Construction and investigation of parameterized families of operator means
（パラメータ付けされた作用素平均の族の構成と考察）

理学研究科　数理情報科学専攻
柳田研究室　宇田川　陽一

函数解析学における作用素論では作用素平均，或いはそれに一対一に対応する作用素単調関数の研究が盛んに行われている．私は作用素平均に対応する作用素単調関数に着目することにより，パラメータ付けされた作用素平均の族の研究を行った．

$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ をヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線型作用素全体の集合とし，$0 \leq \langle (B-A)x, x\rangle$ $(\forall x \in \mathcal{H})$ によって自己共役作用素 $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ の間の順序 $A \leq B$ を定める．この順序の下で

$$A \leq B,\ \sigma(A), \sigma(B) \subset I \implies f(A) \leq f(B)$$

を満たすような連続関数 f を I 上の作用素単調関数という．また，正値作用素の組について以下の 4 つの性質を満たすような写像 $\mathfrak{M}(\cdot,\cdot)$: $\mathcal{B}(\mathcal{H})^2_+ \to \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ を作用素平均と呼ぶ；

(1) $A \leq C,\ B \leq D \implies \mathfrak{M}(A,B) \leq \mathfrak{M}(C,D)$,

(2) 自己共役な $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ について，$X(\mathfrak{M}(A,B))X \leq \mathfrak{M}(XAX, XBX)$,

(3) $A_n \searrow A$, $B_n \searrow B \implies \mathfrak{M}(A_n, B_n) \searrow \mathfrak{M}(A,B)$,

(4) $\mathfrak{M}(I,I) = I$.

($A_n \searrow A$ は $A_1 \geq A_2 \geq \cdots$ かつ A_n が A に強収束することを意味する．)

作用素平均は $(0,\infty)$ 上の正値作用素単調関数と一対一に対応することが知られており（久保-安藤理論 (1980)），作用素平均を研究する際にそれに対応する作用素単調関数（表現関数と呼ばれる）について調べるということがしばしば行われる．

作用素単調関数の例としてよく挙げられるものの一つに対数関数 $l(x) = \log x$ がある．そして，それとは対照的に作用素単調関数ではない例として挙げられるのが対数関数の逆関数である指数関数 $l^{-1}(x) = \exp(x)$ である．指数関数が作用素単調関数でないことは，例えば

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 \end{pmatrix} = B$$

について

$$\exp(A)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{-2}\end{pmatrix} \not\leq \frac{1}{5e}\begin{pmatrix}3e^5+2 & \sqrt{6}(e^5-1)\\ \sqrt{6}(e^5-1) & 2e^5+3\end{pmatrix}=\exp(B)$$

であることから直ちにわかる．一方で，

$$ID(x):=\frac{1}{e}x^{\frac{x}{x-1}}=\exp\left(\frac{x\log x}{x-1}-1\right)$$

は指数関数との合成関数であるが作用素単調であるような関数として知られている（$ID(x)$ は Identric mean と呼ばれる作用素平均の表現関数としても知られる）．この他には，自明なものとして，定数関数 $c(x)=a$ $(a\in\mathbb{R})$，対数関数 $l(x)$ がそれぞれ指数関数との合成関数もまた作用素単調関数となる．一般に，指数関数との合成関数 $\exp\{f(x)\}$ が作用素単調かそうでないかを調べることは困難であったが，本学位論文では，$\exp\{f(x)\}$ が作用素単調となるような連続関数 $f(x)$ の条件について研究を行い，以下の結果を得た；

Theorem 1. $f(x)$ を $(0,\infty)$ 上の連続関数とする．もし $f(x)$ が定数関数でも対数関数 $\log x$ でもないならば，このとき以下は同値；
(1) $\exp\{f(x)\}$ は作用素単調関数，
(2) $f(x)$ は作用素単調関数で，かつ

$$0<v(r,\theta)<\theta$$

を満たすような，上半平面 $\mathbb{C}^+=\{z\in\mathbb{C}\mid \Im z>0\}$ への解析接続が存在する．ここで，

$$f(re^{i\theta})=u(r,\theta)+iv(r,\theta)\ (0<r,\ 0<\theta<\pi)$$

であるとする．

この定理によって，$f(z)$ の虚部 $v(r,\theta)$ を具体的に書き下し，不等式 $0<v(r,\theta)<\theta$ を満たすかどうかを調べることにより，$\exp\{f(x)\}$ が作用素単調なのかそうでないのかが確かめられることがわかった．今回は以下の 5 つの関数について上記の定理を適用し，合成関数 $\exp\{f(x)\}$ の作用素単調性の判定を行った．

$f(x)$	$-\dfrac{\log x}{x-1}$	$\dfrac{2x}{x+1}$	$\dfrac{x\log x}{x-1}$	$x^{\frac{1}{2}}$	$\dfrac{x-1}{\log x}$
$f(x)$ の作用素単調性	○	○	○	○	○
$\exp\{f(x)\}$ の作用素単調性	○	×	○	×	×

上の表において，$\exp\{f(x)\}$ も作用素単調であったのは 2 つの関数 $-\dfrac{\log x}{x-1}$, $\dfrac{x\log x}{x-1}$ であるが，このことは以下の定理に拡張することができる；

Theorem 2. 関数族 $DL_p(x)$ を以下のように定める；

$$DL_p(x):=\frac{x^p\log x}{x^p-1}.$$

このとき，すべての $p\in[-1,1]\setminus\{0\}$ について $\exp\{DL_p(x)\}$ は作用素単調関数である．

作用素平均の研究方法の一つに，積分による作用素平均の導出というものがある.「積分による」とは，より正確に述べれば「重み付き作用素平均に対応する表現関数を重みについて積分する」ことを意味する．この手法の適用例としては，次に挙げる Logarighmic mean（対数平均）の導出，Power difference mean の導出の 2 つが有名である；

$0 \leq A \leq B$ のとき，すべての $\alpha \in [0,1]$ について

$$A^{\alpha} \leq B^{\alpha}$$

が成り立つことはよく知られており，この事実は関数族 $\{G_{\alpha}(x)|\ \alpha \in [0,1]\} := \{x^{\alpha}|\ \alpha \in [0,1]\}$ が $(0,\infty)$ 上の作用素単調関数族であることを表している（この不等式はレウナー・ハインツの不等式と呼ばれている）．ここで，この関数族を α について積分すれば，各 $x > 0$ に対して

$$\int_0^1 x^{\alpha} d\alpha = \frac{x-1}{\log x}$$

が成り立つ．この関数は Logarighmic mean（対数平均）の表現関数である．また，

$$P_{r,\alpha}(x) := \big((1-\alpha) + \alpha x^r\big)^{\frac{1}{r}}$$

は，すべての $r \in [-1,1], \alpha \in [0,1]$ について，$(0,\infty)$ 上の作用素単調関数である（この関数族は Weighted power mean の表現関数として知られている）．この関数族を α について積分すれば，各 $x > 0, r \in [-1,1]$ に対して

$$\int_0^1 P_{r,\alpha}(x) d\alpha = \frac{r(x^{r+1}-1)}{(r+1)(x^r-1)}$$

を得る．この関数族は Power difference mean の表現関数であるが，パラメータの最適な範囲は $-1 \leq r \leq 2$ であることが知られており，この手法では完全なパラメータの範囲を導くことはできないことがわかる.

また，内山 (2000) はレウナー・ハインツの不等式の一般化として，$[-a.\infty)$ 上の関数

$$u(x) := r\prod_{i=1}^{k}(x+a_i)^{p_i} \quad (0 \leq a = a_1 < a_2 < \cdots < a_k = b, 1 \leq p_1, 0 < p_i, 0 < r)$$

について，その逆関数 $u^{-1}(x)$ が $[0,\infty)$ 上の作用素単調関数となることを示した．本学位論文では，この結果と積分による導出方法を用いて，パラメータ付けされた作用素平均の族を構築する新たな手法を確立した；

Theorem 3. μ を $[0,1]$ 上の確率測度とし，$\{f(\alpha;x) \mid \alpha \in [0,1]\}$ を $x \geq 0$ の正値作用素単調関数の族とする．また，各 $x \geq 0$ について，写像 $\alpha \mapsto f(\alpha;x)$ は連続であると仮定する．このとき，

$$F(x) := u\left(\int_0^1 u^{-1}\left(f(\alpha;x)\right) d\mu(\alpha) + b - a\right)$$

は作用素単調関数である.

$f(x)$ が $(0,\infty)$ 上の正値作用素単調関数であるとき，$f(x^{-1})^{-1}$ もまた $(0,\infty)$ 上の作用素単調関数となる．このことを用いれば，Theorem 3 から次の結果が直ちに導かれる．

Corollary 1. *Theorem 3* と同様の仮定のもと，

$$\Phi(x) := \left[u\left(\int_0^1 u^{-1}(f(\alpha;x)^{-1}) d\mu(\alpha) + b - a \right) \right]^{-1}$$

は作用素単調関数である．

$u(x)$ は k 個の冪乗関数の積として定義されていた．ここでは最も単純な $k=1$ の場合を考える．$u(x) = x^{\frac{1}{p}}$ $(p \in (0,1])$ を Theorem 3，Corollary 1 にそれぞれ当てはめることにより，次の系が得られる．

Corollary 2. *Theorem 3* と同様の仮定のもと，各 $p \in [-1,1] \setminus \{0\}$ について，

$$F_p(x) := \left(\int_0^1 f(\alpha;x)^p d\mu(\alpha) \right)^{\frac{1}{p}}$$

は $x \geq 0$ の作用素単調関数である．さらに，固定した各 $x \geq 0$ について，$F_p(x)$ は $p \in [-1,1] \setminus \{0\}$ に対して単調に増加する．

上記の系における $F_p(x)$ の p に関する単調性（$p_1 \leq p_2 \Rightarrow F_{p_1}(x) \leq F_{p_2}(x)$）はイェンゼンの不等式から導かれる．また，$p=0$ の場合は以下のように取り扱うことができる．

Corollary 3. *Theorem 3* と同様の仮定のもと，

$$F_0(x) := \lim_{p \to 0} F_p(x) = \exp\left(\int_0^1 \log f(\alpha;x) d\mu(\alpha) \right)$$

は作用素単調関数である．ここで，$F_p(x)$ は *Corollary 2* で定義された関数とする．さらに，すべての $p \in [-1,0)$ と $q \in (0,1]$ について $F_p(x) \leq F_0(x) \leq F_q(x)$ が成り立つ．

さらに，$f(\alpha;x) = P_{r,\alpha}(x)$ と具体的に関数族を定めることにより，次のような 2-パラメータの作用素単調関数の族を構築することができた．

Theorem 4. $r \in [-1,1]$ と $s \in [-1,1]$ に対して，

$$F_{r,s}(x) := \left(\int_0^1 \left((1-\alpha) + \alpha x^r \right)^{\frac{s}{r}} d\alpha \right)^{\frac{1}{s}} = \left(\frac{r(x^{r+s}-1)}{(r+s)(x^r-1)} \right)^{\frac{1}{s}}$$

は $x \geq 0$ について作用素単調関数である．さらに，固定した各 $x \geq 0$ について，$F_{r,s}(x)$ は $r \in [-1,1]$ と $s \in [-1,1]$ に対して単調に増加する．

Theorem 4 で構築された 2-パラメータの作用素単調関数族 $\{F_{r,s}(x) | \ r,s \in [-1,1]\}$ の単調性（$r_1 \leq r_2, s_1 \leq s_2 \Rightarrow F_{r_1,s_1}(x) \leq F_{r_2,s_2}(x)$）は非常に有用な性質であり，この性質を用いれば，今

までは個別に考えなくてはならなかった作用素平均（に対応する表現関数）の間に成り立つ次の不等式が容易に求められる；

$$\frac{2x}{x+1} \;\le\; \frac{x\log x}{x-1} \;\le\; x^{\frac{1}{2}} \;\le\; \frac{x-1}{\log x} \;\le\; \exp\left\{\frac{x\log x}{x-1}-1\right\} \;\le\; \frac{x+1}{2}.$$

また，$\{F_{r,s}(x)|\ r,s\in[-1,1]\}$ はよく知られた幾つかの 1-パラメータの作用素単調関数族を内包している．例えば，$s=1,-1$ の場合をそれぞれ考え，2 つの関数族の形が合うようにパラメータの範囲を整えれば，Power difference mean（の表現関数）におけるパラメータの最適な範囲 $-1\le r\le 2$ を得る．以前の手法ではこの完全なパラメータの範囲を導くことはできなかったことに注意すると，本学位論文で新たに確立された手法が以前の手法より優れていることがわかる．その他には，$r=s$ とおけば Power mean が，$r=1, s=p-1$ とおけば Stolarsky mean がそれぞれ得られる．これらは表現関数

$$(F_{r,r}(x)=)P_r(x):=\left(\frac{x^r+1}{2}\right)^{\frac{1}{r}},\ (F_{1,p-1}=)S_p(x):=\left(\frac{p(x-1)}{x^p-1}\right)^{\frac{1}{1-p}}$$

にそれぞれ対応する作用素平均である．Power mean の最適なパラメータ範囲は $-1\le r\le 1$ であり，$\{F_{r,r}(x)|\ r\in[-1,1]\}=\{P_r(x)|\ r\in[-1,1]\}$ はこの範囲を完全に導いている．一方，Stolarsky mean の最適なパラメータ範囲は $-2\le p\le 2$ であり，$\{F_{1,p-1}(x)|\ p-1\in[-1,1]\}=\{S_p(x)|\ p\in[0,2]\}$ はこの範囲を完全には導けていない．この事実から，関数族 $\{F_{r,s}(x)\}_{r,s\in[-1,1]}$ の作用素単調性が成り立つパラメータの範囲は最適ではない，即ち拡張が可能であることがわかる．

それでは，$\{F_{r,s}(x)|\ r,s\in[-1,1]\}$ の作用素単調性が成り立つパラメータの範囲はどこまで拡張可能なのだろうか？このことを考える前に，関数 $F_{r,s}(x)$ を以下のように書き換える；

$$F_{r,s}(x)=\left(\frac{r(x^{r+s}-1)}{(r+s)(x^r-1)}\right)^{\frac{1}{s}} \xrightarrow{r\to p,\ s\to\alpha-p} S_{p,\alpha}(x):=\left(\frac{p(x^\alpha-1)}{\alpha(x^p-1)}\right)^{\frac{1}{\alpha-p}}.$$

これ以降は書き換えられた関数 $S_{p,\alpha}(x)$ について考える．Theorem 3 で示された $\{F_{r,s}(x)|\ r,s\in[-1,1]\}$ のパラメータの範囲から，関数 $S_{p,\alpha}(x)$ は

$$p\in[-1,1] \text{ かつ } p-1\le\alpha\le p+1$$

のときに作用素単調関数であることがわかる．また，渚-和田 (2015) の研究結果から，$S_{p,\alpha}(x)$ は

$$(p,\alpha)\in\{(p,\alpha)\in\mathbb{R}^2|0\le p\le 1, -1\le\alpha\le 0 \text{ かつ } \alpha\le p-1\}$$

の場合にも作用素単調であることがわかる．本学位論文では，最適なパラメータの範囲をもつ関数族 $\{S_p(x)|\ p\in[-2,2]\}$ などを用いて，$S_{p,\alpha}(x)$ の作用素単調性が成り立つパラメータの範囲を次のように拡張した；

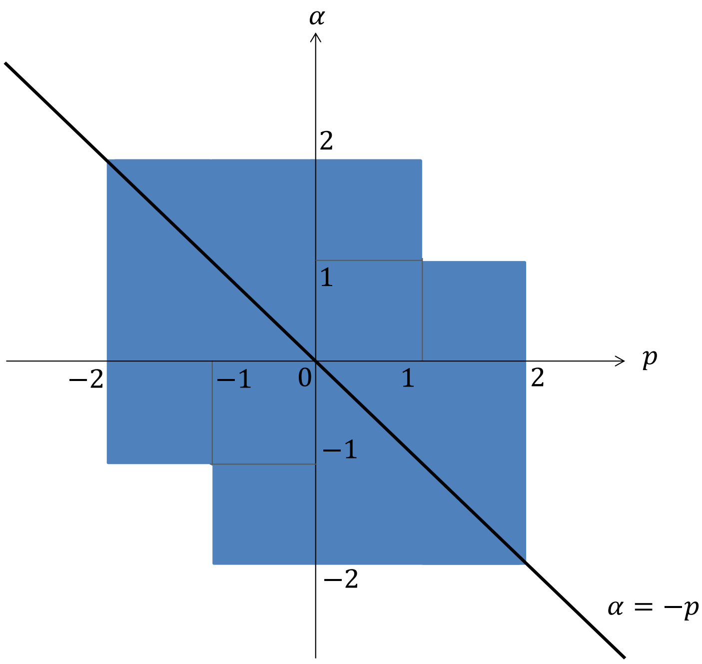
Theorem 5.

$$S_{p,\alpha}(x) = \left(\frac{p(x^\alpha - 1)}{\alpha(x^p - 1)} \right)^{\frac{1}{\alpha - p}} \quad (x > 0)$$

とする．このとき，$(p, \alpha) \in \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ ならば，$S_{p,\alpha}(x)$ は作用素単調関数である．ここで，

$$\mathcal{A} = \big([-2, 1] \times [-1, 2]\big) \cup \big([-1, 2] \times [-2, 1]\big) \cup \big\{(p, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; \alpha = -p\big\}$$

である．



また，前述の結果を用いた考察により，これ以上範囲を拡張できない部分があることもわかった．

$\alpha = p$ の場合は，

$$S_{p,p}(x) := \lim_{\alpha \to p} S_{p,\alpha}(x) = \exp\left\{ \frac{1}{p} \left(\frac{x^p \log x^p}{x^p - 1} - 1 \right) \right\}$$

のように極限で定められる．この関数は指数関数 $\exp(x)$ との合成関数であり，従って $S_{p,p}(x)$ の作用素単調性を調べるために Theorem 1 を使うことができる．その結果，$|p| > 1$ の場合，$S_{p,p}(x)$ 作用素単調でないことが導かれた．