氏名（本籍）　宇田川　陽　一（千葉県）
学位の種類　博士（理学）
学位記番号　甲第1126号
学位授与の日付　平成29年3月18日
学位授与の要件　学位規則第4条第1項該当
学位論文題目　**Construction and investigation of parameterized families of operator means**
（パラメータ付けされた作用素平均の族の構成と考察）

論文審査委員　（主査）教授　佐藤　洋祐
教授　江川　嘉美　　教授　宮岡　悦良
准教授　小谷　佳子　　准教授　柳田　昌宏

論文内容の要旨

本論文ではパラメータ付けされた作用素平均の族を構築する方法とそれを用いた具体的な族の構築、及びその族の考察結果について述べている。

関数解析学における作用素論では、ヒルベルト空間上の内積によって定まる作用素の間の順序 $0 \leq B \leq A$ を $f(B) \leq f(A)$ のように保存するような関数、作用素単調関数の研究や、「平均」（英訳で mean）と呼ばれる2変数実数値連続関数の理論を作用素へと一般化した作用素平均についての研究が行われてきた。そして、作用素単調関数と作用素平均の間の関係性が1980年に久保—安藤によって示され、両者の研究はより進むこととなった。

作用素単調関数は，複素平面における上半平面上の点を上半平面に写すような解析接続を持つような関数（Pick 関数と呼ぶ）によって特徴付けられることがレウナーによって示されている．著者はこの特徴付けとオイラーの公式を用いて，合成関数 $\exp\{f(x)\}$ が作用素単調関数となるための必要十分条件を得た；

定理 1. $f(x)$を$(0,\infty)$上の連続関数とする．もし$f(x)$が定数関数でも対数関数$\log x$でもないならば，このとき以下は同値；
(1) $\exp\{f(x)\}$は作用素単調関数,
(2) $f(x)$は作用素単調関数で，かつ

$$0 < v(r,\theta) < \theta$$

を満たすような解析接続が存在する．ここで，

$$f\left(re^{i\theta}\right) = u(r,\theta) + i\,v(r,\theta)\ (0 < r, 0 < \theta < \pi)$$

であるとする．

指数関数 $\exp(x)$ が作用素単調関数でないことはよく知られており，指数関数との合成関数 $\exp\{f(x)\}$ が作用素単調関数であるかどうかを判定するのはとても難しかった．しかし，この結果を用いれば関数の虚部についての簡単な計算によって$\exp\{f(x)\}$の作用素単調性を判定できるようになった．本論文ではこの結果を用いていくつかの例を与え，さらにその結果を発展させて定理 1. を満たすような関数族を求めた；

定理 2. 関数族 $DL_p(x)$ を以下のように定める；

$$DL_p(x) = \frac{x^p \log x}{x^p - 1}.$$

このとき，すべての $p \in [-1,1] \setminus \{0\}$ について$\exp\{DL_p(x)\}$ は作用素単調関数である．

また，著者は久保—安藤理論に基づき作用素平均（及びそれに一対一に対応する作用素単調関数）についての研究を行い、重み付き作用素平均（と一対一に対応する重み付き作用素単調関数）の重みを積分することによりパラメータ付けされた作用素平均の族を構築する新たな方法を以下のように確立した；

次の補題は内山によるものである．

補題 C. 自然数 k について，$u(x)$ を

$$u(x) = r\prod_{i=1}^{k}(x + a_i)^{p_i}, (0 \le a = a_1 < a_2 < \cdots a_k = b, 1 \le p_1, 0 < p_i, 0 < r)$$

によって定まる $[0,\infty)$ 上の正値関数とする．この時，$u(x)$ は$[-a,\infty)$ 上の狭義単調関数であり，更に逆関数 $u^{-1}(x)$ は $[0,\infty)$ 上の作用素単調関数となる．

次の結果はこの補題を用いることにより得られる．

定理 3. μ を $[0,1]$ 上の確率測度とし，$\{f(\alpha;x) | \alpha \in [0,1]\}$ を $x \ge 0$ の正値作用素単調関数の族とする．各 $x \ge 0$ について，写像 $\alpha \mapsto f(\alpha;x)$ が連続であると仮定する．このとき，

$$F(x) = u\left(\int_0^1 u^{-1}\left(f(\alpha;x)\right) d\mu(\alpha) + b - a\right)$$

は作用素単調関数である．

上記の結果ではいくつかのべき乗関数の積を用いているが，特に$k = 1$ としてさらに

$$f(\alpha;x) = \left((1-\alpha) + \alpha x^r\right)^{\frac{1}{r}}\ (-1 \le r \le 1)$$

と置くことにより，2つのパラメータを持つ作用素単調関数の族を得た；

定理 4. $r \in [-1,1]$ と $s \in [-1,1]$ に対して，

$$F_{r,s}(x) = \left(\int_0^1 \left((1-\alpha)+\alpha x^r\right)^{\frac{s}{r}} d\alpha\right)^{\frac{1}{s}} = \left(\frac{r(x^{r+s}-1)}{(r+s)(x^r-1)}\right)^{\frac{1}{s}}$$

は $x \geq 0$ について作用素単調関数である．さらに，固定した各 $x \geq 0$ について，$F_{r,s}(x)$ は $r \in [-1,1]$ と $s \in [-1,1]$ に対して単調に増加する．

本論文では，この族が1つのパラメータを持つ既存の作用素平均をいくつか補間していることを示している．その中の一つがストラルスキー平均（に対応する作用素単調関数）

$$S_p(x) = \left(\frac{p(x-1)}{(x^p-1)}\right)^{\frac{1}{1-p}}$$

であるが，$F_{r,s}(x)$ から導かれるパラメータの範囲が $0 \leq p \leq 2$ であるのに対し中村が 1989 年に示した最適な範囲は $-2 \leq p \leq 2$ であり，従って上記で求められた $F_{r,s}(x)$ のパラメータの範囲 $r \in [-1,1], s \in [-1,1]$ は最適ではないことがわかった．この結果を受けて著者は，$F_{r,s}(x)$ を以下のように

$$S_{p,\alpha}(x) = \left(\frac{p(x^\alpha-1)}{\alpha(x^p-1)}\right)^{\frac{1}{\alpha-p}}$$

と置き換え，レウナーの特徴付けを用いて作用素単調性が成り立つパラメータの範囲を以下のように拡張した；

定理 5.

$$S_{p,\alpha}(x) = \left(\frac{p(x^\alpha-1)}{\alpha(x^p-1)}\right)^{\frac{1}{\alpha-p}} (x>0)$$

とする．この時，$(p,\alpha) \in \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ ならば $S_{p,\alpha}(x)$ は作用素単調関数である．ここで，

$$\mathcal{A} = ([-2,1]\times[-1,2]) \cup ([-1,2]\times[-2,1]) \cup \{(p,\alpha) \in \mathbb{R}^2 | \alpha = -p\}$$

である．

上記の定理におけるパラメータの範囲は，$F_{r,s}(x)$ から直接導かれるパラメータの範囲

$$p-1 \leq \alpha \leq p+1, p \in [-1,1]$$

と比べ大幅に拡張されている．また，$\alpha \to 0$ としたときに

$$\lim_{\alpha\to 0} S_{p,\alpha}(x) = \exp\{DL_p(x)\}$$

となることから，定理 1. の結果を用いて，例えば $\alpha \to 0, |p| > \frac{5}{4}$ の場合には $S_{p,\alpha}(x)$ は作用素単調性を持たないことがわかる．

論文審査の結果の要旨

本論文は，作用素単調関数を導出する新たな方法を提案し，また，その方法で得られた新たな作用素単調関数の族の具体例について考察したものであり，４つの章から構成されている．

第１章は序論であり，本論文の研究背景と位置づけについて述べている．単調増加な実関数が必ずしも作用素単調とは限らず，そのような代表例として指数関数がある．従って作用素単調関数と指数関数の合成は必ずしも作用素単調でないが，identric mean の表現関数が指数関数との合成に対して作用素単調性を維持する関数の例を与えていることを指摘して，第２章への動機付けとしている．また，算術平均，幾何平均，調和平均を含む作用素平均の族としてよく知られている冪乗平均（power mean）を紹介することにより，作用素単調関数の族について議論する第３～４章への動機付けとしている．

第２章では，前述のように，指数関数と合成した際に作用素単調であるような関数について議論している．まず，作用素単調関数を Pick 関数（上半平面を上半平面に写すような解析接続をもつ関数）により特徴付ける Löwner の定理を用いることにより，定理１として，このような関数の新たな特徴付けを与えている．この結果により，関数（の上半平面への解析接続）の虚部が明示的に得られる場合は，指数関数と合成した際の作用素単調性を容易に確かめることができる．関連する結果として Hansen によるものがあるが，それと比較した場合，必要条件としては強く，優位性は明らかである．また，十分条件としては，実際に用いた際により簡潔な不等式が得られるような例が紹介されている．以上のことから，本論文で与えられた特徴付けには，さらなる応用が期待される．また，それらの例を定理１の観点から一般化することにより，定理２として，新たな作用素単調関数の具体例を挙げている．

第３章では，作用素単調関数を導出する新たな方法と，その応用例を示している．与えられた作用素単調関数のパラメータ族に対して，その関数をパラメータについて積分することにより，新たな作用素単調関数族を得る方法がよく知られている．例えば，重み付き冪乗平均（weighted power mean）を重みについて積分することにより，冪乗差平均（power differnce mean）を得ることができる．本論文では，さらに作用素単調関数に関する内山の結果を用いることにより，定理３において，この方法を発展させている．この定理の証明は，複素平面における幾何学的な考察に基づく，巧妙なものである．この定理により従来の方法では得られない新たな作用素単調関数が得られるが，そのような例として，定理４において，前述の冪乗平均，冪乗差平均（power differnce mean）に加え，Stolarsky 平均も含むような，新たな作用素単調関数の族を与えている．そして，この作用素単調関数族の観点から見ることによって，算術・幾何・調和平均，さらに対数平均，identric mean の順序を見通しよく示している．このことから，この作用素単調関数族は今後の作用素平均の研究に新たな視点をもたらすことが期待できる．

第４章では，この作用素単調関数族が作用素単調であるようなパラメータの範囲につ

いて考察している．まず，類似の関数についての作用素単調性を考察した渚–和田の結果と，さらに Löwner-Heinz の定理を適用することにより得られる範囲を示している．次に，この作用素単調関数が Stolarsky 平均の表現関数の積で表せることに着目することにより，Löwner の定理から得られる範囲を示している．そして，この作用素単調関数が変数変換により２つのパラメータについて対称な形に表すことができることを示し，このことから範囲を対称的に拡張している．また，第２章の結果を用いることにより，作用素単調性が成り立たないパラメータの範囲を示している．本論文では，この作用素単調関数に対する最適なパラメータの範囲は得られていないが，これらの結果から最適性が肯定的に予想されることになる．

本論文で示された作用素単調関数の導出法と作用素単調関数族を用いることにより，新たな作用素単調関数と作用素平均の具体例が得られることが期待され，また作用素単調関数全体，作用素平均全体の構造を理解する上で有用であると考えられる．以上のように，本論文は，作用素単調関数および作用素平均の研究に対して，大きな貢献をもたらすものである．よって，本論文は学位（博士）論文として十分価値があると認められる．