ミクロ・マクロ双対性に基づく動的自然観

元京都大学 数理解析研究所　小嶋（おじま）　泉（いずみ）

帰納 ⇄ 演繹の往復と「ミクロ・マクロ双対性」

物理・数学を先頭に現代科学では総じて法則・理論の偏重が顕著で，その延長上に，例えば，「量子的なミクロ理論のみ本物で，現象論的なマクロ古典は粗視化に基づく虚像に過ぎない」とか，ミクロ理論からマクロ現象を導出する「演繹のみが理論的に正しい」などといった「上から目線」の見方までもが公然と幅を利かせている。

しかし当然のことながら，外的自然を対象とする科学を考える以上，法則・理論だけを一方的に主張するだけでその正しさが保証されるはずもなく（それを「確信犯的に」企図する理論分野があるにせよ），「真理性」を確保するためには記述対象の振舞と理論内容との間の検証可能な一致が不可欠である。

そのとき，推論の正否は導かれた帰結の実験的検証に基づくが，遡って演繹的推論の出発点にあるミクロ量子系に関する理論的仮定それ自体の正しさは，どう判定・検証され保証されるのか？　それもやはり，実験観測データとの比較以外にはないはずで，「マクロ古典は……虚像」ゆえ，どんなデータも誤差等「信頼できないマクロ性」を免れないなら，結果的に「マクロ虚像」を以て「本物のミクロ」の品質を保証するという本末転倒に陥らざるを得なくなる：「Duhem-Quine の逆理」！　この困難を回避・克服するには帰納的推論と演繹的推論との往復可能性が不可欠で，記述領域・側面・精度の制約を明示化して理論内部に取り込み，それと整合する形でディレンマ突破を図るのが筆者の提唱する「ミクロ・マクロ双対性」に基づく方法論［IO2002］である。

ちょうど，適切な縮尺の局所地図が対象領域のみを正確に再現するように，記述・分類・解釈さるべき対象・現象（→対象系）とそこで必要な語彙・参照系・理論枠（→記述系）とは，適切な条件下，相互に表現論的双対の関係で結ばれ，対象系と記述系の「マッチング」＝圏論的普遍性の成立により，帰納と演繹の間の自由な往復が保証される。

セクター構造／対称性とその破れ

上の理論状況がどのように具体化されるかを以下で見よう。ただし通常扱われる量子論は有限自由度系の量子力学なので理論構成が単純過ぎてこの目的に適さず，現代物理学の基礎をなす量子場理論の基本構造を考えることが必要になる：そこでは，理論的にのみ記述され不可視のミクロ系と実験観測を介したマクロレベルへの可視化とがどんな関係で結ばれているか？という問題構成の典型例が見出される。

a）まず，物理系の物理量Aたちを集めると，その全体は非可換抽象代数$\mathcal{A}$をなし，逆に個々のAは$\mathcal{A}$の要素となる。$\mathcal{A}$上の期待値汎函数として定義された状態概念ω：$\mathcal{A}\to\mathbb{C}$は非可換ミクロ世界$\mathcal{A}$をマクロ期待値$\omega(A)$に橋渡しする“*Micro-Macro interface*”として測定過程を記述し，G(el'fand)

N(aimark)S(egal) 表現定理：$\omega(A)=\langle \xi_\omega, \pi_\omega(A)\xi_\omega \rangle$, $\xi_\omega \in \mathfrak{H}_\omega$を通じてHilbert空間$\mathfrak{H}_\omega$に働く作用素による$\mathcal{A}$の表現$\pi_\omega : \mathcal{A} \ni A \longmapsto \pi_\omega(A) \in B(\mathfrak{H}_\omega)$を与える。

抽象代数レベルは測定過程に晒される前の量子系のvirtualなあり方に対応し，Hilbert空間での表現は測定＝マクロ化過程でのミクロ・マクロ相互関係の特定の文脈を選択する。表現以前に古典的自由度を持たない「純量子系」が無数の異なる表現（正確には次に述べるdisjoint表現）を持つ状況は，「古典的マクロ対象＝無限量子の集積効果」という「量子古典対応」の本質を体現する無限自由度量子系固有の現象である（Cf. 有限自由度量子力学ではこの状況が記述不能の故，有名な「Schrödingerの猫」はじめ多くの無用な概念的混乱が避けられない一方で，有限量子系の量子論的本質は無限量子系から容易に特殊ケースとして再現されるので，無限量子系への限定で議論の一般性が失われる心配はない）。

こうして，マクロ秩序変数は人為的に外から持ち込まずとも，ミクロ量子系内部から自然に生成し，そのスペクトルがミクロ量子系の取る多様な構造・配置を記述する分類空間を与える。これによって古典的マクロレベルの幾何構造の物理的由来とその数学的普遍性は基礎づけられ，ミクロ系と種々のマクロ古典レベルとをつなぐ普遍的相互関係が「ミクロ・マクロ双対性」として明確に定式化される。

重要な点は，セクター間構造を記述する秩序変数$\mathfrak{Z}_\pi(\mathcal{A}) := \pi_\omega(\mathcal{A})'' \cap \pi_\omega(\mathcal{A})'$のスペクトル$Sp(\mathfrak{Z}) := Sp(\mathfrak{Z}_\pi(\mathcal{A})) =: Spec$が担う「分類空間」の機能で，時空の物理的創発の解明［IO2010］がその延長上に可能となる。

b）ここでは，相対論的量子場の局所熱的状態の数学的定式化［BOR2002］とD(oplicher)H(aag)R(oberts) セクター理論［DHR 1969, DR1990］から抽出した「セクター」概念および「セクター」=「純粋相」を選び出す「判定基準」を「方程式」と見るガロア方程式論の視点［IO2003］が重要で，記述対象の物理的状況に応じた量子状態の然るべき族を「方程式」の「解」として選び出せば，自然な物理的解釈が圏論的随伴によって定まる［IO2003, IO2015］。内部対称性の考察では直接測定に掛からない非物理量を含む量子場の代数$\mathcal{F}$が必要だが，物理的解釈の議論では観測可能量の代数$\mathcal{A}=\mathcal{F}^G$が重要になる。

ここで中心的働きをする$\mathcal{A}$の拡張された「セクター」=「純粋相」は，「中心」が自明な「因子表現」$(\pi, \mathfrak{H})$ s.t. $\mathfrak{Z}_\pi(\mathcal{A})=\mathbb{C}1$ の「準同値類」（＝重複度を無視したunitary同値類）として定義される。「中心」が非自明$\mathfrak{Z}_\pi(\mathcal{A}) \neq \mathbb{C}1$ なら，可換環$\mathfrak{Z}_\pi(\mathcal{A})$ を「同時対角化」でスペクトル分解すると，それに伴って$\pi(\mathcal{A})''$がスペクトル$Sp(\mathfrak{Z})$ 上で「セクター」の直積分に中心分解される：$\pi(\mathcal{A})''=\int^{\oplus}_{\chi \in Sp(\mathfrak{Z})} \pi_\chi(\mathcal{A})'' d\mu(\chi)$。ここで異なる「セクター」$\pi_1$, π_2相互は，「unitary非同値性」よりはるかに強く含意の深い「無縁性（disjointness）」条件を満たす：i.e., $T\pi_1(A) = \pi_2(A)T$ $(\forall A \in \mathcal{A})$ ならば$T=0$。可換性を特徴とする古典量は，複数の「セクター」=「純粋相」から成る「混合相」の「中心」$\mathfrak{Z}_\pi(\mathcal{A})$として現われ，そのスペクトル＝実現値$\chi \in Sp(\mathfrak{Z})$ は「純粋相」を識別する「秩序変数」として機能する。

「セクター」=「純粋相」は，ミクロ量子系とマクロ古典系＝「環境系」とを分ける「境界」として機能するとともに，両者を「ミクロ・マクロ複合系」=「混合相」に統合する。

← セクターの作る　可視的マクロ →						セクター間関係
…	γ_N	セクター	γ	γ_2	γ_1	$Sp(\mathfrak{Z})$
…	$\pi_{\gamma_N}\ \vdots$		$\pi_\gamma\ \vdots$	$\pi_{\gamma_2}\ \vdots$	$\pi_{\gamma_1}\ \vdots$	↑セクター内部 ‖ ↓不可視のミクロ

c）そこでの理論の成立ちを大まかに検討

すると，時空共変な量子場の代数$\mathcal{F}$の時間空間的振舞を記述する動力学と$\mathcal{F}$への群Gの変換作用$G\underset{\tau}{\curvearrowright}\mathcal{F}$で記述される内部対称性とから構成されるが，内部対称性が破れない状況で$\mathcal{F}$の中で測定可能な物理量はG-不変量$\mathcal{A}:=\mathcal{F}^{G}$のみで，非自明な$G$-変換性を持つ量は観測不能な非物理量になっている。通常，「何が測定可能で何がそうでないか？」はほとんど問われることなく，対称性Gの仮定から物理量の期待値間に想定される関係式が実験結果と整合すれば，それで理論構成が正当化されたと看做されているが，実はこれでは不十分である：観測不能量まで含む$\mathcal{F}$で記述された理論の側の［G-力学系$G\underset{\tau}{\curvearrowright}\mathcal{F}$］と現象の側の［測定可能量$\mathcal{A}\xrightarrow{\text{状態族}\{\omega_\alpha\}}$測定結果$\omega_\alpha(A), A\in\mathcal{A}$］との間のgapは，測定可能量$\mathcal{A}$だけから群$G$と非自明な$G$-変換則に従う代数$\mathcal{F}$とを一意に定める「逆問題」を解くことなしには埋まらない。

DHR理論は，各有界時空領域$\mathcal{O}$ごとにその因果的補集合$\mathcal{O}'$上で$\mathcal{A}$の真空表現π_0と同値になるべしというDHR判定基準：$\pi\restriction_{\mathcal{A}(\mathcal{O}')}\cong\pi_0\restriction_{\mathcal{A}(\mathcal{O}')}$で選ばれた$\mathcal{A}$の表現$\pi$=「セクター」全体を群双対$\hat{G}$と同定し，$\mathcal{F}$と$G$とを$\mathcal{A}$のガロア拡大$\mathcal{F}=\mathcal{A}\rtimes\hat{G}$およびガロア群$Gal(\mathcal{F}/\mathcal{A})=G=\hat{\hat{G}}$として定め，この逆問題を解いた［DR1990］（ただし，π_0は$\mathcal{A}$の真空表現，$\mathcal{A}(\mathcal{O}')$は$\mathcal{O}$の因果的補集合$\mathcal{O}'$内で測定可能な物理量のC*-環）。この意味でDHR理論は，目に見えるマクロデータであるセクター構造$\hat{G}$から，ミクロレベルの内部対称性$G\underset{\tau}{\curvearrowright}\mathcal{F}$を群双対性（$G\rightleftarrows\hat{G}$）とガロア拡大$\mathcal{F}=\mathcal{A}\rtimes\hat{G}$によって導出するという画期的意味を持つ。

d）ただしこのDHR理論は，真空状況とそこからの局所的ズレにfocusし既約表現に依拠して「セクター」を扱うため，群Gのすべての表現がunitary表現された破れなしの対称性に帰着し，自然界で重要な「対称性の破れ」が扱えない。量子場代数$\mathcal{F}$の群対称性$G\underset{\tau}{\curvearrowright}\mathcal{F}$は，$\mathcal{F}$の既約（より一般には因子）表現（$\pi,\mathfrak{H}$）で共変性：$\pi(\tau_g(F))=U(g)\pi(F)U(g)^*(\forall F\in\mathcal{F})$を満たす$G$のunitary表現$(U,\mathfrak{H})$が存在すれば破れない対称性，そうでなければ破れた対称性を記述する。

通常物理で用いる言い方は，GをLie群としてそのLie環表現の生成子の定義不能性を対称性の自発的破れと定義するがこれは不正確で，対称性の破れは［$\mathcal{F}$の表現（$\pi,\mathfrak{H}$）の因子性$\mathfrak{Z}_\pi(\mathcal{F}):=\pi(\mathcal{F})''\cap\pi(\mathcal{F})'=\mathbb{C}1$］と［$G$-表現（$U,\mathfrak{H}$）の共変性］との非両立性にある［IO2003，IO2015］。つまり，$\mathcal{F}$の因子表現（$\pi,\mathfrak{H}$）でGの共変的unitary表現が存在しないか，またはGの共変的unitary表現（$U,\mathfrak{H}$）は存在するがGの破れのため$\mathcal{F}$の表現（$\pi,\mathfrak{H}$）の因子性が破れるか：$\mathfrak{Z}_\pi(\mathcal{F})\neq\mathbb{C}1$，の二通りの記述がある。2003年の拙論文は，局所非平衡状態の定式化［BOR2002］を踏まえ，セクター概念を互いにdisjointな「因子表現」に拡張して対称性の自発的破れだけでなく，温度をスケール不変性の破れに伴う秩序変数と同定し明示的に破れた対称性まで取り込んだ。

「4(＋1)項図式」と「コペルニクス的転回」

こうして「ミクロ・マクロ双対性」を軸に物理量とその測定値，ミクロ量子とマクロ古典の双方向的一般的関係が理解された。ただし，これは時空的に変化発展する物理系のスナップショットであり，変化発展の過程を取込んで一つの物理系を十全に記述するには，過程を引き起こす「原因」=dynamicsと「時間空間」の物理的本性の解明が不可欠で，そのための理論的枠組として「4(＋1)項図式」［IO2013，IOOk2012］が有効に機能する。

マクロ：創発↗	Spec＝分類空間	↘ 量子場
States＝ 状態族	⇅ ⇄ RepMod＝表現加群 ⇄ GNS Galois ⇅	Alg＝ 対象系 の代数
双対場↘	Dyn＝動力学	↗余創発：ミクロ

これを出発点に，「量子古典対応」という物理的直観の持つ深い本質を蘇らせ，数学的方法論として活用可能にしたのが「4(+1)項図式」に基づく「ミクロ・マクロ双対性」の理論枠［IO2013］である。

古典的マクロ対象を「無限個の量子の集積効果」と見る「量子古典対応」の直観的描像は，マクロ世界しか知らない古典物理学が未知のミクロ量子世界に踏込む際，道案内を務めた重要な発見法的理念だが，「無限個量子の集積」という「無限自由度量子系」の数学的扱いなしには理論的定式化が不可能である一方，通常の量子力学では有限自由度系しか扱えないため，「量子古典対応」は永らく棚晒しにされてきた。

「4(+1)項図式」に基づく「ミクロ・マクロ双対性」は，無限自由度量子系の扱いを可能にした現代の数学的技術水準を踏まえて，「量子古典対応」の重要な核心に数学的定式化を与えて救出し，量子場のミクロ動力学とそれが産み出す多様なマクロ現象・構造との動的・有機的な相互関係を解明する研究の本格的展開を可能にした。例えば，見慣れたマクロ世界から見知らぬミクロ世界へのジャンプを総称的に「コペルニクス的転回」と呼べば［IO2016］，創発した分類空間$Spec$を$Alg(ebra)$にmapする量子場$\hat{\varphi}: Spec \to Alg$とその双対概念である双対場$\hat{\varphi}^*: States \to Dyn(amics)$がこの転回を実現する概念装置となり，状態を表現加群$RepMod$へ移すGNS構成$GNS: States \to RepMod$を介して双対場はGalois対応$RepMod \to Dyn$と直結する：$\hat{\varphi}^* = Gal \circ GNS$，等々。

ここで，GNS構成$GNS: States \to RepMod$の圏論的本質は，物理量の代数$\mathcal{A}$上の正値線型汎函数として定義された状態$\omega \in E_{\mathcal{A}}$に対して，対応する正値二次形式$\omega(A^*B)$，$A, B \in \mathcal{A}$を$\omega(A^*B) = V_\omega(A)^* V_\omega(B)$と平方に開く$V_\omega: \mathcal{A} \ni A \longmapsto V_\omega(A)$を構成し，その結合律$V_\omega((AB)C) = V_\omega(A(BC))$から定まる$\mathcal{A}$の表現$\pi_\omega$と基準ベクトル$\Omega_\omega := V_\omega(1)$ s.t. $V_\omega(AB) = \pi_\omega(A) V_\omega(B)$, $V_\omega(A) = \pi_\omega(A)\Omega_\omega$により左$\mathcal{A}$-加群$\mathcal{A} \curvearrowright \mathfrak{H}_\omega := \overline{\pi_\omega(\mathcal{A})\Omega_\omega} \in RepMod$を構成し，そのfunctorialityが状態間のRadon-Nikodym微分に対応するというところに見出される。

上述のように物理系の対称性は，代数$\mathcal{F}$への群Gの左作用$G \underset{\tau}{\curvearrowright} \mathcal{F}$で記述されるが，この対称性が破れなければ分類空間$Spec = M$の各点は$G$-不変なので，マクロレベルで対称性の存否をチェックすることはできない。これに対して，Gによる対称性が破れる場合，一般にGのある部分群Hが破れずに残り，分類空間M上にGの作用がエルゴード的でG-軌道がMを隈なく覆い尽くすとき，空間MはGの等質空間$G/H = M$であるだけでなく，もっと強く「対称空間」と呼ばれる際立った幾何学的性質を持つ空間となることが証明できる［IO2013］。これは，chiral symmetry，Lorentz symmetry，熱力学第２法則において見られる諸特徴と著しい共通点を持つ性質で，さらに対応する量子場の運動方程式が電磁場に対するMaxwell方程式と類似のものであることをも示すこともできる［IO2013］。

このようにして，ミクロ・マクロ双対性を満たす理論の枠組は，単に数学的な意味で普遍性を持つだけでなく，個々の状況での物理系の持つ個別的・具体的特徴をも再現するという意味の具体性を備えていることが分かる。