x}_{m,n})^2 + \lambda (\|\mathbf{p}_m\|_2^2 + \|\mathbf{q}_n\|_2^2) \\ & \text{s.t.} \quad \begin{aligned} & \|Z_m^P - S^P(\mathbf{p}_m)\|_F^2 \leq \zeta \\ & \|Z_n^Q - S^Q(\mathbf{q}_n)\|_F^2 \leq \zeta \\ & \mathbf{z}_{m,j}^P \in \mathcal{H}_{\mathbf{p}_m}, \mathbf{z}_{n,j}^Q \in \mathcal{H}_{\mathbf{q}_n} \\ & \text{for } m = 1, 2, \dots, M, n = 1, 2, \dots, N, \\ & j = 1, 2, \dots, L \end{aligned} \end{aligned} \quad (5.4)$$

のように定式化することを試みる．ただし， ζ は正の定数， $S^P(\mathbf{p}_n), S^Q(\mathbf{q}_n)$ はそれぞれ式 (5.2) と同様に， P, Q の各列ベクトルから $\|\mathbf{p}_l - \mathbf{p}_m\|_2^2, \|\mathbf{q}_l - \mathbf{q}_n\|_2^2$ が小さいベクトルを順に結合した行列を示す．しかしながら，本論文において対象とする多様体は未知であり，式 (5.3) における $J(\mathbf{p}_m), J(\mathbf{q}_n)$ が未知であるため，最適

化問題において直接 $\mathcal{H}_{\mathbf{p}_m}, \mathcal{H}_{\mathbf{q}_n}$ を制約条件に用いることはできない。また、本論文で扱っている多様体は任意であり、その一般的な多様体に対して妥当性のある $\mathcal{H}_{\mathbf{p}_m}, \mathcal{H}_{\mathbf{q}_n}$ のモデル化を行うことはできない。それゆえに、低次元 DM の性質を考慮した制約条件として $\mathcal{H}_{\mathbf{p}_m}, \mathcal{H}_{\mathbf{q}_n}$ を用いることはできないため、本論文では代わりに $\mathbf{z}_{m,j}^P, \mathbf{z}_{n,j}^Q$ が多様体の点 $\mathbf{p}_m, \mathbf{q}_n$ で接する超平面上に属するような制約条件を考慮する。このとき、その超平面に関する既知の情報はその超平面が低次元であるという情報だけであるため、本論文は制約条件 $\mathbf{z}_{m,j}^P \in \mathcal{H}_{\mathbf{p}_m}, \mathbf{z}_{n,j}^Q \in \mathcal{H}_{\mathbf{q}_n}$ を制約条件 $\text{Rank}(Z_m^P) \leq \tilde{r}, \text{Rank}(Z_n^Q) \leq \tilde{r}$ に代替する。この制約条件を用いて、本論文では改めて、以下

$$\begin{aligned}
& \text{Minimize} && \sum_{(m,n) \in \Omega} (x_{m,n}^0 - \hat{x}_{m,n})^2 + \lambda (\|\mathbf{p}_m\|_2^2 + \|\mathbf{q}_n\|_2^2) \\
& \text{s.t.} && \text{Rank}(Z_m^P) \leq \tilde{r}, \|Z_m^P - S^P(\mathbf{p}_m)\|_F^2 \leq \zeta \\
& && \text{for } m = 1, 2, \dots, M \\
& && \text{Rank}(Z_n^Q) \leq \tilde{r}, \|Z_n^Q - S^Q(\mathbf{q}_n)\|_F^2 \leq \zeta \\
& && \text{for } n = 1, 2, \dots, N
\end{aligned} \tag{5.5}$$

のような行列補完問題を議論する。式 (5.5) の制約条件は P, Q の各列ベクトルが局所的に低次元線形近似されるように求めるための条件であり、これによって未知の低次元多様体 \mathcal{M}_ψ を推定すること無しに、低次元多様体に属する $\mathbf{p}_m, \mathbf{q}_n$ を推定することができる。しかしながら、式 (5.5) に関して、行列ランクに関する制約条件を満たすような最適化は困難であるため、以下

$$\begin{aligned}
& \text{Minimize} && \frac{1}{2} \sum_{(m,n) \in \Omega} \left\{ (x_{m,n}^0 - \hat{x}_{m,n})^2 + \lambda (\|\mathbf{p}_m\|_2^2 + \|\mathbf{q}_n\|_2^2) \right\} \\
& && + \alpha \lambda \|P\|_{\mathcal{M}} + \alpha \lambda \|Q\|_{\mathcal{M}}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

のような緩和問題として定式化する。ただし、 α は正の定数とする。また、 $\|X\|_{\mathcal{M}}$ は $X \in \mathbb{R}^{r \times K}$ に関して、

$$\|X\|_{\mathcal{M}} = \min_{\{Z_k^X\}_{k=1}^K} \sum_{k=1}^K \left\{ \gamma \|Z_k^X\|_{*,\tilde{r}} + \frac{1}{2} \|Z_k^X - S^X(\mathbf{x}_k)\|_F^2 \right\} \tag{5.7}$$

と定義する。ただし、 X は P, Q どちらかの行列変数を示し、 \mathbf{x}_k は X の第 k 列目を、 K は X の列数を示す。 $\|X\|_{*,\tilde{r}}$ は切断核型ノルム [12] を示し、大きい順に並べられた X の特異値に関して第 $\tilde{r} + 1$ 番目以降の特異値の総和で定義され、式 (5.7)

Algorithm 5 Matrix Factorization Algorithm via Manifold Learning

Input: $X^0, \Omega, \tilde{r}, r, L, \alpha, \gamma, \lambda, \mu_\lambda, \epsilon, t_{max}$

- 1: $\hat{X} \leftarrow X^0$
- 2: $[V_1, \Sigma, V_2] \leftarrow \text{svd}(\hat{X})$
- 3: $P \leftarrow (\Sigma_{1:r,1:r})^{\frac{1}{2}} \left\{ (V_1)_{:,1:r} \right\}^T$
- 4: $Q \leftarrow (\Sigma_{1:r,1:r})^{\frac{1}{2}} \left\{ (V_2)_{:,1:r} \right\}^T$
- 5: $t \leftarrow 0$
- 6: **repeat**
- 7: $X^{old} \leftarrow \hat{X}$
- 8: $\lambda \leftarrow \lambda / \mu_\lambda$
- 9: $P \leftarrow \text{Algorithm 6 } [P, Q, \hat{X}, \Omega, \tilde{r}, L, \alpha, \gamma, \lambda]$
- 10: $Q \leftarrow \text{Algorithm 6 } [Q, P, \hat{X}^T, \Omega^T, \tilde{r}, L, \alpha, \gamma, \lambda]$
- 11: $\hat{X} \leftarrow P^T Q$
- 12: $t \leftarrow t + 1$
- 13: **until** $t_{max} < t$ or $\|\hat{X} - X^{old}\|_F \leq \epsilon$

Output: \hat{X}

Algorithm 6 Columnwise Local Low Rank Algorithm

Input: $X, D, R, \Omega, \tilde{r}, L, \alpha, \gamma, \lambda$

- 1: **for all** column k of $X \in \mathbb{R}^{r \times K}$ **do**
- 2: Select $\{l_j\}_{j=1}^L$ satisfying $\|\mathbf{x}_{l_1} - \mathbf{x}_k\|_2^2 \leq \|\mathbf{x}_{l_2} - \mathbf{x}_k\|_2^2 \leq \dots$
- 3: $Z_k^X \leftarrow \mathcal{T}_{\tilde{r}, \gamma}(S^X(\mathbf{x}_k))$
- 4: **for** $j = 1$ to L **do**
- 5: $\mathbf{y} \leftarrow \alpha \lambda \mathbf{z}_{k,j}^X + \sum_{c \in \Omega_{l_j}} \mathbf{d}_c x_{l_j, c}$
- 6: $\mathbf{x}_{l_j} \leftarrow \left((\alpha + 1) \lambda E + \sum_{c \in \Omega_{l_j}} \mathbf{d}_c \mathbf{d}_c^T \right)^{-1} \mathbf{y}$
- 7: **end for**
- 8: **end for**

Output: X

における総和内の各項は行列ランク最小化のための目的関数に用いられる。そのため、式 (5.6) の最小化を行うことにより、各 $S^P(\mathbf{p}_m), S^Q(\mathbf{q}_n)$ が示す部分行列のランクを小さくしながら行列因子分解を行うことができ、式 (5.5) の近似解を得ることができる。

ここで同問題の解法として、式 (2.20)、ならびに切断核型ノルム最小化アルゴリズム (IPMS: Iterative Partial Matrix Shrinkage) [12] を組み合わせたアルゴリズムを Algorithm 5 に示す。Algorithm 5 と従来手法 [2, 23] の主な違いは Algorithm 5 の 9,10 行目における P, Q の推定方法である。従来手法では式 (2.18) における P, Q について交互最小二乗法または確率的勾配法に基づいて解を得るが、Algorithm 5 は各 $\mathbf{p}_m, \mathbf{q}_n$ について、各点の n 近傍が低次元線形空間に属するように最適化を行う。また、Algorithm 5 は $P, \{Z_m^P\}_{m=1}^M, Q, \{Z_n^Q\}_{n=1}^N$ について交互最適化を行う。いま、 $X = P, Z_k^X = Z_k^P$ として、Algorithm 5 の手順を説明する。Algorithm 5 ははじめに、サブルーチンである Algorithm 6 において、 \mathbf{x}_k の L 近傍を選択する。次に、近傍の添字を示す $\{l_j\}_{j=1}^L$ を用いて式 (5.2) により得られる部分行列 $S^X(\mathbf{x}_k)$ について $\|X\|_{\mathcal{M}}$ を最小にする Z_k^X をなん判定閾値関数 $\mathcal{T}_{\tilde{r}, \gamma}(\cdot)$ により求める。これにより、 $S^X(\mathbf{x}_k)$ に近似するランク \tilde{r} の行列、またはそれに近似する行列として行列 Z_k^X が求められる。その後、式 (5.7) における総和内第 2 項 $\|Z_k^X - S^X(\mathbf{x}_k)\|_F^2$ と、式 (5.6) の目的関数における総和に関わる項との和

$$\frac{1}{2} \|Z_k^X - S^X(\mathbf{x}_k)\|_F^2 + \frac{1}{2} \sum_{(m,n) \in \Omega} \left\{ \begin{array}{l} (x_{m,n}^0 - \hat{x}_{m,n})^2 + \\ \lambda \|\mathbf{x}_m\|_2^2 \end{array} \right\} \quad (5.8)$$

の最小化を各 \mathbf{x}_{l_j} について行う。Algorithm 5 はこれら手続きをすべての $k = 1, 2, \dots, M$ について行った後に、 Q に関しても $X = Q, Z_k^X = Z_k^Q$ として上記と同様の手続きを行う。以上の手続きにより、Algorithm 5 は式 (5.6) の近似解を得る。Algorithm 5 は 13 行目の判定条件のいずれかを満たすまで各パラメータの更新を繰り返す手法である。

5.3 協調フィルタリング応用のためのアルゴリズム

問題 (5.1) の近似解法を協調フィルタリングに応用することを考える. 2.3 節と同様に, はじめに協調フィルタリング固有の問題として, $\hat{x}_{m,n}$ にバイアス項を考慮した式 (2.21) に関しても式 (5.6) と同様に以下の問題を定義する.

$$\text{Minimize } \frac{1}{2} \sum_{(m,n) \in \Omega} \left\{ \begin{array}{l} (x_{m,n}^0 - \hat{x}_{m,n})^2 \\ + \lambda (\|\mathbf{p}_m\|_2^2 + \|\mathbf{q}_n\|_2^2) \\ + \lambda (b_m^2 + b_n^2) \end{array} \right\} + \alpha \lambda \|P\|_{\mathcal{M}} + \alpha \lambda \|Q\|_{\mathcal{M}}. \quad (5.9)$$

Algorithm 5 と同様に, 同問題の解法として, 式 (2.23) と IPMS アルゴリズムを

Algorithm 7 Matrix Factorization Algorithm via Manifold Learning for Collaborative Filtering

Input: $X^0, \Omega, \{w_{m,n}\}_{(m,n) \in \Omega}, \tilde{r}, L, \alpha, \gamma, \lambda, \eta, \mu_\eta, \epsilon, t_{max}$

- 1: Set \bar{w}_m as mean of $w_{m,n}$ for $m = 1, 2, \dots, M$
- 2: Set \bar{w}_n as mean of $w_{m,n}$ for $n = 1, 2, \dots, N$
- 3: $\hat{X} \leftarrow X^0$
- 4: $[V_1, \Sigma, V_2] \leftarrow \text{svd}(\hat{X})$
- 5: $P \leftarrow (\Sigma_{1:r, 1:r})^{\frac{1}{2}} \left\{ (V_1)_{:, 1:r} \right\}^T$
- 6: $Q \leftarrow (\Sigma_{1:r, 1:r})^{\frac{1}{2}} \left\{ (V_2)_{:, 1:r} \right\}^T$
- 7: $t \leftarrow 0$
- 8: **repeat**
- 9: $X^{old} \leftarrow \hat{X}$
- 10: $\eta \leftarrow \eta / \mu_\eta$
- 11: $\{\nabla_{\mathbf{p}_m} J^P\}_{m=1}^M \leftarrow \text{Algorithm 8 } [P, \tilde{r}, L, \gamma]$
- 12: $\{\nabla_{\mathbf{q}_n} J^Q\}_{n=1}^N \leftarrow \text{Algorithm 8 } [Q, \tilde{r}, L, \gamma]$
- 13: **for** $(m, n) \in \Omega$ **do**
- 14: $b_m \leftarrow b_m - \eta(\lambda \bar{w}_m b_m - e_{m,n} w_{m,n})$.
- 15: $b_n \leftarrow b_n - \eta(\lambda \bar{w}_n b_n - e_{m,n} w_{m,n})$.
- 16: $\mathbf{p}_m \leftarrow \mathbf{p}_m - \eta(\lambda \bar{w}_m \mathbf{p}_m - e_{m,n} w_{m,n} \mathbf{q}_n + \alpha \lambda \nabla_{\mathbf{p}_m} J^P)$
- 17: $\mathbf{q}_n \leftarrow \mathbf{q}_n - \eta(\lambda \bar{w}_n \mathbf{q}_n - e_{m,n} w_{m,n} \mathbf{p}_m + \alpha \lambda \nabla_{\mathbf{q}_n} J^Q)$
- 18: **end for**
- 19: $\hat{X} \leftarrow P^T Q$
- 20: $t \leftarrow t + 1$
- 21: **until** $t_{max} < t$ or $\|\hat{X} - X^{old}\|_F \leq \epsilon$

Output: \hat{X}

Algorithm 8 Locals Low Rank Gradient

Input: X, \tilde{r}, n, γ

- 1: **for all** column k of $X \in \mathbb{R}^{r \times K}$ **do**
- 2: Select $\{l_j\}_{j=1}^L$ satisfying $\|\mathbf{x}_{l_1} - \mathbf{x}_k\|_2^2 \leq \|\mathbf{x}_{l_2} - \mathbf{x}_k\|_2^2 \leq \dots$
- 3: $Z_k^X \leftarrow \mathcal{T}_{\tilde{r}, \gamma}(S^X(\mathbf{x}_k))$
- 4: $\nabla_{\mathbf{x}_k} J^X \leftarrow \sum_{j=1}^L (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{l_j} + \mathbf{z}_{k,j}^X)$
- 5: **end for**

Output: $\{\nabla_{\mathbf{x}_k} J^X\}_{k=1}^K$

組み合わせたアルゴリズムを Algorithm 7 に示す。Algorithm 7 と Algorithm 5 の異なる点は、式 (5.9) に用いたバイアスパラメータを推定する点、ならびに、逆行列を用いることによる計算コストを考慮して確率的勾配法を用いて近似解を推定する点である。従来手法 [23] との主な違いは Algorithm 7 の 11,12,16,17 行目による P, Q の推定方法である。Algorithm 5 と同様に、Algorithm 7 は、はじめにサブルーチンである Algorithm 8 により、各 \mathbf{p}_m の L 近傍を列ベクトルに持つ $S^P(\mathbf{p}_m)$ に近似する低ランクな行列 Z_m^P を求める。次に、 $J^P = \|Z_m^P - S^P(\mathbf{p}_m)\|_F^2$ の \mathbf{p}_m に関する勾配

$$\nabla_{\mathbf{p}_m} J^P = \sum_{j=1}^L (\mathbf{p}_m - \mathbf{p}_{l_j} + \mathbf{z}_{k,j}^P) \quad (5.10)$$

を求める (Q に関して同様)。その後、式 (2.23) が示す更新則に勾配 $\nabla_{\mathbf{p}_m} J^P, \nabla_{\mathbf{q}_n} J^Q$ を加えて文献 [23] と同様の更新を行う。これらの一連の手続きは Algorithm 5 と同様に、各 $S^P(\mathbf{p}_m), S^Q(\mathbf{q}_n)$ が示す部分行列のランクを小さくしながら行列因子分解を行うことができ、Algorithm 7 は式 (5.9) の近似解を得る。

5.4 数値実験

提案手法の有効性を確かめるために、本章でははじめに $R = P^T Q$ を理想的に満たす場合のシミュレーションデータについて行列補完問題の精度比較を行い、次項で実データである MovieLens データセットに対する定量評価を行う。本章における全ての実験は、Intel(R) Core(TM) i7-4790 CPU @ 3.60GHz をプロセッサとする汎用コンピュータを用い、MATLAB R2017b 上で実施された。

5.4.1 シミュレーションデータ

本節では各列ベクトルが低次元多様体に従う P, Q を用いて $R = P^T Q$ を満たす R の部分欠損修復問題について扱う。本節では DM を定める同相写像を、以下の o 次の多項式特徴写像 [28] とする。

$$\psi_o(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}^\alpha)_{|\alpha| \leq o} \in \mathbb{R}^{K_o}. \quad (5.11)$$

ただし $\alpha = [\alpha_1 \cdots \alpha_{\tilde{r}}]$ は非負の多重添字を示し、 \mathbf{x}^α は $\mathbf{x}^\alpha = \prod_{j=1}^{\tilde{r}} x_j^{\alpha_j}$ 、 $|\alpha|$ は $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{\tilde{r}}$ 、 K_o は $K_o = \binom{\tilde{r}+o}{o}$ とする。任意の係数ベクトル $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{K_o}$ と $\psi_o(\mathbf{x})$ の内積は \mathbf{x} の \tilde{r} 変量 o 次多項式を示す。シミュレーションデータ $X = P^T Q$ は

$$\begin{aligned} P &= A^P [\psi(\mathbf{y}_1^P) \psi(\mathbf{y}_2^P) \cdots \psi(\mathbf{y}_M^P)], \\ Q &= A^Q [\psi(\mathbf{y}_1^Q) \psi(\mathbf{y}_2^Q) \cdots \psi(\mathbf{y}_N^Q)] \end{aligned} \quad (5.12)$$

として生成した。ただし、 $A^P, A^Q \in \mathbb{R}^{K_o \times K_o}$ は各要素が $[-1 : 1]$ を定義域とする独立な一様分布に従う行列とし、 $\{\mathbf{y}_m^P \in \mathbb{R}^{\tilde{r}}\}_{m=1}^M, \{\mathbf{y}_n^Q \in \mathbb{R}^{\tilde{r}}\}_{n=1}^N$ も同様の一様分布により生成した。これにより、各 $\mathbf{p}_m, \mathbf{q}_n$ は \tilde{r} 変量 o 次多項式に従う。また、行列 X のサイズは $M = 1000, N = 2000$ とし、 P, Q の各列ベクトルが属する DM の次元は $\tilde{r} = 2, 3$ 、観測要素の添字集合 Ω は一様乱数により観測率 5% として生成した。

表 5.1: $\tilde{r} = 2, o \in \{9, 11, 13\}$ における各実験条件での $MSE[\text{dB}]$ 比較 (5 回平均)

o (5.11)	SVT	IPMS	MF	MKMF(max)	MFML(proposed)
9	1.71	8.80	19.57	21.37	31.45
11	1.83	10.33	18.71	20.03	27.52
13	1.54	8.80	16.87	17.60	23.54

表 5.2: $\tilde{r} = 3, o \in \{3, 5, 7\}$ における各実験条件での $MSE[\text{dB}]$ 比較 (5 回平均)

o (5.11)	SVT	IPMS	MF	MKMF(max)	MFML(proposed)
3	1.68	13.95	33.75	38.74	40.99
5	1.54	8.66	21.68	21.81	23.75
7	1.33	5.62	13.69	12.79	16.20

同モデルにおける行列補完精度の有効性を確かめるために、行列ランク最小化である核ノルム最小化 [9](Singular Value Thresholding, 以下 SVT と称する)、切

表 5.3: 各実験における平均計算時間 [s] 比較

SVT	IPMS	MF	MKMF(max)	MFML(proposed)
572.2	567.0	159.1	308.0	156.3

断核型ノルム最小化 [12](IPMS), 行列因子分解 (2.18)(Matrix Factorization, 以下 MF と称する), マルチカーネルを用いた行列因子分解法 [27](Multiple Kernelized Matrix Factorization, 以下 MKMF と称する), 提案手法 (5.6)(Matrix Factorization Algorithm via Manifold Learning, 以下 MFML と称する) の 5 つの手法で比較実験を行った. 従来手法 4 つの繰り返し最大回数 t_{max} は $t_{max} = 1000$ とし, 提案手法は $\mathbf{p}_m, \mathbf{q}_n$ の総更新回数が MF と同等になるように $t_{max} = 1000/n$ とし, また, 各手法の収束条件 $\|\hat{X} - X^{old}\|_F < \epsilon$ において, $\epsilon = 10^{-7}$ を用いた. IPMS は SVT を含むためアルゴリズムのパラメータは共通とし, 文献 [12] におけるパラメータを, $\delta_0 = 10^{-1}, \eta_\delta = 1, \alpha_0 = 1, \eta_\alpha = 10^{\frac{6}{t_{max}}}, \alpha_{min} = 0$ として用いた. 提案手法 MFML と MKMF は従来法である MF を含む (Algorithm 5 は $\alpha = 0$ のとき式 (2.20) に基づく更新則を繰り返す) ためパラメータは共通とし, Algorithm 5 におけるパラメータを, $r = 20, L = 20, \alpha = 1, \lambda = 1, \mu_\lambda = 10^{\frac{2}{t_{max}}}$ とし, \tilde{k} は真の \tilde{r} を用い, γ は $\mathcal{T}_{\tilde{r}, \gamma}$ が Hard Thresholding 関数となるように十分大きな値を用いた. また, MKMF に用いる辞書行列の次数 d は文献 [27] と同様に $d = 50, 100, \dots, 500$ を用い, 乱数により辞書行列を生成した.

これらの手法により推定された \hat{X} の定量評価として,

$$MSE = 20 \log_{10}(\|X\|_F / \|X - \hat{X}\|_F) \text{ [dB]} \quad (5.13)$$

を用いる.

実験結果を表 5.1, 5.2, 実験ごとの平均計算時間を表 5.3 に示す. 表 5.3 より, 提案手法は MF と同程度の計算時間であることが確かめられた. 表 5.1, 5.2 により, 提案手法は P, Q の各列ベクトルが未知の DM に属している場合であっても高い精度で行列補完を行えることが確かめられた. また, 表 5.1, 5.2 における MKMF の MSE は, 辞書行列の各次数のうち最大の修復精度であったものを示している. 辞書行列の各次数の変化に関して, $\tilde{k} = 2, o = 13$, ならびに, $\tilde{k} = 3, o = 7$ における

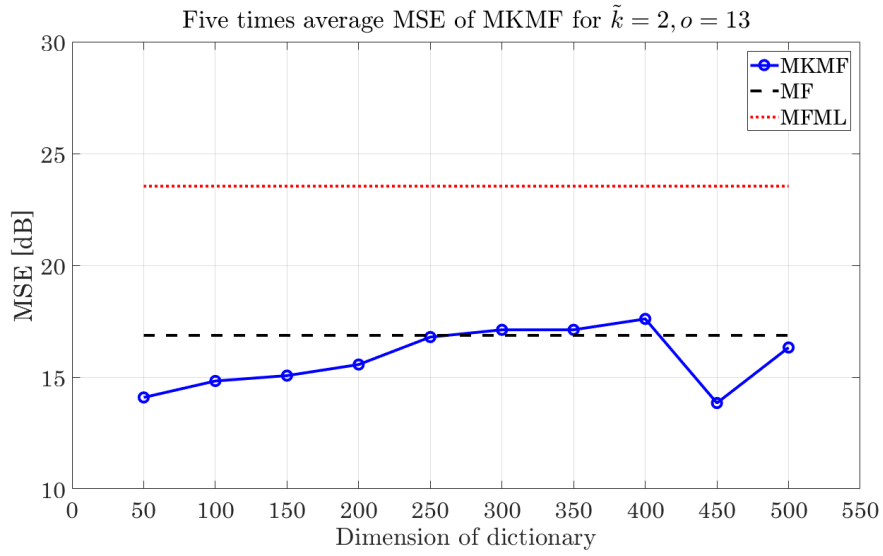


図 5.2: MKMF の異なる辞書行列次数における修復精度比較 ($\tilde{r} = 2, o = 13$)

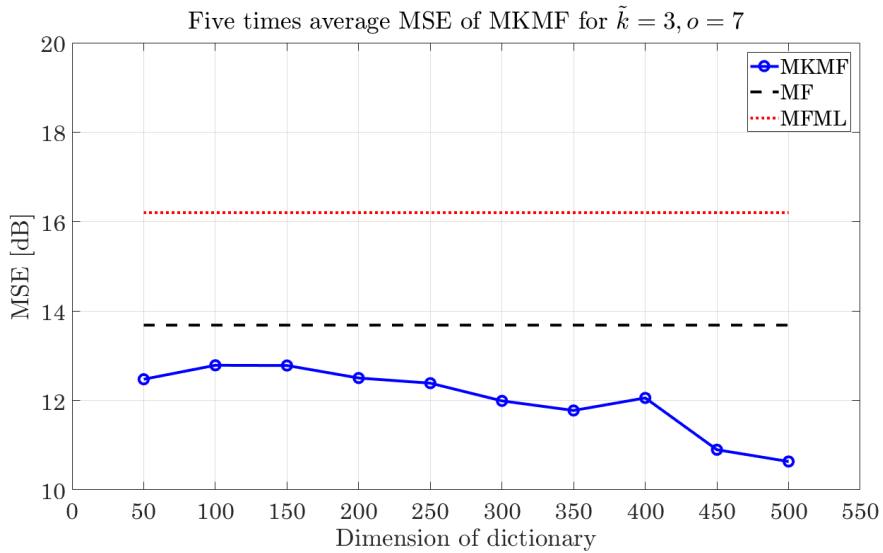


図 5.3: MKMF の異なる辞書行列次数における修復精度比較 ($\tilde{r} = 3, o = 7$)

修復精度の比較を図 5.2, 5.3 に示す. 図 5.2 において, MKMF は辞書行列の次数を $d = 300, 350, 400$ としたとき MF(破線) の修復精度を上回るが, それ以外の次数では精度が劣化することが確認できる. 図 5.3 において, 辞書行列の各次数において MF を下回り, また, 各次数での MSE は約 11 から 13[dB] 程度であることが確認できる. 文献 [27] においても, 同様の実験を実データに対し行っており, その結果においても修復精度は辞書行列の次数に依存することを示している. これらのことから, カーネル法による行列補完手法は問題に応じて辞書行列の次数を適切に変更しなければならず, 修復精度が辞書行列に依存しやすい手法であるといえる.

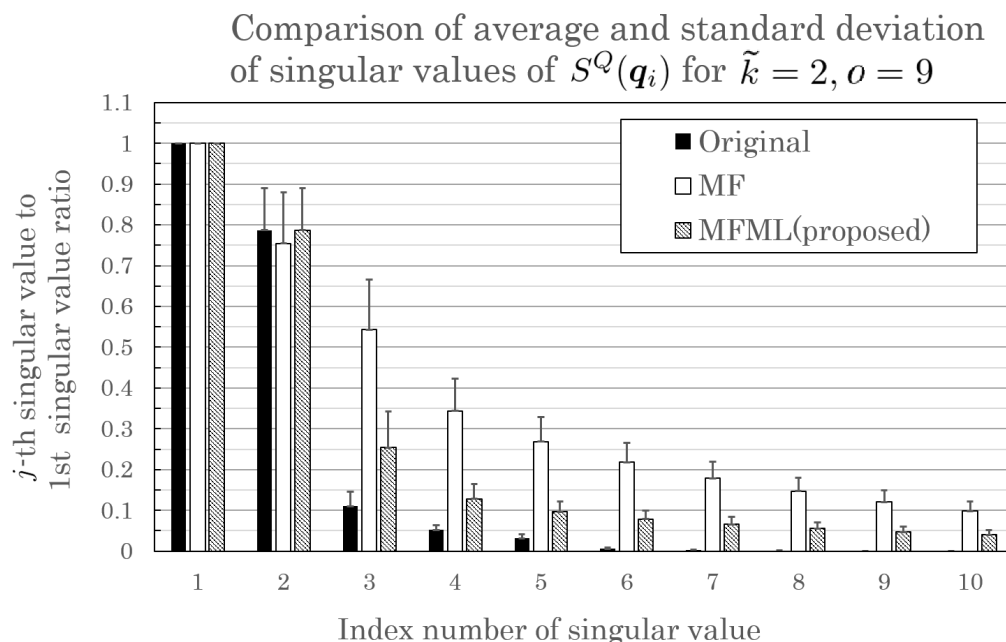


図 5.4: $\tilde{r} = 2, o = 9$ における, 各アルゴリズムが推定した Q に関する $S^Q(\mathbf{q}_n)$ の特異値 (第 1 特異値を 1 に正規化) の統計量 (棒グラフ: 平均値, エラーバー: 標準偏差)

続いて, 各アルゴリズムにより推定された \mathbf{q}_n が局所的に低次元線形空間上の点に近似していることを確認するために, \mathbf{q}_n ごとに生成した部分行列 $S^Q(\mathbf{q}_i)$ の特異値の分布を調べる. 図 5.4 は多様体の次元 $\tilde{r} = 2$ において, 各アルゴリズムの推定値 \mathbf{q}_n における $\{S^Q(\mathbf{q}_n)\}_{n=1}^N$ の特異値に関する統計量の比較を示す. 同図の棒グラ

フとエラーバーは、 $S^Q(\mathbf{q}_n)$ の第 1-10 特異値と第 1 特異値の比に関する、すべての n における平均値と標準偏差を示す。同図における第 3 特異値と第 1 特異値の比の平均値に関して、真値は約 0.1, MF は約 0.55, 提案手法は約 0.25 であることが確認でき、提案手法は MF による推定値と比べて 2 分の 1 以下にしている。第 3 特異値と第 1 特異値の比の標準偏差に関しても、提案手法は MF による推定値と比べ低いことが確認できる。これらの傾向は第 4 特異値以降においても同様の傾向であることが確認でき、提案手法は MF と比べ、多様体の次元 \tilde{r} を超過する第 j 特異値の値を小さくすることが確認できる。そのため、提案手法は MF と比べ、 \mathbf{q}_n が局所的に低次元線形空間上の点に近似するように推定する手法であるといえる。

5.4.2 MovieLens データセットを対象とした協調フィルタリング

本節では実データへの応用として、MovieLens データセット¹における 100K・1M データセットを用いた実験結果を示す。各データセットのユーザー・アイテム毎の評価値は $[1, 5]$ の範囲であり、またそれぞれのデータセットにおける行列サイズは、 $(M, N) = (943, 1682)$, $(M, N) = (6040, 3952)$ であり、それぞれ 100,000 個, 1,000,209 個の評価値を持つ。

提案手法 (5.9)(MFML) の有効性を確かめるために、確率モデルによる行列因子分解法 [21](Probabilistic Matrix Factorization, 以下 PMF と称する), 正規化重みを用いた行列因子分解法 [23](Matrix Factorization Recommendation Algorithm based on Rating Centrality, 以下 MFRC と称する), マルチカーネルを用いた行列因子分解法 [27](MKMF) と推定精度比較を行った。このとき、MKMF のみ文献 [27] では確率的勾配降下法を用いないアルゴリズムであるが、実験の公平性を考慮し、本数値実験上では比較に用いたすべてのアルゴリズムを式 (2.23), または、Algorithm 7 のような確率的勾配降下法を用いた繰り返し法に基づくアルゴリズムとした。このとき、各比較手法のパラメータに関して、Algorithm 7 上のいくつかのパラメータは共通となる。この共通パラメータに関して、本数値実験ではすべてのアルゴリズムで $\lambda = 10^{-1}, \eta = 10^{-2}, \mu_\eta = 1.05$ を用い、また、 P, Q の各列ベクト

¹<https://grouplens.org/datasets/movielens/>

ルの要素数 r は、文献 [23] の数値実験で用いている要素数 $r = 20, 30, \dots, 100$ の中で、本数値実験上で MFRC が最良の結果となる $r = 50$ を採用した。ただし、PMF のステップサイズ η のみ、本数値実験中で PMF の最良の結果となる $\eta = 500$ を採用した。また、MKMF におけるその他パラメータやカーネルの選択は文献 [27] のものを採用し、同様に辞書行列の次数は $d = 300$ を採用した。また、MFRC において、 $\{w_{m,n}\}_{(m,n) \in \Omega}$ は文献 [23] と同様に求め、シグモイド関数を使用した重み係数を用いた。提案手法において、 $L = 20, \alpha = 10^{-1}$ とし、 \tilde{r} は真値が不明であるため $\tilde{r} = 0$ を用い、 γ は $\mathcal{T}_{\tilde{r}, \gamma}$ が Soft Thresholding 関数となるように $\gamma = 10^{-1}$ を採用した。各手法の繰り返し最大回数 t_{max} は $t_{max} = 150$ とし規定回数まで繰り返した。

本節では定量評価として、以下に示す二乗平均平方根誤差を用いる。

$$RMSE = \sqrt{\sum_{(m,n) \in \Theta} (x_{m,n}^0 - \hat{x}_{m,n})^2 / |\Theta|} \quad (5.14)$$

ただし Θ は観測要素の添字集合 Ω には含まれない未観測要素の添字集合とし、既知の評価値を持つ添字全体からトレーニング用とテスト用にそれぞれ Ω と Θ を一様乱数を用いて振り分けた。また別の定量評価として、文献 [23] と同様に、各ユーザーのアイテム評価順序の一致率を示す FCP (Fraction of Concordant Pairs) [%] [29] を用いる。

$$\begin{aligned} FCP &= \frac{\sum_m n_c^m}{\sum_m n_c^m + \sum_m n_d^m} \\ n_c^m &= |\{(i, j) \mid \hat{x}_{m,n} > \hat{x}_{m,n} \text{ and } r_{m,n}^0 > r_{m,n}^0\}| \\ n_d^m &= |\{(i, j) \mid \hat{x}_{m,n} \leq \hat{x}_{m,n} \text{ and } r_{m,n}^0 > r_{m,n}^0\}| \end{aligned} \quad (5.15)$$

表 5.4, 5.5 に各手法による異なるトレーニング率での定量評価を示す。表 5.4 におけるトレーニング率 $\frac{|\Omega|}{|\Theta \cup \Omega|} = 70\%$ を除くすべての実験条件において、提案手法は $RMSE \cdot FCP$ のいずれにおいても高い推定精度を持っていることが確認した。

また、MFRC, MKMF, 提案手法における各実験条件での計算時間と $RMSE$ の関係を示すために、各アルゴリズムの $RMSE$ の時間遷移を図 5.5, 5.6 に示す。同図に関して、MFRC, MKMF, 提案手法は式 (2.23) が示す確率的勾配降下法に基づくアルゴリズムであり、各アルゴリズムの繰り返し構文内における勾配法に基づく更新では計算時間はほとんど変わらない。一方で、勾配法による更新に加え、MKMF はマルチカーネルにおける線形結合係数の更新を、提案手法は Algorithm 7

表 5.4: MovieLens 100K データセットにおける異なるトレーニング率での推定精度比較

Metric	$\frac{ \Omega }{ \Theta \cup \Omega }$	PMF	MFRC	MKMF	MFML(proposed)
RMSE	50%	1.0092	0.9326	0.9295	0.9290
	60%	0.9884	0.9250	0.9224	0.9221
	70%	0.9685	0.9140	0.9096	0.9110
	80%	0.9455	0.9029	0.9001	0.8989
FCP	50%	66.41%	72.52%	72.55%	72.61%
	60%	68.08%	73.33%	73.32%	73.38%
	70%	69.57%	73.86%	74.04%	73.90%
	80%	70.86%	74.29%	74.39%	74.41%

表 5.5: MovieLens 1M データセットにおける異なるトレーニング率での推定精度比較

Metric	$\frac{ \Omega }{ \Theta \cup \Omega }$	PMF	MFRC	MKMF	MFML(proposed)
RMSE	50%	1.0138	0.8730	0.8731	0.8713
	60%	1.0127	0.8696	0.8700	0.8669
	70%	1.0128	0.8671	0.8678	0.8634
	80%	1.0130	0.8671	0.8677	0.8625
FCP	50%	70.24%	76.05%	75.96%	76.09%
	60%	70.42%	76.13%	76.05%	76.24%
	70%	70.59%	76.22%	76.13%	76.40%
	80%	70.70%	76.23%	76.16%	76.45%

における 11,12 行目で記述される更新を余分に行っているため、同じ繰り返し回数でも計算時間は増加する。図 5.5 において、MFRC が十分に収束しているとみなせる時刻 (70[s] 程度) において、提案手法の RMSE は MFRC と MKMF の RMSE よりも低下しており、図 5.6 においても同様である。

5.5 まとめと今後の課題

本章では、 $X = P^T Q$ を仮定した、行列因子分解による行列の補完問題を扱い、 P, Q の各列ベクトルが DM に属する場合の行列補完問題においてより推定精度の高い行列補完手法を提案した。提案手法は従来の行列因子分解のように、対象とする行列 X を $X = P^T Q$ のように P, Q に分解することで行列 X の部分欠損を推定する。提案手法は同時に、行列 P, Q の各列ベクトルが低次元多様体上に属することを目的に、 P, Q の各列ベクトルの L 近傍がある低次元線形空間上の点に近似するように P, Q を推定する手法である。数値実験において、シミュレーションデータと実データ両方でその推定精度が向上したことから有効性を確かめた。今後、提案アルゴリズムにおける計算時間の大部分を占める特異値分解に関して、アルゴリズム上での計算の工夫により特異値分解を減らす、または目的関数上での切断核型ノルム項の削減などといった計算時間の短縮を検討していく必要がある。

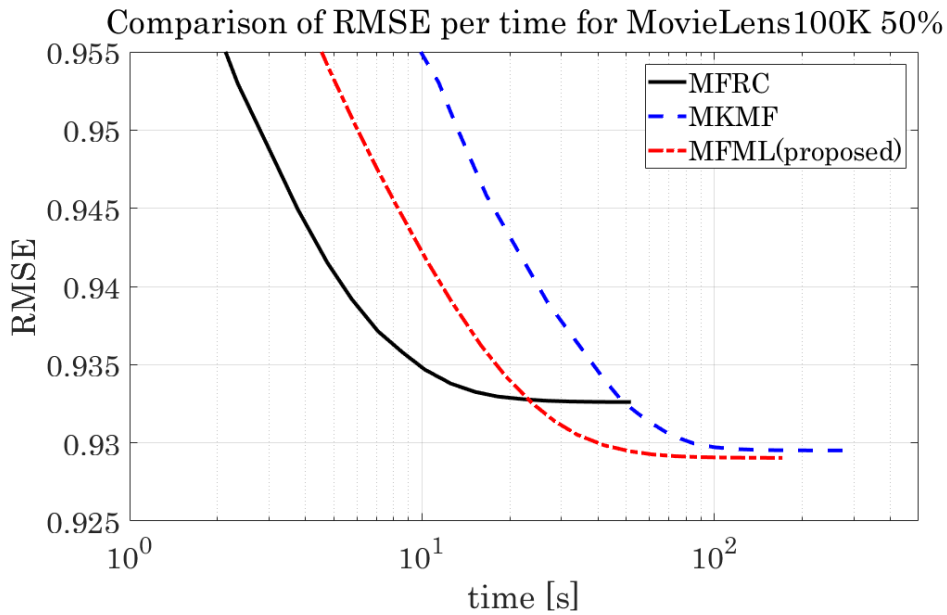


図 5.5: MovieLens100K, $\frac{|\Omega|}{|\Theta \cup \Omega|} = 50\%$ における, 各アルゴリズムの計算時間と RMSE の推移

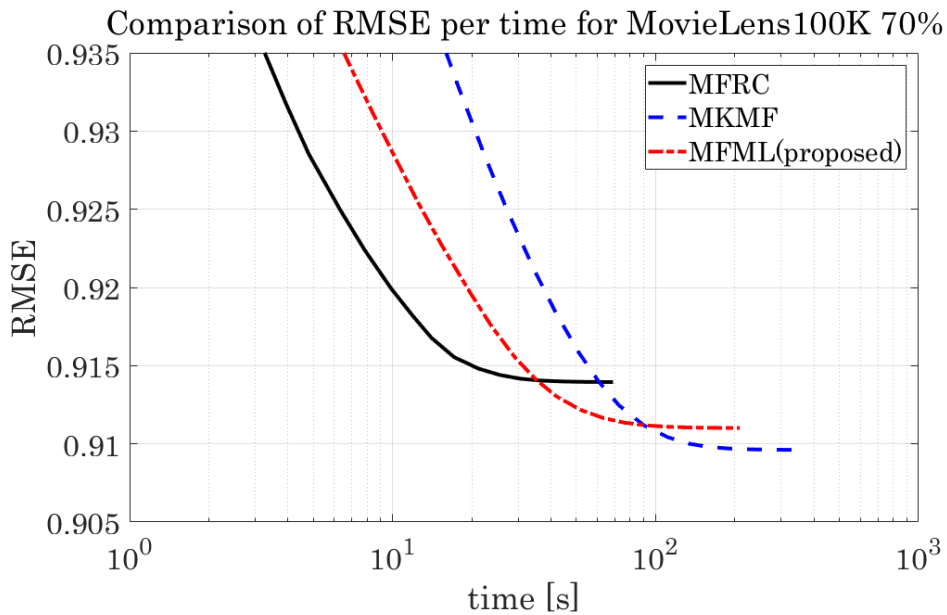


図 5.6: MovieLens100K, $\frac{|\Omega|}{|\Theta \cup \Omega|} = 70\%$ における, 各アルゴリズムの計算時間と RMSE の推移

第6章 結論

本論文では、線型部分空間の和空間，ならびに，可微分多様体に関して，それぞれの集合に属する列ベクトルを持つ行列に対する行列補完問題を扱った．第1章では，行列補完問題における応用と従来手法について概説し，現在まで研究が為されてきた行列の低ランク性に基づく手法の暗黙的な仮定について触れ，特に，上述の集合上における欠損補完問題では推定精度が劣化することが研究課題であることを主張した．第2章では，従来手法である行列の低ランク性に基づく行列補完について，行列ランク最小化，ならびに，行列因子分解に基づく行列補完手法を説明し，それぞれの利点と欠点を説明し，3,4,5章で述べる提案手法の導入とした．第3章では，行列の各列ベクトルが線型部分空間の和空間上に属する場合の行列補完問題について，各列ベクトルが属する各線型部分空間を推定しながら行列補完を行うアルゴリズム，ならびに，それを音声デクリッピングに応用したアルゴリズムを提案した．音声デクリッピング応用に関する数値実験において，従来手法よりも提案手法の推定精度が高く，特に，一定時間区間中において複数の話者が発話している場合には有効な手法であることを確認した．第4章では，行列の各列ベクトルが可微分多様体上に属する場合の行列補完問題について，各列ベクトルごとの局所近傍ベクトルで為す部分行列の行列ランク最小化により行列補完を行うアルゴリズム，ならびに，それを画像インペイントに応用したアルゴリズムを提案した．画像インペイント応用に関する数値実験において，実験に用いたすべてのテスト画像において従来手法よりも提案手法の推定精度が高いことから，提案手法の有効性を示した．第5章では，行列 $X = P^T Q$ を仮定した行列因子分解を用いた行列補完問題において， P, Q の各列ベクトルが可微分多様体に属するように行列補完を行うアルゴリズム，ならびに，推薦システムを実現するための協調フィルタリング応用のためのアルゴリズムを提案した．数値シミュレー

ション, ならびに, 実データによる行列補完問題に関する数値実験において, 提案手法の行列補完精度が従来手法よりも勝っていたことから提案手法の有効性を示した.

謝辞

本論文は筆者が東京理科大学大学院工学研究科経営工学専攻博士後期課程に在籍中の研究成果をまとめたものである。

東京理科大学工学部情報工学科教授 古川利博先生には指導教官として本研究の実施の機会を与えて頂き、その遂行にあたって終始御指導を頂いた。ここに感謝の意を表する。

また、東京理科大学工学部情報工学科 赤倉貴子教授，谷口行信教授，八嶋弘幸教授，池辺淑子准教授，ならびに，基礎工学部電子応用工学科 相川直幸教授には副査として御助言を頂いた。ここに謝意を表する。

法政大学情報科学部デジタルメディア学科教授 小西克己先生には本研究の遂行にあたって非常に有益な御助言と御指導を頂き，対外的な発表への参加を促して頂いた。ここに深謝の意を表する。

そして，東京理科大学工学部情報工学科 古川研究室所属の大学院生諸氏並びに学部生諸氏にはゼミやミーティングなどを通じて貴重な助言や助力を頂いた。ここに感謝の意を表する。

参考文献

- [1] Y. Liu, H. Cheng, F. Shang, and J. Cheng, “Nuclear norm regularized least squares optimization on Grassmannian manifolds,” Proc. Conf. Uncertainty in Artif. Intell., pp.515-524, 2014.
- [2] Y. Koren, “Factorization meets the neighborhood: a multifaceted collaborative filtering model,” Proc. ACM SIGKDD Int. Conf. Knowledge Discovery and Data Mining, pp.426-434, 2008.
- [3] N. Suga, R. Sasaki, and T. Furukawa, “Channel estimation using matrix factorization based interpolation for OFDM systems,” Proc. IEEE Vehicular Technology Conference (VTC2019-Fall), pp. 1-5, 2019.
- [4] T. Takahashi, K. Konishi, and T. Furukawa, “Hankel structured matrix rank minimization approach to signal declipping,” Proc. EUSIPCO, pp. 1-5, 2013.
- [5] T. Takahashi, K. Uruma, K. konishi, and T. Furukawa, “Block adaptive algorithm for signal declipping based on null space alternating optimization,” IEICE Trans. Inf. and Syst., vol. E98-D, no. 1, pp. 206-209, 2015.
- [6] K. H. Jin and J. C. Ye, “Annihilating filter-based low-rank Hankel matrix approach for image inpainting,” IEEE Trans. Image Process., vol. 24, no. 11, pp. 3498-3511, 2015.
- [7] T. Takahashi, K. Konishi, and T. Furukawa, “Rank minimization approach to image inpainting using null space based alternating optimization,” Proc. IEEE Int. Conf. on Image Process., pp. 1717-1720, 2012.

- [8] M. Fazel, H. Hindi, and S. Boyd, “Rank minimization and applications in system theory,” Proc. American Control Conference, vol. 4, pp. 3273–3278, 2004
- [9] J. F. Cai, E. J. Candés, and Z. Shen, “A singular value thresholding algorithm for matrix completion,” SIAM J. Opt., vol.20, no.4, pp.1956-1982, 2010.
- [10] K. Mohan, and M. Fazel, “Iterative reweighted algorithms for matrix rank minimization,” J. Machine Learning Research, vol.13, no.1, pp.3441-3473, 2012.
- [11] D. Zhang, Y. Hu, J. Ye, X. Li, and X. He, “Matrix completion by truncated nuclear norm regularization,” Proc. IEEE Conf. Comput. Vision and Pattern Recognit., pp.2192-2199, 2012.
- [12] K. Konishi, K. Uruma, T. Takahashi, and T. Furukawa, “Iterative partial matrix shrinkage algorithm for matrix rank minimization,” IEEE Trans. Signal Process., vol. 100, pp. 124-131, 2014.
- [13] J. Gotoh, A. Takeda, and K. Tono, “DC formulations and algorithms for sparse optimization Problems,” J. Math. Program, vol.169, no.1, pp.141-176, 2018.
- [14] S. T. Roweis and L. K. Saul, “Nonlinear dimensionality reduction by locally linear embedding,” Science, vol. 290, no. 5500, pp. 2323-2326, 2000.
- [15] M. Winlaw, D.L. Samimi, and A. Ghodsi., “Robust locally linear embedding using penalty functions,” Proc. Int. Joint Conf. Neural Networks, pp. 2305-2312, 2011.
- [16] B. Schölkopf, and A.J. Smola, “Learning with kernels: support vector machines, regularization, optimization, and beyond,” MIT Press, MA, USA, 2002.

- [17] R. Vidal, Y. Ma, and S. S. Sastry, “Generalized principal component analysis (GPCA),” *IEEE Tras. Pattern Analysis and Machine Intell.*, vol. 27, no. 12, pp. 1945-1959, 2005.
- [18] K. Konishi, “Multiple low rank matrix approach to switched autoregressive exogenous system identification,” *Proc. Asian Control Conference*, pp. 1-6, 2015.
- [19] T. Takahashi, K. Konishi, K. Uruma, and T. Furukawa, “Adaptive image inpainting algorithm based on generalized principal component analysis.” *Proc. of IEEE IVMSWP Workshop*, pp. 1-5, 2016.
- [20] S. Funk, “Netflix update: try this at home,” <http://sifter.org/~simon/journal/20061211.html>, S. Funk, 2006.
- [21] R. Salakhutdinov, and A. Mnih, “Probabilistic matrix factorization,” *Proc. Int. Conf. Neural Inf. Process. Syst.*, pp.1257-1264, 2007.
- [22] Y. Hu , Y. Koren, and C. Volinsky, “Collaborative filtering for implicit feedback datasets,” *Proc. IEEE Conf. Data Mining*, pp.263-272, 2008.
- [23] Z. Wu, H. Tian, X. Zhu, and S. Wang, “Optimization matrix factorization recommendation algorithm based on rating centrality,” *Proc. Int. Conf. Data Mining and Big Data*, pp.114-125, 2018.
- [24] A. Adler, V. Emiya, M. Jafari, M. Elad, R. Gribonval, and M.D. Plimbley, “A constrained matching pursuit approach to audio declipping,” *Proc. IEEE Int. Conf. Acoustics Speech and Signal Process.*, pp. 329-332, 2011.
- [25] K. Siedenburg, M. Kowalski, and M. Dorfler, ” Audio declipping with social sparsity, ” *Proc. IEEE Int. Conf. Acoustics Speech and Signal Process.*, pp. 1577-1581, 2014.

- [26] C.-B. Schönlieb and A. Bertozzi, “Unconditionally stable schemes for higher order inpainting,” *Communications in Mathematical Sciences*, vol. 9, no. 2, pp. 413-457, 2011.
- [27] X. Liu, C. Aggarwal, Y. Li, X. Kong, X. Sun, and S. Sathe, “Kernelized matrix factorization for collaborative filtering,” *Proc. SIAM Int. Conf. Data Mining*, pp.378-386, 2016.
- [28] G. Ongie, R. Willett, R. D. Nowak, and L. Balzano, “Algebraic variety models for high-rank matrix completion,” *Proc. Int. Conf. Machine Learning*, vol.70, pp.2691-2700, 2017.
- [29] Y. Koren, and J. Sill, “Collaborative filtering on ordinal user feedback,” *Proc. Int. Joint Conf. Artif. Intell.*, pp.3022-3026, 2013.

目次

3.1	3次元線形空間上の UoS の例 ($\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ の和集合)	15
3.2	音声クリッピングの例 ($C = 0.2$)	22
3.3	1 フレーム中に 2 つの音節が含まれる例	24
3.4	クリッピングレベル $C = 0.2$ における単一話者音声のデクリッピング結果	29
3.5	$C = 0.2, 0.3, \dots, 0.8$ におけるデクリッピング精度比較	31
3.6	各単一話者音声における提案手法 (GPCA) の行選択行列の個数 L による修復精度の差異 (提案手法における $L = 1$ を基準とした, $L = 2, 3$ における誤差改善比 SNR の各クリッピングレベル $C = 0.2, \dots, 0.8$ における平均 [dB])	32
3.7	単一話者音声のピリオドグラム	32
4.1	3次元線形空間上の DM の例 (2次元多様体)	35
4.2	3次元空間上の 2次元多様体 (左図) と 2次元埋め込み表現 (右図)	36
4.3	局所線形空間の低次元化アルゴリズムの概要	38
4.4	グラデーション画像 (左図) におけるブロックハンケル行列の各列ベクトルの 3次元射影散布図 (右図)	41
4.5	渦巻き模様画像 (左図) におけるブロックハンケル行列の各列ベクトルの 3次元射影散布図 (右図)	41
4.6	渦巻き模様画像におけるブロックハンケル行列の特異値の分布	42
4.7	テスト画像 (Lenna) の欠損修復結果: (a) 元画像, (b) 観測画像, (c) higher-order [26] による修復結果, (d) NSAO [7] による修復結果, (e) 提案手法による修復結果.	45

4.8	テスト画像 (Pepper) の欠損修復結果: (a) 元画像, (b) 観測画像, (c) higher-order [26] による修復結果, (d) NSAO [7] による修復結果, (e) 提案手法による修復結果.	46
4.9	テスト画像 (Parrots) の欠損修復: (a) 元画像, (b) 観測画像, (c) higher-order [26] による修復結果, (d) NSAO [7] による修復結果, (e) 提案手法による修復結果.	47
5.1	$\mathbf{x} = \boldsymbol{\psi}(y) = [y \ y^2]^T$ による, 1次元多様体の局所的な線形化の例	53
5.2	MKMF の異なる辞書行列次数における修復精度比較 ($\tilde{r} = 2, o = 13$)	62
5.3	MKMF の異なる辞書行列次数における修復精度比較 ($\tilde{r} = 3, o = 7$)	62
5.4	$\tilde{r} = 2, o = 9$ における, 各アルゴリズムが推定した Q に関する $S^Q(\mathbf{q}_n)$ の特異値 (第1特異値を1に正規化) の統計量 (棒グラフ: 平均値, エラーバー: 標準偏差)	63
5.5	MovieLens100K, $\frac{ \Omega }{ \Theta \cup \Omega } = 50\%$ における, 各アルゴリズムの計算時間と RMSE の推移	68
5.6	MovieLens100K, $\frac{ \Omega }{ \Theta \cup \Omega } = 70\%$ における, 各アルゴリズムの計算時間と RMSE の推移	68

表 目 次

3.1	計算条件	28
4.1	PSNR[dB] による客観評価	48
5.1	$\tilde{r} = 2, o \in \{9, 11, 13\}$ における各実験条件での MSE [dB] 比較 (5 回平均)	60
5.2	$\tilde{r} = 3, o \in \{3, 5, 7\}$ における各実験条件での MSE [dB] 比較 (5 回平均)	60
5.3	各実験における平均計算時間 [s] 比較	61
5.4	MovieLens 100K データセットにおける異なるトレーニング率での推定精度比較	66
5.5	MovieLens 1M データセットにおける異なるトレーニング率での推定精度比較	66