加賀谷氏の論文について

加賀谷勇雄氏から獨創的研究のお便りを頂いたので、私も数回通信を交わしたが、氏は論文の発表にあたって、「最高でしかも簡潔な証明は、私の現在の実力では到底産み出せないものであり、そのままそっくり用いることは、私の良心ではできないのです」といわれた。私もどうしたものか、いろいろと考えてみたが、多少とも読者諸君のご参考になる点もあろうかと思ったので、私が協力した点

まず a と b が等しいとき，k を任意の整数として $a=2k,\ b=2k,\ f=k$ は (1)の整数解である。これから後は a, b を異なる整数として考えよう。

とその他の結果の一部を，簡単に書きとめることにした。

ゴシ

1　算術的解法．加谷氏の問題は，つまり「二つの正の整数 a, b の積が，その和 $a+b$ で割り切れるための条件」を求めることである。

$$f=\frac{ab}{a+b}\ \cdots\ (1)$$

と書けるから，一組の整数解を (a, b, f) とすれば，任意の整数 K を掛けた (Ka, Kb, Kf) もまた (1)の整数解となる。

よって これからは，その三つの数の間に 1 より大きな公約数を持たない整数解 (a, b, c) のみを求めることにしよう。

いま二つの整数 a, b の最大公約数を d とし、$a=dm$, $b=dn$ とおけば、m と n とは互いに素な整数である。そして

$$f=\frac{d\cdot mn}{m+n}\quad\cdots\cdots(2)$$

m と n とが互いに素であるから、$m+n$ と m とは互いに素であり、$m+n$ と n とも互いに素である。よってよく知られた定理によって、$m+n$ と積 mn とは互いに素である。ところで(2)において f が整数であるためには、$d\cdot mn$ が $m+n$ で割り切れなければならぬ。ところが一方の因数 mn と $m+n$ とは互いに素であるから、他の因数 d が $m+n$ で割り切れなければならぬ。だから $d=r(m+n)$

(rは整数)とおけば，(2)から $f=rmn$，

また一方 $a=rm(m+n)$，$b=rn(m+n)$ となる。

ところで a, b, f の間には1より大きな公約数がないと仮定したのであるから，$r=1$ でなければならぬ。よって求めんとする整数解は

$$a=(m+n)m,\quad b=(m+n)n,\quad f=mn \cdots (3)$$

の形でなければならない。

逆に，m と n を互に素なる任意の整数とするとき，(3)によって与えられた一組の整数 a, b, c は，(1)を満足する。これは代入してみればすぐにわかる。それで われわれの問題は完全

~~$a=2k,\ b=2k,\ f=k$ を除くと~~

それで

い解かれた。(1)の最も一般的な整数解は(加賀谷氏の公式)

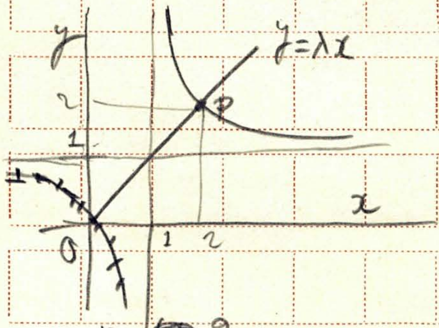
$$a=k(m+n)m,\quad b=k(m+n)n,\quad f=kmn\ \cdots\cdots(4)$$

によってあたえられる。ただし m と n は互に素なる任意の整数、k はまったく任意の整数である。この公式で、もし $m=n=1$ とおけば、$a=2k,\ b=2k,\ f=k$ となって、これは一つの特異な解であった。

2. 幾何学的解法。

これは $a^2+b^2=c^2$ の整数解すなわちピタゴラス数(本誌 No. 14, 昭和31年2月号、加賀谷氏の論文参照)についての、~~タイニの方法~~ (Klein, Elementar-

Mathematik vom höheren Standpunkte aus, I, 1908) を、そのまま使ったもので、何も新工夫をしたものではない。



$$f=\frac{ab}{a+b} \quad \text{----} \; (1)$$ において、

$\frac{a}{f}=x$, $\frac{b}{f}=y$ とおけば、(1) は

$$xy=x+y \quad \text{----} \; (2)$$ となる。これは

$(x+1)(y+1)=1$ とも書ける。いま x, y (共に正) を点の直角座標と考えると、(2) は原点 $(0,0)$ を通り、$x=1$, $y=1$ を漸近線とする直角双曲線の一分枝となる。そこでいま、この双曲線上にあるすべての有理点——x と y とが共に有理座標

7

数となる点——を求めてみよう.

まず点(x, y)を双曲線上の一つの有理点とすれば, xとyとは共に有理数であるから, $\frac{y}{x}$もまた一つの有理数となる. これをλとおけば $y=\lambda x$ である. よって この有理点(x, y)は, 直線 $y=\lambda x$ と双曲線(2)との交点P, すなわち $x=\frac{1+\lambda}{\lambda}$, $y=1+\lambda$ ……(3) によって与えられる. 逆に, λを任意の有理数とすれば, (3)で示される点は, 双曲線上の有理点である. よって双曲線(2)の上のすべての有理点は, (3)によって与えられる(λは有理数).

いま~~(3)における~~有理数 λ を既約分数に直して $\lambda=\frac{n}{m}$ とおけば，(3) は $x=\frac{m+n}{n}$，$y=\frac{m+n}{m}$ となり，さらに x, y を a, b, f で表わせば，

$$\frac{a}{(m+n)m}=\frac{b}{(m+n)n}=\frac{f}{mn}\ (=k\ \text{とおく})$$ (m, n は互いに素なる整数)

となって，加賀谷氏の公式と一致する

3. 文献と問題の擴張

ここまで出来てから文献を調べてみると，アメリカの書物 R. D. Carmichael, Diophantine analysis, New York (1915), p. 115 に，

「ディオファントス方程式 $xy=z(x+y)$ を解

(1881)

け. 「Mathesis (4), vol. 3」という問題が載っており、その解はついていないが、ベルジウムの有名な初等数学雑誌に(多分1913年)出たものであることがわかった。この問題ははじめ

~~〔わたしのころのマテシスは未だ手に入れないある〕と記憶している。〕~~

これは実質上加賀谷氏の問題とおなじものであるが、加賀谷氏の再発見は、レンズの性質から考えても、十分に意味があると信じる。またピタゴラス数の性質についてはずいぶん種々の研究が行われたが、加賀谷氏の数についても、その諸性質の研究が望ましいと思う。

実用性

10

~~(1891年に試みられたものである。までで)~~

その行きがかって私は、Kronecker, Vorlesungen über Zahlentheorie I (1901), p.34 において、クロネッカーがクラインよりずっと前に、実質的にクラインと全く同様の方法で $x^2+y^2=1$ の有理解を求めるばかりでなく、この方法はもっと一般に、代数的有理曲線(この上の点の座標が、ある助変数の有理函数とに表わし得る曲線)や、代数的有理曲面に応用しえることを述べていることを知った。上の有理点をすべて求める問題

~~私は三、四の折りにふれて試みを~~、人を困らせるような数論的問題を、~~即座に~~いくらでも作られることに、おどろいた。

高い立場から見れば、

2/ こういう ~~意味でも~~

(ピタゴ
ラス学派や加賀谷氏の問題は、
と共に
~~その~~ 簡単な話ではないが、
といえよう。

実例であっても

しかし ~~意味~~ ある興味
それは もっとも

これより以上の
ことを申し上げる
必要はないと思うが、