

氏名（本籍） ^{あま} ^り ^{ゆう} ^き 甘 利 悠 貴（東京都）
学位の種類 博士（理学）
学位記番号 甲第 1188 号
学位授与の日付 2019 年 3 月 19 日
学位授与の要件 学位規則第 4 条第 1 項該当
学位論文題目 $SU(N)$ 対称性をもつ非線型シグマ模型におけるソリトン解

論文審査委員 （主査）教授 齋藤 晃一
教授 半澤 克郎 教授 鈴木 英之
准教授 澤渡 信之 教授 東平 光生
北里大学 理学部 物理学科 准教授 中村 厚

論文内容の要旨

本論文は、 $SU(N)$ 対称性をもつ非線型シグマ模型におけるトポロジカルソリトンについての研究成果をまとめ、詳細な議論を加えたものである。 $N \geq 3$ では、 $SU(N)$ 対称性をもつ非線型シグマ模型にいくつかの種類が存在するが、ここでは特に 2 種類の模型—ターゲット空間が複素射影空間 CP^{N-1} 、そして旗多様体 F_{N-1} である非線型シグマ模型—を扱う。それらをそれぞれ、 CP^{N-1} 非線型シグマ模型、 F_{N-1} 非線型シグマ模型と呼ぶ。ただし $N=2$ の場合には、両者ともよく知られた $O(3)$ 非線型シグマ模型に一致する。

$SU(N)$ 対称性をもつ非線型シグマ模型は、さまざまな基礎理論の有効模型として盛んに研究されている。1 次元格子または 2 次元正方格子上の強磁性または反強磁性 $SU(2)$ Heisenberg 模型の連続極限において、 $O(3)$ 非線型シグマ模型を導出することができる。1 次元格子または 2 次元三角格子上の $SU(3)$ Heisenberg 模型の連続極限では、強磁性の場合に CP^2 非線型シグマ模型、反強磁性の場合に F_2 非線型シグマ模型が導出できることが知られている。さらに 3 次元立方格子においても、低エネルギーにおける秩序変数空間の考察から、それらの模型が連続極限において現れると考えられる。また、Faddeev と Niemi らによって、 $SU(2)$ Yang-Mills (YM) 理論の低エネルギー極限において、 $O(3)$ 非線型シグマ模型が導出できることが示されている。より高次の $SU(N)$ YM 理論から有効模型を導出することは未だなされていないが、低エネルギー領域において $SU(N)$ YM 理論が持つ自由度

に関する議論から、 CP^{N-1} 非線型シグマ模型または F_{N-1} 非線型シグマ模型のどちらかが、その有効模型であると考えられている。

SU(2) Heisenberg 模型や SU(2) YM 理論において、ソリトンが重要な役割を果たすことは 40 年以上前から認識されている。SU(2) Heisenberg 模型や SU(2) YM 理論の有効模型である O(3) 非線型シグマ模型には、大きく分けて 2 種類のソリトン解が存在する。1 種類目は、平面上に局在したソリトンもしくはそれに並進対称性を持たせた柱体である。それらのうち、平面方向のスケール不変性を持つものを 2 次元インスタントン、スケール不変性が破れているものを baby skyrmion と呼ぶ。baby skyrmion は $Fe_{0.5}Co_{0.5}Si$ などの磁性体中に現れることが実験により確認されており、工業的な応用も期待されている。2 つ目は、Hopfion と呼ばれる 3 次元空間中で局在したソリトンで、結び目の構造を持つ。Hopfion は、QCD におけるソリトンであるグルーボールを記述する有力な候補と見なされている。

SU(2) よりも高い対称性である SU(N) 対称性をもつ Heisenberg 模型や YM 理論のソリトンの重要性が以前にも増して高まっている。近年、SU(N) スピン自由度をもつ系が実験により実現された。そうした実験技術の発展によって、これまで単なる数学的な拡張であると考えられていた SU(N) Heisenberg 模型に、物理的な応用の可能性が開けた。SU(N) Heisenberg 模型におけるソリトンも、将来的に実験で観測できる可能性がある。また、O(3) 非線型シグマ模型の Hopfion は、グルーオンの凝縮体であるグルーボールを記述すると考えられてきたが、グルーオンはカラー SU(3) 対称性を持っているため、SU(3) 対称性をもつ非線型シグマ模型における Hopfion がグルーボールを記述すると考えることがより自然である。SU(3) 対称性をもつ非線型シグマ模型の有効模型における Hopfion は、それ自身がグルーボールの性質の理解を深めることに貢献すると同時に、格子ゲージ計算などのシミュレーションにおける初期配置として有望なものであると考えられる。

以上に述べたような、SU(N) 対称性をもつ非線型シグマ模型におけるソリトンの重要性の高まりから、これらのソリトンの構築とその数学的な性質を明らかにすることを目的に研究を行った。本論文では、我々が構築した 4 種類のソリトン— CP^{N-1} 非線型シグマ模型における baby skyrmion と F_{N-1} 非線型シグマ模型における 2 次元インスタントン, baby skyrmion, Hopfion—についての構築方法とその性質について順々に議論していく。

これまで、 CP^{N-1} 非線型シグマ模型にはスケール不変性を持ったソリトン、つまり 2 次元インスタントンしか知られていなかった。現実中存在するソリトンにはスケール不変性を破ったものであるため、スケール不変性を破ったソリトン解の構築が、物理的応用を目指す際の第一歩となる。そのため、我々は CP^{N-1} 非線型シグマ模型における baby skyrmion の構築を行った。非線型シグマ模型のスケール不変性を破るもっとも単純な方法は、Skyrme 項と呼ばれる高次微分項と、ポテンシャルと呼ばれる微分を含まない項を加えることである。我々は、模型のもつ対称性を考慮してポテンシャルを構成し、そのポテンシャルの下で運動

方程式を数値的に解くことで baby skyrmion を構築した。さらに、得られた baby skyrmion のもつエネルギーについて詳細に議論した。

F_{N-1} 非線型シグマ模型におけるソリトンは、これまでほとんど知られていなかった。まず我々は、 F_2 非線型シグマ模型に単純な埋め込み解ではない 2 次元インスタントンが存在することを、運動方程式を厳密に解くことで示した。一般に、エネルギーの下限がトポロジカルな項で与えられている場合、その下限を満たす条件である 1 階の連立微分方程式を解くことでソリトンが得られる場合があることが知られている。しかし一方で、 F_2 非線型シグマ模型のエネルギーの下限は、トポロジカルでない項で与えられている。我々は、それにもかかわらず 1 階の連立微分方程式を解くことで厳密解が得られることも示した。ただしこの場合には、エネルギーの下限を満たす条件だけでなく、ターゲット空間の振れがゼロとなる条件 (torsion free 条件) との連立方程式になる。

F_2 非線型シグマ模型においても、Skyrme 項とポテンシャルを加えて、baby skyrmion を構築した。ポテンシャルは、 CP^{N-1} 非線型シグマ模型の研究を通して得られた知見をもとに構成した。Skyrme 項とポテンシャルを加えると、運動方程式は厳密には解けなくなる。しかし、torsion free 条件を満たすような配位を考えると、運動方程式は CP^1 非線型シグマ模型に Skyrme 項と、あるポテンシャルを加えた模型の運動方程式へと簡略化される。我々は、この簡略化された方程式を数値的に解き、 F_2 非線型シグマ模型における baby skyrmion を構築した。

F_2 非線型シグマ模型において Hopfion を構築するには、Skyrme 項を加える必要がある。その模型は Faddeev と Niemi によって 1998 年に提案されたが、主として数学的な困難から、解の導出はされていない。我々は、2 次元インスタントンや baby skyrmion の研究をもとに、「 F_2 非線型シグマ模型においてソリトンは torsion free 条件を満たすときに得られる」という仮説を立てた。その仮説に基づき、ここでも torsion free 条件を満たす配位を考えた。その配位を運動方程式に代入すると、 $O(3)$ 非線型シグマ模型に Skyrme 項を加えた模型、すなわち Skyrme-Faddeev (SF) 模型の運動方程式に帰着することを見出した。帰着した方程式における解はすでに知られているため、我々は F_2 非線型シグマ模型において Hopfion が存在することを確認することができた。また、その配位を代入したエネルギー汎関数が、SF 模型のエネルギーに比例することを示した。

上記のように、本論文では CP^{N-1} 非線型シグマ模型と F_{N-1} 非線型シグマ模型におけるソリトン解の構築法と数学的な性質について議論する。 CP^{N-1} 非線型シグマ模型では、安定なソリトンを構築するために必要なポテンシャルの構成法を主に議論する。 F_{N-1} 非線型シグマ模型では、torsion free 条件を課すことで、運動方程式が簡略化され、その方程式を解くことでソリトンを構築できることを示す。本論文では、torsion free 条件がもつ数学的な意味についても考察する。

本研究で得られたソリトンは、冷却原子を用いた実験において将来的に観測されると期待され、 $SU(N)$ 対称性をもつ磁性体における秩序相の理解を深めることに寄与するだろう。さらに、今後 F_2 非線型シグマ模型における Hopfion を用いて、グルーボールの性質をより明らかにすることも期待される。また、本研究で得られたポテンシャルの構成法や torsion free 条件などのソリトンの構築方法は、様々なソリトン模型に適応できると考えられる。

論文審査の結果の要旨

学位申請者は、2016年4月に理工学研究科物理学専攻博士後期課程に進学し、現在に至っている。その間、トポロジカルソリトン解に関する研究を継続的に行っており、2019年1月現在、それらの成果をまとめた6編の論文が欧文誌に掲載されている。本学位論文は、そのうちで特殊ユニタリー群 $SU(N)$ の対称性を持つ非線型シグマ模型のトポロジカルソリトン解の構成に関する研究成果をまとめたものである。

本学位論文は、 $SU(N)$ のいくつかの商群における非線型シグマ模型の諸特性と、それらのトポロジカルソリトン解の構成法について詳細に述べたものである。非線型シグマ模型は、様々なエネルギースケールの広範な物理現象を記述する基礎理論に対する有効理論である。学位申請者は、 $SU(N)$ の商群の中でも特に重要とされる複素射影空間 $CP^{N-1} = SU(N)/SU(N-1) \times U(1)$ と、旗多様体 $F_{N-1} = SU(N)/U(1)^{N-1}$ を選び、それらのトポロジカルソリトン解の構成について議論を行った。前者についてはいくつかの先行研究が知られているが、本学位論文においては、特に新たなトポロジカルソリトン解の探索とそれらの量子的な特性について、集団座標量子化という手法に基づいた解析がなされている点に新規性がある。一方、旗多様体における非線型シグマ模型については、そもそも先行研究自体がほとんど存在しない。したがって、本論文において議論されている解やその構成法は先駆的なものであり、高く評価できる。さらには、申請者が主張する、トポロジカルな解の存在と多様体のケーラー的な特性、またはトージョンフリー条件の間の深い関連は、トポロジカルソリトンの研究の全般における、新たな視点と理解を与えるものとして評価できる点である。

本論文の第1章では、トポロジカルソリトン解に関する一般的な議論と、基礎理論との関連性などについて詳細な解説が与えられている。第2章では、よく知られた CP^{N-1} のインスタントン解の構成法についてページが割かれている。第3章では、第2章の模型において、解のスケール不変性を破るような高次の微分項 (Skyrme 項) とポテンシャルを加えた新たな模型 (これは Skyrme-Faddeev 模型と総称される) を構築し、この模型の解を数値的に導出している。特にポテンシャルの構成法が独自なものであると言える。

第4章からは、旗多様体 F_{N-1} 上の非線型シグマ模型とそれらの解の構成法について議論がなされている。この章では、最初に非線型シグマ模型のラグランジアン の定義と、解の

パラメトリゼーションの具体的な方法が述べられている。先行研究では BPS の方法による埋め込み解が提唱されているが、本論文にも述べられているように、これは CP^1 の解を単純に埋め込んだものに過ぎず、意味のある解ではない。申請者は、オイラーラグランジュ方程式の解を探索するという方針に基づいて新たな解を見出すことに成功した。興味深いことに、これらの解は、BPS 解と同様にエネルギーの下限が存在するが、それはトポロジーにより規定されない。そのため、下限を満たす配位はオイラーラグランジュ方程式の解に限定されず鞍点解となる。この鞍点解は、トージョンフリー条件を満たすので、座標空間からケーラー多様体への写像によるものである。このことは、トポロジカルソリトン解が、いかなる条件のもとで存在するのかということに関する本質的な知見を含んでおり、評価に値するものである。

第 5 章では、第 4 章の模型に Skyrme 項とポテンシャルを加えた Skyrme-Faddeev 模型について議論している。ここでもトージョンフリー条件下で配位を数値的に導出している。これらは CP^1 のソリトン解と多くの性質を共有している点特徴的である。

第 6 章では、以上の成果を踏まえて、3 次元空間におけるソリトン解である Hopfion 解の構成法について述べられている。

以上のように、本学位論文では、解を構成するための様々な定義や手法などの数学的な議論に多くのページが割かれている。トージョンフリー条件は解を得るための重要な前提であることが分かったが、この物理的な意味はここでは明らかにされていない。申請者の見出した様々な解と現実の物理現象との対応について、議論がやや手薄であるという印象を受けるものの、 $SU(N)$ におけるソリトン解という、古くから知られているにもかかわらず先行研究がほとんど行われていない困難な課題について、独自の着眼点と独創的な手法に基づいて一定の成果を得たという点は十分評価に値するものである。なお、本論文の研究課題は、日本学術振興会の特別研究員に採択された内容である。よって、本論文は博士（理学）の学位論文として十分に価値があるものと認められる。