氏名（本籍）	**原　健太郎**（神奈川県）
学位の種類	博士（理学）
学位記番号	甲第1213号
学位授与の日付	2020年3月17日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
学位論文題目	**Noncommutative deformation of Kähler manifolds and its application to transformation from instanton to Hermitian Ricci-flat metric** **（ケーラー多様体の非可換変形とそれのインスタントンからリッチ平坦なエルミート計量への変換に対する応用）**
論文審査委員	（主査）教授　佐古　彰史
	教授　伊藤　稔　　教授　清水　克彦
	准教授　伊藤　弘道　　嘱託教授　秋山　仁
	嘱託教授　吉岡　朗

論文内容の要旨

本論文はケーラー多様体の非可換幾何を変形量子化の立場から考察するとともに、非可換ケーラー多様体の一つである非可換実 4 次元ベクトル空間上で定義されたゲージ理論と可換なエルミート多様体上のリッチ平坦な計量との関係を論じるものである。リッチ平坦な多様体は物理学において４つの力の一つである重力を記述するアインシュタイン多様体の一種である。アインシュタイン多様体はその性質から一般相対性理論や宇宙論の分野で注目されている対象である。またケーラー・アインシュタイン多様体は超弦理論でも注目されている対象である。

非可換幾何の構成には様々な方法があるが、今回用いる方法は変形量子化と呼ばれる方法で、関数の積をスター積と呼ばれる非可換な積にする方法を用いる。多様体上の関数にはその実数または複素数の積から誘導される積構造が入り関数全体の集合は環構造を持つが、それとは別の積を構成し関数全体の集合に別の環構造を持たせるものである。この構成については多様体がポアソン構造を持つ場合に構成できることが明らかになっているが、ポ

アソン多様体の中でもよく研究されているのがケーラー多様体である。ケーラー多様体の非可換変形はKarabegovによって導入された、変数分離型の変形量子化の方法をもちいる。ケーラー多様体は複素多様体でもあるので正則関数・反正則関数が定義できる訳だが、この方法はそれらの関数の積に条件を付けるものである。この方法により、全てのケーラー多様体は、変形量子化の積であるスター積を構成できることが知られている。しかし、原理的にスター積が存在することがわかっていても、実際に計算可能なスター積が得られ様るというわけではない。変数分離型の変形量子化の方法によって、射影空間や双曲空間のスター積は従来から得られていたが、その他の例は知られていなかった。そこで筆者らは一般に局所対称なケーラー多様体のスター積を構成することが可能な漸化式を構成した。局所対称ケーラー多様体はケーラー多様体の特殊なものではあるが、数学において重要な対象であるリーマン対称空間でケーラー多様体な例をすべて含んでおり広い応用が期待される。またその結果の具体例として筆者らは、任意のリーマン面に対して成立するスター積を新たに構成し、またグラスマン多様体に対してスター積が代数的な方法でスター積を構成することが可能な漸化式を構成した。

次に、非可換ケーラー多様体の最も簡単な例である非可換実 4 次元ベクトル空間上で定義されたゲージ理論に着目し、特に *U(1)*ゲージ理論とエルミート多様体のリッチ平坦な計量の関係を考察した。実 4 次元ベクトル空間は複素 2 次元ベクトル空間と同型であり複素構造が入ることは自明であるが、その複素構造から導出されるケーラー形式が閉になるためケーラー構造・ポアソン構造を持つ。またゲージ理論とは残り 3 つの力を記述する理論であり、素粒子実験などでも用いられているほかトポロジーや可積分系との意外な関係もある。その中でも我々が扱った *U(1)*ゲージ理論は電磁気学とほぼ同じものであり身近な対象と言える。Yang らによって、非可換 *U(1)*ゲージ理論のインスタントンと、江口 - ハンソン計量やケーラー計量の関係についての議論はすでにあり、それは Seiberg-Witten 変換と呼ばれる可換な空間上のゲージ理論と非可換空間上のゲージ理論の対応関係に新しい解釈を与えるものであった。ただ、それらの関係は明確に断片的な例示と、物理的な直観のもとでの議論であったため、数学的に厳密に何が言えるのか不明であった。そこで、筆者らは Yang による非可換 *U(1)*ゲージ接続と計量の対応を用いると、非可換 *U(1)*インスタントンがエルミート多様体のリッチ平坦な計量を構成できることを示した。また、その具体例を実際に多数構成した。また、申請者は単独で、その逆にある条件の下では、このリッチ平坦計量がインスタントン解を導くことも示している。

本論文は、これらの主結果を包括的に論じられたものにするため、Karabegov の変形量子化の方法や、Seiberg-Witten 変換、非可換インスタントンの構成、さらには Yang らのゲージ - 重力対応についてのレヴューを含む、総合的な論文となっている。

論文審査の結果の要旨

本論文はケーラー多様体の非可換幾何を変形量子化の立場から考察するとともに、非可換ケーラー多様体の一つである非可換R^4上で定義されたゲージ理論と可換なエルミート多様体上のリッチ平坦な計量との関係を論じるものである。

非可換幾何の構成には様々な方法があるが、今回用いる方法は変形量子化と呼ばれる方法で、関数の積をスター積と呼ばれる非可換な積にする方法を用いる。ケーラー多様体の非可換変形は Karabegov によって導入された、変数分離型の変形量子化の方法をもちいる。この方法により、全てのケーラー多様体は、変形量子化の積であるスター積を構成できることが知られている。しかし、原理的にスター積が存在することがわかっていても、実際に計算可能なスター積が得られるというわけではない。変数分離型の変形量子化の方法によって、射影空間や双曲空間のスター積は従来から得られていたが、その他の例は知られていなかった。筆者らは、任意のリーマン面に対して成立するスター積を新たに構成し、またグラスマン多様体に対して代数的な方法でスター積を構成することが可能な漸化式を構成した。

次に、非可換ケーラー多様体の最も簡単な例である非可換R^4上で定義されたゲージ理論に着目し、特に $U(1)$ ゲージ理論とエルミート多様体のリッチ平坦な計量の関係を考察した。Yang らによって、非可換 $U(1)$ ゲージ理論のインスタントンと、江口 - ハンソン計量やケーラー計量の関係についての議論はすでにあり、それはサイバーグ・ウィッテン写像と呼ばれる可換な空間上のゲージ理論と非可換空間上のゲージ理論の対応関係に新しい解釈を与えるものであった。ただ、それらの関係は明確に断片的な例示と、物理的な直観のもとでの議論であったため、数学的に厳密に何が言えるのか不明であった。そこで、筆者らは Yang による非可換 $U(1)$ ゲージ接続と計量の対応を用いると、非可換 $U(1)$ インスタントンからエルミート多様体のリッチ平坦な計量を構成できることを示した。また、その具体例を実際に多数構成した。またその逆として、ある条件の下では、このリッチ平坦計量がインスタントン解を導くことも申請者は単独で示している。
本論文は、これらの主結果を包括的に論じられたものにするため、Karabegov の変形量子化の方法や、サイバーグ・ウィッテン写像、非可換インスタントンの構成、さらには Yang らのゲージ - 重力対応についてのレヴューを含む、総合的な論文となっている。

審査は、審査員が各自で博士論文を審査した後に、合計 5 回からなる審査委員会で行った。そこでは、質疑応答を含む口頭発表と、口頭試問からなる論文審査、試験、学力についての試験を行い、全審査委員によって審査を行った。
1 回目と 2 回目の論文審査として論文の前半部分に関する審査を行った。1 回目に論文の位置付けと主結果を審査委員に申請者が説明を行った。変形量子化を用いた非可換幾何とゲージ理論、サイバーグ・ウィッテン写像と先行研究としてのその計量としての理解について説明を行い、続いて主結果の一つで博士論文の前半部分にある、「自己双対接続

からエルミートなリッチ平坦な計量が得られる」という定理を説明し、質疑応答が行われた。2回目に、その証明を行い、具体的に非可換ケーラー多様体上のインスタントンからエルミートなリッチ計量を構成する例を示した。また、逆の問題として、エルミートでリッチ平坦な計量から、漸近的に零であるという条件を課すことでやはり自己双対な2形式が得られることを示した。1 回目 2 回目とも口頭試問において大きな問題点はなかったが、参考文献についての指摘があり、修正することとなった。非可換空間上のインスタントンとリッチ平坦曲率の間の従来に見られなかった対応関係は、審査委員から「非常にきれいな関係」「もっと色々な場面で発表したほうがいい」という発言が出るなど、よい結果が得られているという判断がなされた。

3回目と4回目の論文審査では、論文の後半部分に関する審査が行われた。3回目にケーラー多様体の変形量子化の Karabegov による変形量子化を申請者によって詳細に報告され、その量子化における先行研究の紹介と、博士論文の後半部の主結果である、「局所対称なケーラー多様体の Karabegov の変形量子化、特に2次元リーマン面の変形量子化の構成」について、結果の解説がおこなわれ、その後質疑応答が行われた。4回目には、その主結果の導出が詳細に紹介され、その後口頭試問を行った。各回とも質疑応答で多くの質問が出たが、特に問題点は見つからなかった。また、論文の後半部分で得られている結果についても、非常にきれいな結果と審査員からの高い評価が得られた。

5回目の論文審査では、論文全体に対する総合的な審査が行われた。非可換空間上のゲージ理論の自己双対接続とエルミート多様体上のリッチ平坦な計量の関係を証明し、実際にそういった計量を構成する例を多数導出した事と、局所対称なケーラー多様体の変形量子化の具体的なスター積の構成について、行われた博士論文の内容の全体を紹介し、質疑応答を行った。得られた結果については全審査員から高い評価が得られた。

このように審査の結果、本論文は、エルミート多様体の幾何学の発展に多大に貢献しており、オリジナリティーの高い重要な結果を含んでいると認められることから、博士（理学）の学位論文として十分に価値あるものと認められる。