

学位申請論文

$SU(N)$ 対称性をもつ非線型シグマ模型に  
おけるソリトン解

2019年3月

東京理科大学大学院理工学研究科物理学専攻  
甘利 悠貴

# 目次

はじめに	1
<b>第1章</b> イントロダクション	<b>4</b>
1.1 ソリトンとは	4
1.1.1 ソリトンと自発的対称性の破れ	5
1.2 ソリトンとトポロジー	7
1.2.1 トポロジカルな安定性	7
1.2.2 ホモトピー	8
1.2.3 ソリトンの分類	10
1.3 Derrick の定理	13
1.4 $O(3)$ 非線型シグマ模型におけるソリトン解	15
1.4.1 Belavin-Polyakov インスタントン	16
1.4.2 Baby skyrmion	19
1.4.3 Hopfion	25
<b>第2章</b> $CP^{N-1}$ 非線型シグマ模型におけるインスタントン解	<b>30</b>
2.1 $CP^{N-1}$ 非線型シグマ模型におけるインスタントン解	30
2.1.1 $CP^{N-1}$ 非線型シグマ模型	30
2.1.2 インスタントン解	32
2.1.3 Din-Zakrzewski 解	34
2.2 $CP^{N-1}$ extended Skyrme-Faddeev 模型	35
<b>第3章</b> $CP^{N-1}$ Skyrme-Faddeev 模型における baby skyrmion	<b>41</b>
3.1 模型の定式化	41
3.1.1 エネルギー	45
3.2 ポテンシャルの構成と数値解	46
3.2.1 $N = 3$ の場合	48
3.2.2 $N > 3$ の場合	51
3.3 議論	53
<b>第4章</b> $F_{N-1}$ 非線型シグマ模型におけるインスタントン解	<b>58</b>
4.1 $F_2$ 非線型シグマ模型	59
4.1.1 ラグランジアン	59
4.1.2 場のパラメトリゼーション	61
4.1.3 位相不変量	62

---

4.2	BPS の方法による埋め込み解 . . . . .	65
4.3	Euler-Lagrange 方程式の解 . . . . .	68
4.4	解の持つエネルギーの特性 . . . . .	75
4.5	幾何学的解釈 . . . . .	78
4.6	4 章のまとめ . . . . .	80
<b>第 5 章</b>	<b><math>F_{N-1}</math> baby Skyrme 模型における baby skyrmion</b>	<b>81</b>
5.1	ラグランジアンと静的なエネルギー . . . . .	81
5.2	Euler-Lagrange 方程式と数値解 . . . . .	85
5.3	5 章のまとめ . . . . .	94
<b>第 6 章</b>	<b><math>F_{N-1}</math> Skyrme-Faddeev 模型における Hopfion</b>	<b>96</b>
6.1	研究背景 . . . . .	96
6.2	模型 . . . . .	98
6.2.1	エネルギー, Hopf 不変量と torsion . . . . .	98
6.2.2	場のパラメトリゼーション . . . . .	100
6.3	運動方程式と Hopfion 解 . . . . .	103
6.3.1	単純な埋め込み解 . . . . .	104
6.3.2	非自明な $CP^1$ reduction . . . . .	105
6.4	Hopfion の集団座標量子化 . . . . .	106
6.5	6 章のまとめ . . . . .	109
	まとめ . . . . .	<b>110</b>

# はじめに

本論文は、 $SU(N)$  対称性をもつ非線型シグマ模型におけるトポロジカルソリトンについての研究成果をまとめ、詳細な議論を加えたものである。 $N \geq 3$  では、 $SU(N)$  対称性をもつ非線型シグマ模型にいくつかの種類が存在するが、ここでは特に2種類の模型—ターゲット空間が複素射影空間  $CP^{N-1} = SU(N)/SU(N-1) \times U(1)$ 、そして旗多様体  $F_{N-1} = SU(N)/U(1)^{N-1}$  である非線型シグマ模型—を扱う。それらをそれぞれ、 $CP^{N-1}$  非線型シグマ模型、 $F_{N-1}$  非線型シグマ模型と呼ぶ。ただし  $N = 2$  の場合には、両者ともよく知られた  $O(3)$  非線型シグマ模型と一致する。

## 研究背景

$SU(N)$  対称性をもつ非線型シグマ模型は、さまざまな基礎理論の有効模型として盛んに研究されている。 $SU(2)$  対称性を持つ非線型シグマ模型である、 $O(3)$  非線型シグマ模型は、強磁性または反強磁性 Heisenberg 模型の連続極限において、導出することができる [1]。1次元格子または2次元三角格子上の  $SU(3)$  Heisenberg 模型の場合には、強磁性の場合に  $CP^2$  非線型シグマ模型、反強磁性の場合に  $F_2$  非線型シグマ模型が導出できることが知られている [2, 3, 4, 5]。さらに、3次元立方格子においても、低エネルギーにおける秩序変数空間の考察から、それらの模型が連続極限において現れると考えられる [6]。また、Faddeev と Niemi らによって、 $SU(2)$  Yang-Mills 理論の低エネルギー極限において、 $O(3)$  非線型シグマ模型が導出できることが示されている [7, 8]。より高次の  $SU(N)$  Yang-Mills 理論から有効模型を導出することは未だなされていないが、低エネルギー領域において  $SU(N)$  Yang-Mills 理論が持つ自由度に関する議論から、 $CP^{N-1}$  非線型シグマ模型または  $F_{N-1}$  非線型シグマ模型のどちらかが、その有効模型であると考えられている [9, 10]。

$SU(2)$  Heisenberg 模型や  $SU(2)$  Yang-Mills 理論において、ソリトンが重要な役割を果たすことは、40年以上前から認識されている。 $SU(2)$  Heisenberg 模型や  $SU(2)$  Yang-Mills 理論の有効模型である  $O(3)$  非線型シグマ模型には、大きく分けて2種類のソリトン解が存在する。1種類目は、平面上に局在したソリトン、もしくはそれに並進対称性を持たせた柱体である [11, 12]。それらのうち、平面方向のスケール不変性を持つものを2次元インスタントン [11]、スケール不変性が破れているものを baby skyrmion と呼ぶ [12, 13]。Baby skyrmion は  $Fe_{0.5}Co_{0.5}Si$  などの磁性体中に現れることが実験により確認されており、工業的な応用も期待されている [14]。2つ目は、Hopfion と呼ばれる3次元空間中で局在したソリトンで、結び目の構造を持つ。Hopfion は、QCD におけるソリトンであると考えられているグルーボールを記述する有力な候補と見なされている [15]。

$SU(2)$  よりも高い対称性である  $SU(N)$  対称性をもつ Heisenberg 模型や Yang-Mills 理論のソリトンの重要性が以前にも増して高まってきている。近年、 $SU(N)$  スピン自由度をもつ系が

実験により実現されたことで、これまで単なる数学的な拡張であると考えられていた  $SU(N)$  Heisenberg 模型に、物理的な応用の可能性が開けた。 $SU(N)$  Heisenberg 模型におけるソリトンも、将来的に実験で観測できる可能性が出てきた。また、 $O(3)$  非線型シグマ模型の Hopfion は、グルーオンの凝縮体であるグルーボールを記述すると考えられてきたが、グルーオンはカラー  $SU(3)$  対称性を持っているため、 $SU(3)$  対称性をもつ非線型シグマ模型における Hopfion がグルーボールを記述すると考えることがより自然である。 $SU(3)$  対称性をもつ非線型シグマ模型の有効模型における Hopfion は、それ自身がグルーボールの性質の理解を深めることに貢献すると同時に、格子ゲージ計算などのシミュレーションにおける初期配置として有望なものであると考えられる。以上に述べたような、 $SU(N)$  対称性をもつ非線型シグマ模型におけるソリトンの重要性の高まりから、これらのソリトンの構築とその数学的な性質を明らかにすることを目的に研究を行った。

## 本論文の構成

本論文では、ソリトンのもつ基本的な性質や、 $SU(N)$  対称性をもつ非線型シグマ模型におけるすでに知られているソリトン解のレビューをしたのち、我々が構築した 4 種類のソリトン— $CP^{N-1}$  非線型シグマ模型における baby skyrmion と  $F_{N-1}$  非線型シグマ模型における 2 次元インスタントン、baby skyrmion, Hopfion—についての構築方法とその性質について順々に議論していく。

第 1 章では、本研究の主な研究対象であるトポロジカルソリトンのもつ基本的な性質を、教科書 [16, 17, 18, 19, 20, 21] などを基にまとめる。また、 $O(3)$  非線型シグマ模型におけるソリトン解の紹介も行う。 $O(3)$  非線型シグマ模型は、 $SU(N)$  対称性をもつ非線型シグマ模型の典型例であり、そのソリトン解の構築方法を基礎として本研究は行われている。第 2 章では、 $CP^{N-1}$  非線型シグマ模型における、すでに知られていた解についてのレビューをする。すでに知られていた解はすべて、スケール不変性を持ったソリトン、すなわち 2 次元インスタントンである [22, 23, 24]。

第 3 章では、 $CP^{N-1}$  非線型シグマ模型において、スケール不変性を持たないソリトン解である baby skyrmion の構築を行う。スケール不変性を持ったソリトンには動的な不安定性があるため、実空間に現れるソリトンはスケール不変性を破ったものである。そのため、スケール不変性を破った解の構築は、物理的応用への重要なステップである。非線型シグマ模型のスケール不変性を破るために、Skyrme 項と呼ばれる高次微分項と、ポテンシャルと呼ばれる微分を含まない項を加えたモデルを導入する。そのモデルにおいて、我々は運動方程式を数値的に解くことで baby skyrmion を構築する。解の構築にはポテンシャルの持つ構造が鍵になっているため、この章では解を持つポテンシャルの構成法を重点的に議論する。この章は、Pawel Klimas 氏、澤渡信之氏、玉置裕太氏との共同研究である論文 [25] に基づいている。

第 4 章では、 $F_{N-1}$  非線型シグマ模型における 2 次元インスタントンを議論する。これまで、 $F_{N-1}$  非線型シグマ模型におけるソリトンは、ほとんど知られていなかった。まず我々は、 $F_2$  非線型シグマ模型に単純な埋め込み解ではない 2 次元インスタントンが存在することを、運動方程式を厳密に解くことで示す。一般に、エネルギーの下限がトポロジカルな項で与えられているとき、その下限を満たす条件である 1 階の連立微分方程式を解くことでソリトンが得られる場合があることが知られている。しかし一方で、 $F_2$  非線型シグマ模型のエネルギーの下限は、

トポロジカルでない項で与えられる。それにもかかわらず、1階の連立微分方程式を解くことでも、その厳密解が得られることも明らかにする。ただしこの場合には、エネルギーの下限を満たす条件だけでなく、ターゲット空間の幾何学的性質から現れる条件である *torsion free* 条件との連立方程式になる。この章は、澤渡信之氏との共同研究である論文 [26] に基づく。

第5章では、 $F_2$  非線型シグマ模型に Skyrme 項とポテンシャルを加えて、スケール不変性を破り、その模型において baby skyrmion を構築する。ポテンシャルは、 $CP^{N-1}$  非線型シグマ模型の研究を通して得られた知見をもとに構成し、導入する。Skyrme 項とポテンシャルを加えると、運動方程式は厳密には解けなくなる。しかし、*torsion free* 条件を満たすような配位を考えると、運動方程式は  $O(3)$  非線型シグマ模型に Skyrme 項と、あるポテンシャルを加えた模型の運動方程式へと簡略化される。この簡略化された方程式を数値的に解くことで、 $F_2$  非線型シグマ模型における baby skyrmion を構築する。この結果は、澤渡信之氏と和田溪扶氏との共同研究に基づく。

第6章では、 $F_2$  Skyrme-Faddeev 模型、すなわち  $F_2$  非線型シグマ模型に Skyrme 項を加えた模型において Hopfion を構築する。その模型は Faddeev と Niemi によって 1998 年に提案されたが、主として数学的な困難から、解の導出がされてこなかった。我々は、 $F_2$  非線型シグマ模型における 2次元インスタントンや baby skyrmion の研究をもとに、「 $F_2$  非線型シグマ模型におけるソリトン解は *torsion free* 条件を満たす」という仮説を立てた。その仮説に基づき、ここでも *torsion free* 条件を満たす配位を ansatz として採用し、その配位に対する運動方程式を解析する。さらに、集団座標量子化の手法を用いて、得られた Hopfion の量子的な性質を議論する。この章は、澤渡信之氏との共同研究である論文 [27] に基づく。

# 第1章 イントロダクション

この章では、まず本論文の主な研究対象である「トポロジカルソリトン」がもつ特徴について述べる。主な目的は、今後の議論で重要となる、ソリトンの諸性質を導入することである。1.1節では、ソリトンの定義を与える。そして、ソリトンが自発的対称性の破れとともに現れることをみる。1.2節では、ソリトンの持つトポロジ的な性質について議論する。1.3節では、ある場の理論がソリトン解として持つために、満たさなければならない条件を与える。さらに、1.4節では、 $O(3)$  非線型シグマ模型におけるソリトン解について議論する。 $O(3)$  非線型シグマ模型は、 $SU(2)$  対称性を持ち、本研究で扱う  $SU(N)$  対称性をもつ非線型シグマ模型の典型例である。今後の章では、この節で議論するソリトン解の構築法を基に、ソリトン解の構築を行っていく。

## 1.1 ソリトンとは

まず、本論文におけるソリトンの定義を与える。ソリトンの定義は、数学や物理など、分野によって若干異なるが、ここでは場の理論による定義を採用する：

**定義 1** 場の非線型な運動方程式における非自明な古典解で、エネルギーが局在しているものをソリトン解と呼ぶ。また、その局在したエネルギーのことをソリトンと呼ぶ。

エネルギーが局在するという意味を説明するために、図 1.1 にキンク (kink) と呼ばれる代表的なソリトンのエネルギー密度を示す。図 1.1 の左図は  $1+1$  次元におけるキンクのエネルギーであり、右図は  $2+1$  次元でのエネルギーである。エネルギーが局在するとは、左図のようにエネルギー密度が、空間のある領域で有限の値をもち、無限遠で十分はやくゼロに収束することを意味する。ただし、ここでは定義 1 の「局在している」という言葉を、ある方向に局在しているという緩い意味で用いることにする。つまり、右図のエネルギーは  $y$  方向には局在していないが、 $x$  方向に局在しているので、右図もソリトンであるとする。したがって、一般に、 $D$  次元空間上に局在したソリトンを、並進対称性を持たせることで  $(D+n)$  次元空間に埋め込んだものもソリトンである。ただし、そのように高次元に埋め込まれたソリトンの性質は、局在している空間の次元に依存することに注意する。

ソリトンは、素粒子などの素励起が、たくさん凝縮してできた状態と解釈される。凝縮した粒子が集団的に運動し、ソリトン自身も粒子的な振る舞いをする。その粒子的な振る舞いが、ソリトンという名前の由来、すなわち粒子を表す接尾語“-on”の起源である。

場の量子論において、光子などの素励起は、それぞれに対応する場を量子化することによって粒子としての描像を得る。すなわち、真空からの小さな励起波動を第 2 量子化したものを素粒子と考える。通常、素励起に対する相互作用は摂動的に扱われる。摂動的な手法は、量子電磁力学 (QED) において大成功を取めた。しかし一方で、量子色力学 (QCD) の低エネルギー領域

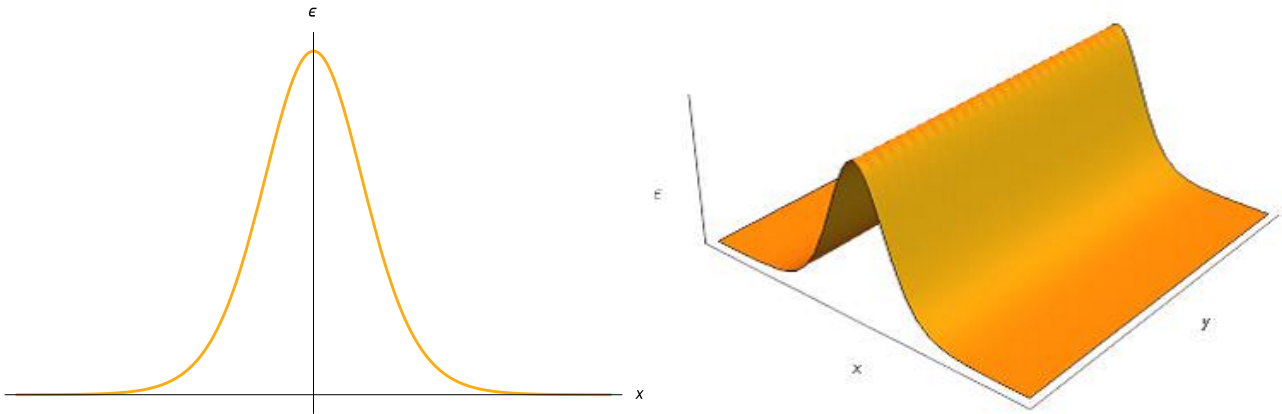


図 1.1: 1次元空間と2次元空間における kink のエネルギー密度。

のような強結合の理論では，摂動論が破たんする。そのような場合には，相互作用も含めた運動方程式を1度に解かなければならない。その方程式の解がソリトンである。ソリトンは非摂動効果であり，QCDなどの強結合である理論において重要な役割を果たすと考えられている。

### 1.1.1 ソリトンと自発的対称性の破れ

ソリトンは物理の様々な領域に現れる。それはソリトンが，自発的対称性の破れという，物理の様々な場面で起こる現象とともに現れるからだと考えられる。この項では，最も簡単なソリトン模型である1+1次元の $\phi^4$ 模型 [28] を例に，ソリトンが自発的対称性の破れにともなって現れることをみる。 $\phi^4$ 模型のラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \quad (1.1.1)$$

で与えられる。ここで， $\phi$ はスカラー場で，ポテンシャル $V$ は

$$V = \frac{\lambda}{4} \left( \phi^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right)^2 \quad (1.1.2)$$

である。このとき， $\lambda$ は正であり， $m$ は実定数とする。この模型は，ポテンシャルが $\phi$ の4次式であることから， $\phi^4$ 模型と呼ばれている。このラグランジアンは

$$\phi \rightarrow -\phi$$

という変換のもとで不変に保たれる。ポテンシャル(1.1.2)は，図1.2のように2重底ポテンシャルとなる。図1.2でみるように， $\phi = 0$ におけるポテンシャルは $\phi = \pm|m|/\sqrt{\lambda}$ のそれより高く，理論は不安定である。そこで， $\phi$ は真空の値 $\phi = \pm|m|/\sqrt{\lambda}$ に崩壊してしまう。一度，真空の値 $\phi = \pm|m|/\sqrt{\lambda}$ のどちらかが選ばれてしまうと，もともと理論が持っていた対称性 $\phi \rightarrow -\phi$ が破れる。この真空の値の選び方には自由度があり，その選び方によって，ソリトンが現れる可能性がある。



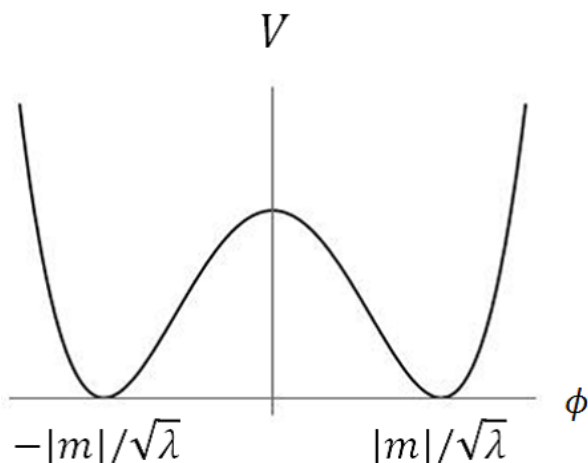


図 1.2: 2重底ポテンシャル

ラグランジアン (1.1.1) におけるソリトン解を求めよう。ここでは簡単のため、静的な配位を考える。そのとき、ラグランジアン (1.1.1) に対する Euler-Lagrange 方程式は

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} - m^2\phi - \lambda\phi^3 = 0 \quad (1.1.3)$$

となる。この方程式は境界条件の違いから、キンクと反キンクと呼ばれる2種類のソリトン解を持つ：

$$\begin{aligned} \text{キンク} & \quad \phi(-\infty) = -|m|/\sqrt{\lambda}, \quad \phi(\infty) = +|m|/\sqrt{\lambda}, \\ \text{反キンク} & \quad \phi(-\infty) = +|m|/\sqrt{\lambda}, \quad \phi(\infty) = -|m|/\sqrt{\lambda} \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

キンクはねじれを意味する単語であり、この2つの無限遠での場の取る値がずれていることから名前がついている。この境界条件のもと方程式 (1.1.3) を解くと、

$$\begin{aligned} \text{キンク} & \quad \phi(x) = \frac{|m|}{\lambda} \tanh \left[ \frac{|m|}{\sqrt{2}}(x - x_0) \right], \\ \text{反キンク} & \quad \phi(x) = -\frac{|m|}{\lambda} \tanh \left[ \frac{|m|}{\sqrt{2}}(x - x_0) \right] \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

が得られる。ここで、 $x_0$  はモジュライパラメータと呼ばれる任意の実数で、この解の持つエネルギー密度は  $x = x_0$  で極大値をとる。これらの解のもつエネルギー密度をプロットしたものが、図 1.1 である。一方で、場が2つの無限遠で同じ値を取ってしまうと、真空解すなわち  $\phi = \pm|m|/\sqrt{\lambda}$  しか解は存在しない。

キンク解を得るためには、境界条件として、縮退している真空のうち適切なものを選ぶ必要があった。一般にも、空間の無限遠において、場が縮退している真空のうち、どれかを選ぶことで対称性が破れ、その真空の選び方によってソリトンが現れる可能性がある。次の節で見るように、この対称性の自発的な破れ方と場の持つトポロジカルな性質に深い関係がある。

## 1.2 ソリトンとトポロジー

### 1.2.1 トポロジカルな安定性

ソリトンの配位は真空からずれており、真空解よりもエネルギーが高いにもかかわらず、真空解に崩壊することなく安定に存在する。この安定性のメカニズムを議論する。

ソリトンには、トポロジカルソリトンとノントポロジカルソリトンの2種類がある。この2種類のソリトンでは、安定性の機構が異なる。ノントポロジカルソリトンは、角運動量などの Noether チャージを持ち、その保存則により安定に保たれる。このタイプのソリトンとしては、例えば  $Q$ -ball[29] というものが知られている。一方、本論文の主な研究対象であるトポロジカルソリトンは、場の持つトポロジカルな性質により安定に存在している。以下では、より詳しくトポロジカルソリトンの安定性について議論する。以後、トポロジカルソリトンのことを単にソリトンと呼ぶことがある。

2つの場の配位がトポロジ的に同等であるとは、エネルギーが発散することなく、連続的な変形で互いに移り変われる状態のことを指す。場の配位をトポロジ的に区別するために便利な量として、トポロジカルチャージ  $Q_{\text{top}}$  という保存量が存在する。ここで、トポロジカルチャージは整数値をとる。トポロジカルソリトンは、有限な値のトポロジカルチャージを持ち、一方で、真空解は  $Q_{\text{top}} = 0$  の状態である。ある配位がトポロジカルチャージの異なる配位に連続的な変形で移り変わるためには、無限のエネルギーが必要である。そのため、真空とトポロジ的に区別されているトポロジカルソリトンは、真空解に崩壊することなく安定に存在する。

トポロジカルチャージは運動量や電荷などの Noether チャージとは異なる性質を持った保存量であることに注意する。Noether チャージはラグランジアンのもつ連続的対称性に対応して定義される保存量である。一方で、トポロジカルチャージは、境界条件で決まる幾何学的な保存量である。

具体例として、 $\phi^4$  キンクを見てみよう。 $\phi^4$  模型のトポロジカルチャージは

$$Q_{\text{top}} = \frac{\sqrt{\lambda}}{|m|} [\phi(\infty) - \phi(-\infty)] \quad (1.2.1)$$

と与えられる。したがって、キンク、反キンク、真空解  $\phi(x) = \pm|m|/\sqrt{\lambda}$  のトポロジカルチャージは

$$\text{キンク: } Q_{\text{top}} = 1, \quad \text{反キンク: } Q_{\text{top}} = -1, \quad \text{真空解: } Q_{\text{top}} = 0 \quad (1.2.2)$$

と得られる。(1.2.1) より、トポロジカルチャージを変えるには境界における場の値を変更しなければならない。しかし、ポテンシャル (1.1.2) は  $\phi \neq \pm|m|/\sqrt{\lambda}$  で有限な値を取るため、キンクから真空解への変形の途中では、

$$\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} V dx \rightarrow \infty \quad (1.2.3)$$

となり、エネルギーが発散してしまう。ゆえに、エネルギーを有限に保ったまま、トポロジカルチャージを変更する連続変形は存在しないため、キンクは真空解に崩壊することなく安定に保たれる。

## 1.2.2 ホモトピー

ソリトンの配位は、トポロジカルチャージという整数で分類されるセクターに分けられることがわかった。このセクターのことを数学では、ホモトピークラスと呼ぶ。ここでは、ホモトピーという考えを簡単に紹介し、ソリトンを考えていく上で重要となる数学的な定理などを記す。

$X, Y$  を境界を持たない多様体とし、2つの連続写像  $\phi, \phi'$  を考える:

$$\phi : X \rightarrow Y, \quad \phi' : X \rightarrow Y \quad (1.2.4)$$

もし、写像  $\phi$  が  $\phi'$  に連続的な変形で移り変われるならば、 $\phi$  と  $\phi'$  は互いに homotopic であるという。homotopic な写像は同じホモトピークラスに属する。一方、2つの写像が homotopic でないならば、異なるホモトピークラスに属する。言い換えれば、異なるホモトピークラスに属する2つの写像は、連続的な変換で移り変わることができない。

ホモトピー論として、 $X$  が  $n$  次元球面  $S^n$  のときが、特に重要である。 $n$  次元球面とは  $\mathbb{R}^{n+1}$  における原点から単位長さ離れた距離にある点の集合である。写像  $\phi : S^n \rightarrow Y$  のホモトピークラスの集合を  $\pi_n(Y)$  と書く。集合  $\pi_n(Y)$  は  $n \geq 1$  のときに群を成し、 $Y$  の  $n$  次ホモトピー群と呼ばれる。

例として、連続的な関数  $f(\theta)$  で定義される写像  $S^1 \rightarrow S^1$  を考える。ここで、 $\theta = [0, 2\pi]$  とし、 $f(\theta)$  をターゲット空間の角度に対応させる。いま、 $f(0) = 0$  とすると、写像の連続性より  $f(2\pi) = 2\pi k$  が要求される。ここで、 $k \in \mathbb{Z}$  である。 $k$  は  $\theta$  が1周する間に像  $f(\theta)$  がターゲット空間  $S^1$  の周りを回った回数に等しく、 $k$  の異なる写像は homotopic ではない。したがって、ホモトピークラスは整数  $k$  で分類され、その集合  $\pi_1(S^1)$  は

$$\pi_1(S^1) = \mathbb{Z} \quad (1.2.5)$$

となる。この  $k$  がトポロジカルチャージである。このような像がターゲット空間を覆った回数を、巻き数や写像度とも呼ぶ。一般に、 $\pi_n(Y) = \mathbb{Z}$  のとき、その要素としてトポロジカルチャージを定義することができる。

次に、 $S^1$  から  $S^2$  の写像を考えよう。このときは、いつも像を連続的にある1点に収縮させることができる。このような写像を自明 (trivial) であるという。像が1点に収縮させられるため、そのような写像はすべて homotopic であり、分類することができない。そのとき、

$$\pi_1(S^2) = 0 \quad (1.2.6)$$

と書く。同様に、整数  $n \geq 2$  に対して  $\pi_1(S^n) = 0$  となる。

ほとんどの場合、ホモトピー群を計算することはとても難しいため、ここではいくつかの重要な結果のみを引用する [19, 30]。

一番よく用いられるのは、ターゲット空間が  $S^m$  の場合である。つまり、 $\pi_n(S^m)$  である。この基本的な結果として以下のものが知られている:

$$\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}, \quad (1.2.7)$$

$$\pi_n(S^m) = 0 \quad n < m \text{ のとき}, \quad (1.2.8)$$

$$\pi_n(S^1) = 0 \quad n > 1 \text{ のとき} \quad (1.2.9)$$

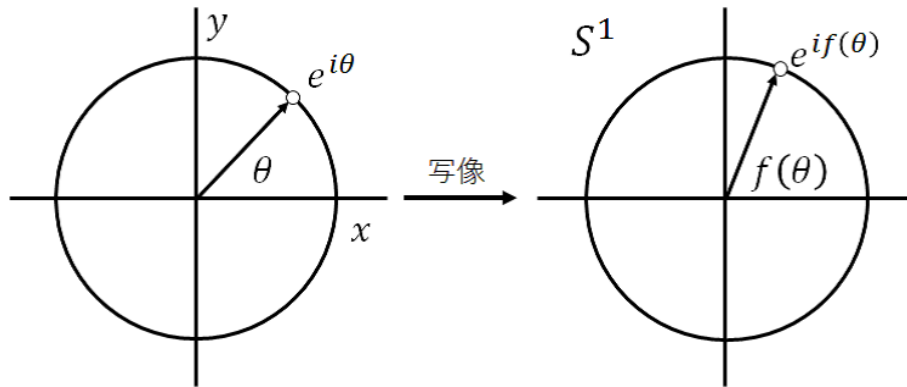


図 1.3:  $S^1$  から  $S^1$  への写像

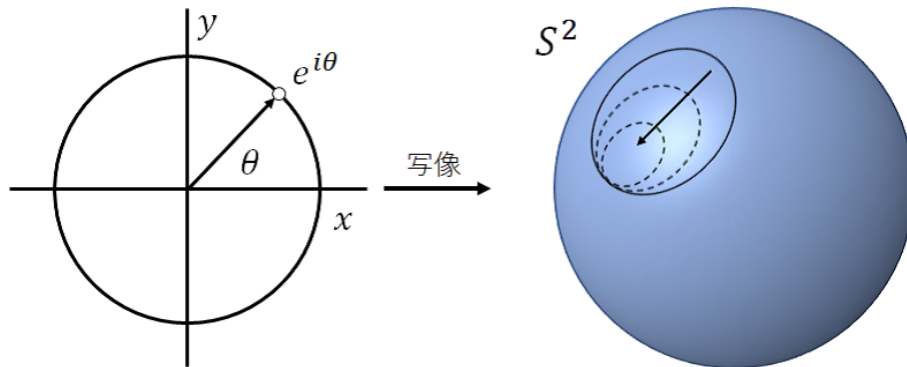


図 1.4:  $S^1$  から  $S^2$  への写像

一方,  $n > m$  の場合は非自明で, 特に重要なものとして  $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$  がある。

次にユニタリー群について見てみよう。ターゲット空間がユニタリー群  $U(1)$  のとき,  $U(1) = S^1$  より,

$$\pi_1(U(1)) = \mathbb{Z} \quad (1.2.10)$$

$$\pi_n(U(1)) = 0 \quad n > 1 \text{ のとき} \quad (1.2.11)$$

である。また,  $N \geq 2$  の特殊ユニタリー群  $SU(N)$  に対しては

$$\pi_1(SU(N)) = \pi_2(SU(N)) = 0, \quad (1.2.12)$$

$$\pi_3(SU(N)) = \mathbb{Z} \quad (1.2.13)$$

となる。

続いて, ホモトピー群を計算するために重要な公式を2つ紹介する。1つ目は, 直積空間に対する公式である。2つの多様体  $\mathcal{M}$  と  $\mathcal{M}'$  を考える。このとき, この2つの多様体の直積に対して,

$$\pi_1(\mathcal{M} \times \mathcal{M}') = \pi_1(\mathcal{M}) \times \pi_1(\mathcal{M}') \quad (1.2.14)$$

が成り立つ。例えば,

$$\pi_1(U(N)) = \pi_1(SU(N) \times U(1)) = \pi_1(SU(N)) \times \pi_1(U(1)) = \pi_1(U(1)) = \mathbb{Z} \quad (1.2.15)$$

$$\pi_1(U(1)^N) = \pi_1(U(1))^N = \mathbb{Z}^N \quad (1.2.16)$$

表 1.1: 代表的なホモトピー群

	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$
$U(1)$	$\mathbb{Z}$	$0$	$0$
$SU(2)$	$0$	$0$	$\mathbb{Z}$
$SU(N) \ N \geq 3$	$0$	$0$	$\mathbb{Z}$
$S^2 = CP^1 = F_1$	$0$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
$S^3$	$0$	$0$	$\mathbb{Z}$
$CP^N \ N \geq 2$	$0$	$\mathbb{Z}$	$0$
$F_N \ N \geq 2$	$0$	$\mathbb{Z}^N$	$\mathbb{Z}$

となる。

もう1つは商空間についての公式である。ある Lie 群  $G$  とその部分群  $H$  を考える。このとき、商空間  $G/H$  に対して次の関係が成り立つ:

$$\pi_n(G) = \pi_{n-1}(G) = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi_n(G/H) = \pi_{n-1}(H), \quad (1.2.17)$$

$$\pi_n(H) = \pi_{n-1}(H) = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi_n(G/H) = \pi_n(G) \quad (1.2.18)$$

が成り立つ。例としては、

$$\pi_2(SU(2)/U(1)) = \pi_1(U(1)) = \mathbb{Z} \quad \because \pi_2(SU(2)) = \pi_1(SU(2)) = 0 \quad (1.2.19)$$

$$\pi_3(SU(2)/U(1)) = \pi_3(SU(2)) = \mathbb{Z} \quad \because \pi_2(U(1)) = \pi_3(U(1)) = 0 \quad (1.2.20)$$

があげられる。一般に、 $G$  という対称性が自発的に  $H$  まで破れるソリトン模型のターゲット空間は、商空間  $G/H$  で記述されるため、この公式はよく用いられる。

以上の2つの公式を用いると、より複雑な商空間のホモトピー群が計算できる。たとえば、本論文で扱う多様体である、複素射影空間  $CP^N = SU(N+1)/U(N)$  と旗多様体  $F_N = SU(N+1)/U(1)^N$  に対して、次の非自明なホモトピー群が存在することがわかる:

$$\pi_2(CP^N) = \pi_2(SU(N+1)/U(N)) = \pi_1(U(N)) = \mathbb{Z} \quad (1.2.21)$$

$$\pi_2(F_N) = \pi_2(SU(N+1)/U(1)^N) = \pi_1(U(1)^N) = \mathbb{Z}^N \quad (1.2.22)$$

$$\pi_3(F_N) = \pi_3(SU(N+1)/U(1)^N) = \pi_3(SU(N+1)) = \mathbb{Z} \quad (1.2.23)$$

ここで、 $\pi_3(CP^N)$  は、 $\pi_3(SU(N)) = \mathbb{Z}$  であるため、公式 (1.2.18) が使えず簡単には計算できない。しかし、 $N \geq 2$  に対して、 $\pi_3(CP^N) = 0$  になってしまうことが知られている。

### 1.2.3 ソリトンの分類

トポロジカルソリトンは、ソリトンを特徴づけるホモトピー群の構造の違いから位相欠陥型とテクスチャー型の2種類に分けられる。その2種類では、模型を記述する場の性質が異なるほか、ソリトンが現れるときの対称性の破れ方にも違いがある。

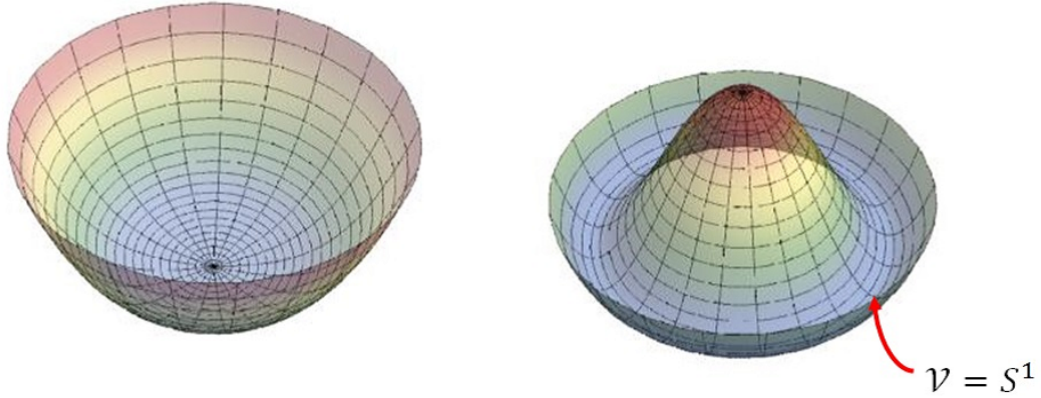


図 1.5: 真空多様体と自発的対称性の破れ。左図の真空多様体は1点であるため、自発的対称性の破れは起こらない。一方で、右図の真空多様体は  $S^1$  になっており、 $S^1$  上の1点を選ぶことで自発的に対称性が破れる。

まず、位相欠陥型のソリトンについて議論する。 $D = d + 1$ 次元時空  $\mathbb{R}^D$  で定義されたエネルギー汎関数

$$E = \int \left( \frac{1}{2} \nabla \vec{\phi} \cdot \nabla \vec{\phi} + U(\phi_1, \dots, \phi_N) \right) d^d x \quad (1.2.24)$$

を持つスカラー多重項  $\vec{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_N)$  を考える。ここで、 $U$  はポテンシャルである。もし、 $\vec{\phi}$  が静的な場なら  $E$  は全エネルギーを与える。ポテンシャル  $U$  がターゲット空間  $\mathbb{R}^N$  の部分多様体  $\mathcal{V}$  で、最小値  $U_{\min} = 0$  を取ると仮定する。 $\vec{\phi}$  は有限の領域では、連続であれば任意の値を取ることができるが、空間の無限遠では、エネルギーの有限性より、多様体  $\mathcal{V}$  上の値を取らなければならない。つまり、 $\vec{\phi}$  は境界条件

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \vec{\phi}(\mathbf{x}) = \vec{\phi}_\infty \in \mathcal{V} \quad (1.2.25)$$

を満たさなければならない。ただし、この値は極限を取る方向によって異なる値を取ってもよいとする。 $d$ 次元空間  $\mathbb{R}^d$  における無限遠は  $S_\infty^{d-1}$  と見なせるため、そこでの場の配位は写像

$$\vec{\phi}_\infty : S_\infty^{d-1} \rightarrow \mathcal{V} \quad (1.2.26)$$

で定義される。いま、等しい漸近的な値を持つ配位は互いに **homotopic** である。さらに、もし2つの配位  $\vec{\phi}$  と  $\vec{\phi}'$  が異なる漸近的な値を持っていても、その漸近的な値が **homotopic** であれば、 $\vec{\phi}$  と  $\vec{\phi}'$  も **homotopic** である。ゆえに、場の配位  $\vec{\phi}$  のトポロジカルな性質は、写像  $\vec{\phi}_\infty$  のホモトピークラス、つまり  $\pi_{d-1}(\mathcal{V})$  で決まる。

真空多様体  $\mathcal{V}$  の構造は、対称性の破れと関連している。もし、 $\mathcal{V}$  が1点であるなら、図 1.5 のように、対称性の破れは起こらない。さらに、このとき  $\pi_{d-1}(\mathcal{V})$  は自明となり、トポロジカルソリトンは現れない。一方で、たとえば  $\mathcal{V} = S^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$  の時には、対称性の破れが起き、特に  $\pi_{d-1}(S^{N-1})$  が非自明になればトポロジカルソリトンが出現する可能性がある。

式 (1.2.24) のような線形なスカラー場だけで記述される理論におけるトポロジカルソリトンは、1, 2, 3次元空間において、それぞれキルク、グローバルボーテックス (vortex)、グローバル

表 1.2: トポロジカルソリトンの分類

位相欠陥型	$d$	テクスチャー型
キンク $\pi_0(\mathcal{V}) \times \pi_0(\mathcal{V})$	1	Sine-Gordon キンク $\pi_1(Y)$
ボーテックス $\pi_1(\mathcal{V})$	2	BP インスタントン Baby skyrmion $\pi_2(Y)$
モノポール $\pi_2(\mathcal{V})$	3	Skyrmion, Hopfion $\pi_3(Y)$

モノポール (monopole) と呼ばれるものが知られている。キンクは有限のエネルギーを持つが、グローバルボーテックスとグローバルモノポールは場の微分項の存在のためにエネルギーがそれぞれ対数発散，線形発散している。これらの発散は，ゲージ場を導入し，微分を共変微分に置き換えれば取り除くことができる。ゲージ場はスカラー場のトポロジカルな性質を変化させないため，ゲージ場を含んだ理論においても，上記のホモトピー分類は有効である。ゲージ場を導入することで発散を取り除いたものを，単にボーテックスやモノポールと呼ぶ。

テクスチャー型のソリトンを記述する場には，例えば  $\vec{\phi} \cdot \vec{\phi} = 1$  のような非線型拘束条件が課される。非線型拘束条件より，エネルギー汎関数に Lagrange の未定乗数

$$\lambda(1 - \vec{\phi} \cdot \vec{\phi}) \quad (1.2.27)$$

を導入する必要がある。一方で，(1.2.24) と異なり，ポテンシャルを含む必要はない。そのため，もっとも単純な理論は

$$E = \int \left[ \frac{1}{2} \nabla \vec{\phi} \cdot \nabla \vec{\phi} + \lambda(1 - \vec{\phi} \cdot \vec{\phi}) \right] d^d x \quad (1.2.28)$$

である。この理論は  $O(N)$  非線型シグマ模型と呼ばれる。

このような理論では，場のトポロジカルな性質は，線形スカラー場の理論のときと異なり，空間全体からターゲット空間への写像のホモトピークラスで特徴付けられる。この違いは，未定乗数を含んだ項 (1.2.27) をポテンシャルとみなせば，非線型拘束条件を満たす場は常にポテンシャルの真空に位置していることから来ている。

空間次元が 2 以上のとき， $\vec{\phi}$  が有限のエネルギーを持つと仮定すると，場の微分に依存する項が発散しないために， $\vec{\phi}$  は無限遠のすべての点において，同一の定数にならなければならない。この境界条件により， $\mathbb{R}^d$  は  $S^d$  にコンパクト化することができる。このとき，ターゲット空間を閉多様体  $Y$  とすると， $\vec{\phi}$  は写像  $\vec{\phi}: \mathbb{R}^d \sim S^d \rightarrow Y$  を定義するので，テクスチャー型のソリトンの場の配位はホモトピー群  $\pi_d(Y)$  の要素で分類される。さらに， $d = 1$  のときは，無限遠が 2 点  $\pm\infty$  からなる。ここで，境界条件  $\vec{\phi}(\infty) = \vec{\phi}(-\infty)$  を課せば，2 つの無限遠は同一視できて  $\mathbb{R}$  は  $S^1$  にコンパクト化できる。したがって，このときもソリトンの配位のホモトピークラスは  $\pi_1(Y)$  で与えられる。

ターゲット空間  $Y$  は，模型の対称性の破れ方によって決まる。模型が Lie 群  $G$  で記述される連続的な対称性を持っているとする。このとき，系にはその対称性のため，無限個の縮退した

真空が存在する。しかし、境界条件によって、真空を1つ選ばなければならない、その選択によって対称性が自発的に破れる。いま、対称性が  $G$  の部分群  $H$  まで破れたとすると、 $Y$  は商空間  $G/H$  で与えられる。したがって、非線型なスカラー場の理論では、 $\pi_d(G/H)$  が非自明であれば、トポロジカルソリトンが現れる可能性がある。

テクスチャー型のトポロジカルソリトンとして、1次元 sine-Gordon 模型におけるキंकや Skyrme 模型 (3次元非線型シグマ模型+Skyrme 項) における Skyrminion[31] が古くから研究されてきた。さらに、2次元空間においては、スケール不変性を持ったソリトンである Belavin-Polyakov(BP) インスタントン (instanton)[11] と、Skyrme 項を加えてスケール不変性を破った模型におけるソリトンである baby skyrmion[12] が知られている。また、場が  $S^3 \rightarrow S^2$  などの Hopf 写像と呼ばれるクラスの写像を定義している場合、その対応しているソリトンのことを Hopfion と呼ぶ [15]。Hopfion は、Hopf 写像の性質から、結び目の構造をしている。

### 1.3 Derrick の定理

真空と異なるホモトピークラスに属する場の配位は、真空解に崩壊するとなく存在できることを見てきた。しかし、それぞれのホモトピークラスにおいて、エネルギーの極小値を与える安定な場の配位がそもそも存在するののかという問題がある。この節では、その問題を調べるために有用な Derrick の定理と呼ばれる定理を紹介する [32]。

#### 定理 1. Derrick の定理

座標のスケール変換  $\mathbf{x} \mapsto \lambda \mathbf{x}$  を考える。ただし、 $\lambda > 0$  とする。このとき、エネルギー汎関数が  $\lambda$  に対して極値を持たなければ、その理論は静的で非自明な有限エネルギー解を持たない。

言い換えれば、「Euler-Lagrange 方程式の解は、任意の変分のもとでエネルギーの停留点になっている必要があるので、簡単に確認できるスケール変換を考え、少なくともその変換の下でエネルギーに停留点が存在しなければ、理論にソリトン解は存在しない」ということである。したがって、この定理は、ソリトンが存在するために模型が満たすべき必要条件を与えているに過ぎず、エネルギー汎関数が  $\lambda$  に対して極値を持ったとしても、ソリトンの存在が保証されるわけではないことに注意する。

具体例として、以下のラグランジアンで定義される  $d+1$  次元時空におけるスカラー場の理論を考える：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\phi} \cdot \partial^\mu \vec{\phi} - U(\vec{\phi}(\mathbf{x}, t)) \quad (1.3.1)$$

ここで、 $\vec{\phi}(\mathbf{x}, t) = (\phi_1, \dots, \phi_N)$  とし、 $U$  は微分を含まず、その最小値はゼロであるとする。このとき、静的な場  $\vec{\phi}(\mathbf{x})$  のエネルギーは

$$\begin{aligned} E &= \int \left[ \nabla \vec{\phi} \cdot \nabla \vec{\phi} + U(\vec{\phi}(\mathbf{x})) \right] d^d x \\ &= E_2 + E_0 \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

と書ける。ここで、項の含む微分の数でエネルギーを分けた。それぞれの添え字は微分の数を示している。空間のスケール変換  $\mathbf{x} \mapsto \lambda \mathbf{x}$  を考える。このスケール変換に伴って、場の配位を

$$\vec{\phi}^{(\lambda)}(\mathbf{x}) = \vec{\phi}(\lambda \mathbf{x}) \quad (1.3.3)$$



と表す。このとき、エネルギーは

$$\begin{aligned}
E[\vec{\phi}^\lambda] &= \int \left[ \nabla \vec{\phi}^{(\lambda)} \cdot \nabla \vec{\phi}^{(\lambda)} + U(\vec{\phi}^{(\lambda)}(\mathbf{x})) \right] d^d x \\
&= \int \left[ \nabla \vec{\phi}(\lambda \mathbf{x}) \cdot \nabla \vec{\phi}(\lambda \mathbf{x}) + U(\vec{\phi}(\lambda \mathbf{x})) \right] d^d x \\
&= \int \lambda^{-d} \left[ \lambda^2 \nabla_\lambda \vec{\phi}(\lambda \mathbf{x}) \cdot \nabla_\lambda \vec{\phi}(\lambda \mathbf{x}) + U(\vec{\phi}(\lambda \mathbf{x})) \right] d^d(\lambda x) \\
&= \lambda^{2-d} E_2 + \lambda^{-d} E_0
\end{aligned} \tag{1.3.4}$$

と変換される。ここで、 $\nabla_\lambda$  は  $\lambda^{-1} \nabla$  を表している。もし、 $\vec{\phi}(\mathbf{x})$  が場の方程式  $\delta E = 0$  の解だとすると、 $E[\vec{\phi}^\lambda]$  は  $\lambda = 1$  で極値を取らなければならない。つまり、

$$\left. \frac{d}{d\lambda} E[\vec{\phi}^\lambda] \right|_{\lambda=1} = 0 \tag{1.3.5}$$

したがって、(1.3.4) より

$$(2-d)E_2 - dE_0 = 0 \tag{1.3.6}$$

が満たされる必要がある。 $d = 1$  のとき、 $E_2 = E_0$  であればよいので、Euler-Lagrange 方程式の解はエネルギー  $E = 2E_2 = 2E_0$  を持つことがわかる。 $d = 2$  のときは、 $E_0 = 0$  が満たされればよいので、 $U = 0$  とすれば模型に非自明な解が存在する可能性がある。このような解として、BP インスタントン [11] が存在する。このような解のエネルギー (1.3.4) は  $\lambda$  に依存しないため、解のサイズを 1 つに固定できない。そのため、動的には不安定で、1 点につぶれてしまう [18]。一方で、 $d \geq 3$  のとき、方程式 (1.3.6) を満たすには、 $E_2, E_0$  ともに負でないので、 $E_2 = E_0 = 0$  が要求される。これは真空解を意味しているため、非自明な解を持つことが許されない。

Derrick の定理によるソリトン解の非存在性を避けるため、様々な提案がなされている。そのいくつかの例を紹介しよう。 $d = 3$  の場合、エネルギーに微分を 4 つ含んだ項  $E_4$  が存在すれば、Derrick の定理を避けることができる。なぜならば、そのときのスケール変換されたエネルギーは

$$E(\lambda) = \lambda E_4 + \lambda^{-1} E_2 + \lambda^{-3} E_0 \tag{1.3.7}$$

となり、(1.3.7) は  $\lambda$  に対して極値を持つためである。 $E_4$  を導入する方法として、ゲージ場をスカラー場へカップリングさせる方法がある。代数構造や係数を無視すると、エネルギー汎関数は一般的に

$$E = \int \left[ |F_{ij}|^2 + |D_i \Phi|^2 + U(\Phi) \right] d^3 x \tag{1.3.8}$$

と書ける。ここで、 $F_{ij}$  は場の強さで、 $D_i$  は共変微分を表している。また、ゲージ場を導入する代わりに、 $(\partial_i \vec{\phi} \wedge \partial_j \vec{\phi})^2$  といったスカラー場の高次微分項を導入することもよく行われる手法である。スカラー場の高次微分項は Skyrme 項と呼ばれる。Skyrme 項を加えれば、ゲージ場を導入する必要がなくなるので、スカラー場だけからなる理論におけるソリトン解を構築することができる。

$d = 2$  においても、模型に新たな項を加えることで、スケール不変性を破ることは非常に重要である。その理由としては、スケール不変性を持つソリトンは不安定であり、実空間に現れ

るソリトンはスケール不変性を持っていないことがあげられる。2次元空間において、模型に Skyrme 項や Yang-Mills 項などの4次微分項を加えた場合、スケール変換されたエネルギーは、

$$E(\lambda) = \lambda^2 E_4 + \lambda^{-2} E_0 \quad (1.3.9)$$

となるため、スケール不変性を破ることができる。さらに、この関係から Euler-Lagrange 方程式の解は  $E_4 = E_0$  を満たすことがわかる。また、磁性体における Dzyaloshinskii-Moriya(DM) 相互作用など微分を1つだけ含む項を模型に加えても、スケール不変性を破ることができる [33]。ただし、それらの項は半負定値であるとする。つまり、 $E_1 \leq 0$  である。このとき、

$$\left. \frac{d}{d\lambda} E \left[ \vec{\phi}^{(\lambda)} \right] \right|_{\lambda=1} = -(E_1 + 2E_0) \quad (1.3.10)$$

となるので、たしかに  $\lambda = 1$  が極値になる可能性がある。

本論文においても、スケール不変性を破ったソリトン解をもつ模型をどのように構成するかということが、大きなテーマのひとつである。

## 1.4 $O(3)$ 非線型シグマ模型におけるソリトン解

この章では、 $O(3)$  非線型シグマ模型という、スカラー場の理論におけるトポロジカルソリトンについてのレビューを行う。 $O(3)$  非線型シグマ模型は、 $O(3)$  対称性をもつ理論であり、そのソリトンはテクスチャー型である。この模型は、 $SU(2)$  が  $O(3)$  の二重被覆であることからわかるように、 $SU(2)$  対称性を持っており、本論文の研究対象である  $SU(N)$  対称性をもつ非線型シグマ模型の典型例である。

$O(3)$  非線型シグマ模型は、 $O(3)$  対称性が  $O(2)$  まで破れたときに現れる、Nambu-Goldstone ボゾンの力学を記述する模型である。このような対称性の破れは、強磁性体や反強磁性体中であつたり、QCD の低エネルギー領域などの様々な場面で起こると考えられている。実際、Heisenberg 模型の連続極限や  $SU(2)$  Yang-Mills 理論の低エネルギー極限において、導出することができる [34, 7]。そのため、それらの基礎理論の有効模型として、盛んに研究されている。

上記の対称性の破れに基づいて、模型のターゲット空間は、 $O(3)/O(2) \approx SU(2)/U(1) \approx S^2$  になる<sup>1</sup>。  $S^2$  に対するホモトピー群、 $\pi_2(S^2) = \pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$  より、 $O(3)$  非線型シグマ模型またはそれを Derrick の非存在性定理を避けるように拡張した模型には、2次元のソリトンであるインスタントンや baby skyrmion、さらに3次元のソリトンである Hopfion が存在する。1.4.1 項では、 $O(3)$  非線型シグマ模型における BP インスタントンを紹介する。2次元  $O(3)$  非線型シグマ模型に、Skyrme 項と呼ばれる高次微分項とポテンシャルを  $O(3)$  非線型シグマ模型に導入し、スケール不変性を破った模型を baby Skyrme 模型と呼ぶ。1.4.2 項では、この baby Skyrme 模型におけるソリトンである、baby skyrmion を議論する。1.4.3 項では、3次元  $O(3)$  非線型シグマ模型に、Derrick の定理を避けるために Skyrme 項を加えた模型における、Hopfion を議論する。この模型は、Skyrme-Faddeev 模型と呼ばれる。

<sup>1</sup>非線型シグマ模型の性質は、模型の対称性ではなく、ターゲット空間に依っているため、 $O(3)$  非線型シグマ模型は  $S^2$  非線型シグマ模型と呼ばれるべきである。しかし、慣例として  $O(N)$  非線型シグマ模型だけは、ターゲット空間の名前ではなく、模型のもつ対称性をもとに名前がつけられている。

### 1.4.1 Belavin-Polyakov インスタントン

2次元空間における  $O(3)$  非線型シグマ模型を議論する。2次元  $O(3)$  非線型シグマ模型のソリトンは、4次元 Yang-Mills 理論のソリトンである Yang-Mills インスタントンと、スケール不変性などの類似点が多くあるため、BP インスタントンと呼ばれている。

$O(3)$  非線型シグマ模型のラグランジアン密度は、次のように与えられる：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \partial_\mu \vec{n} \cdot \partial^\mu \vec{n}, \quad \vec{n} = (n_1, n_2, n_3), \quad |\vec{n}|^2 = 1 \quad (1.4.1)$$

ここで、 $\mu = 0, 1, 2$  とする。1.2.3 項で議論したように、エネルギーの有限性から無限遠では  $\vec{n}(r, \theta)$  が定ベクトルになることが要求される。通常、これを

$$\vec{n}(\infty, \theta) = \vec{n}_\infty = (0, 0, 1) \quad (1.4.2)$$

と置く。この条件によって、無限遠のすべての点は同一視され、空間  $\mathbb{R}^2$  は球面  $S^2$  へとコンパクト化される。このラグランジアンは、 $O(3)$  の大域的な変換  $\vec{n} \mapsto M\vec{n}$  のもとで不変に保たれる。しかし、境界条件はこの対称性を自発的に  $O(2)$ 、つまり  $n_1, n_2$  の回転対称性まで破る。したがって、ターゲット空間は  $S^2$  になり、場の配位がホモトピー群

$$\pi_2(O(3)/O(2)) = \pi_2(S^2) = \mathbb{Z} \quad (1.4.3)$$

の要素で特徴づけられることになる。このホモトピー群の要素に対応する、トポロジカルチャージは

$$Q_{\text{top}} = \frac{1}{8\pi} \int \varepsilon^{ij} \vec{n} \cdot (\partial_i \vec{n} \times \partial_j \vec{n}) d^2x \quad (1.4.4)$$

で与えられる。このトポロジカルチャージが実際に保存量であることを確認する。トポロジカルカレント

$$J^\mu = \frac{1}{8\pi} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \vec{n} \cdot (\partial_\nu \vec{n} \times \partial_\lambda \vec{n}) = \frac{1}{8\pi} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \varepsilon_{abc} n_a \partial_\nu n_b \partial_\lambda n_c \quad (1.4.5)$$

を用いてトポロジカルチャージを、

$$Q_{\text{top}} = \int J^0 d^2x \quad (1.4.6)$$

と定義する。このとき、トポロジカルカレントを微分すると

$$\partial_\mu J^\mu = \frac{1}{8\pi} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \varepsilon_{abc} \partial_\mu n_a \partial_\nu n_b \partial_\lambda n_c = \frac{3}{4\pi} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\mu n_1 \partial_\nu n_2 \partial_\lambda n_3 \quad (1.4.7)$$

となる。ただし、 $\mu$  に対する和は取らないことに注意する。これに例えば  $n_1$  を掛けると、非線型拘束条件の微分  $n_1 \partial_\mu n_1 + n_2 \partial_\mu n_2 + n_3 \partial_\mu n_3 = 0$  より、

$$\begin{aligned} n_1 \partial_\mu J^\mu &= \frac{3}{4\pi} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} n_1 \partial_\mu n_1 \partial_\nu n_2 \partial_\lambda n_3 \\ &= -\frac{3}{4\pi} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} (n_2 \partial_\mu n_2 + n_3 \partial_\mu n_3) \partial_\nu n_2 \partial_\lambda n_3 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

が得られる。ここで、最後は反対称テンソルの性質を使った。したがって、 $\partial_\mu J^\mu = 0$  より、トポロジカルチャージ (1.4.4) が保存量であることを示すことができた。

解を構成するには、ターゲット空間  $S^2$  から複素射影空間  $CP^1$  へのステレオグラフ射影を用いることが便利である。複素スカラー場  $u$  を、複素射影空間  $CP^1$  を記述する座標だとすると、

$$\vec{n} = \frac{1}{(1+|u|^2)} (u+u^*, -i(u-u^*), |u|^2-1) \quad (1.4.9)$$

の関係がある。ここで、 $u=0$  と  $u=\infty$  がそれぞれ球面の北極  $n_3=1$  と南極  $n_3=-1$  に対応する。この  $u$  を用いると、ラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{\partial_\mu u^* \partial^\mu u}{(1+|u|^2)^2} \quad (1.4.10)$$

と書き換えられる。このラグランジアンは  $CP^1$  非線型シグマ模型とも呼ばれている。また、 $S^2$  はコンパクトな多様体なので、 $S^2$  全体を覆うにはもう1つの座標  $v \equiv 1/u$  が必要になる。このときもラグランジアンは、

$$\mathcal{L} = \frac{\partial_\mu v^* \partial^\mu v}{(1+|v|^2)^2} \quad (1.4.11)$$

と同じ形で書くことができる。以下  $u$  を用いて解析をする。 $u$  を用いるとトポロジカルチャージは

$$Q_{\text{top}} = \frac{i}{2\pi} \int \frac{\partial_1 u^* \partial_2 u - \partial_2 u^* \partial_1 u}{(1+|u|^2)^2} d^2x \quad (1.4.12)$$

と書ける。この表式 (1.4.12) は、 $CP^1$  多様体がもつ Kähler 形式の引き戻しと等しい。

ソリトン解 (BP インスタントン) の導出を行う。通常、ソリトン解を得るには、2階の微分方程式である Euler-Lagrange 方程式を解かなければならない。しかし、エネルギー汎関数の下限が、トポロジカルチャージで与えられる場合、その下限を満たす条件である一階の微分方程式を解くことで、ソリトン解を得ることができる。その下限のことを Bogomol'nyi バウンド、下限を与える方程式を Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield (BPS) 方程式と呼ぶ。Euler-Lagrange 方程式の解は、エネルギーの極値を与える配位である。一方で、(1.4.14) を満たす配位は、それぞれのホモトピークラスにおいて、エネルギーの最小値を与える配位である。したがって、BPS 方程式の解は Euler-Lagrange 方程式の解になっている。しかし、運動方程式の解は必ずしも BPS 方程式を満たすわけではないことに注意する。また、BPS 方程式に解が存在するかは非自明であることにも注意する。 $O(3)$  非線型シグマ模型の BPS 方程式には解が存在しているので、ここでは BPS 方程式を解くことで BP インスタントンを導出する。

まず、BPS 方程式を導出する。 $O(3)$  非線型シグマ模型の Bogomol'nyi バウンドは次のように与えられる：

$$\begin{aligned} E &= \int \frac{\partial_1 u^* \partial_1 u + \partial_2 u^* \partial_2 u}{(1+|u|^2)^2} d^2x \\ &= \int \left[ \frac{|\partial_1 u \mp i \partial_2 u|^2}{(1+|u|^2)^2} \pm i \frac{\partial_1 u^* \partial_2 u - \partial_2 u^* \partial_1 u}{(1+|u|^2)^2} \right] d^2x \\ &\geq \left| i \int \frac{\partial_1 u^* \partial_2 u - \partial_2 u^* \partial_1 u}{(1+|u|^2)^2} d^2x \right| \\ &= 2\pi |Q_{\text{top}}| \end{aligned} \quad (1.4.13)$$

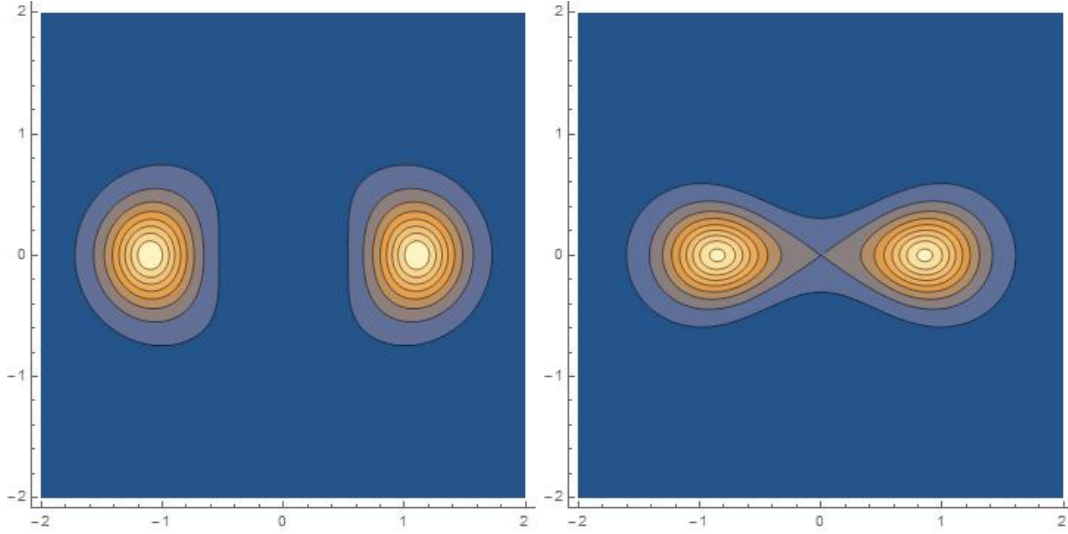


図 1.6:  $O(3)$  非線型シグマ模型における BP インスタントン解のエネルギー密度。左図,  $u = 1/(z^2 - 1)$ 。右図,  $u = (z^2 - 1)$

したがって, Bogomol'nyi バウンドを満たす条件として, BPS 方程式

$$\partial_1 u \pm i \partial_2 u = 0 \quad (1.4.14)$$

が得られる。BPS 方程式 (1.4.14) は Cauchy-Riemann 方程式である。いま,  $z = x + iy$  のように複素座標を定義すると方程式は,

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}} u &= 0 & \text{BPS} \\ \partial_z u &= 0 & \text{anti-BPS} \end{aligned} \quad (1.4.15)$$

となる。よって, それぞれの解は正則関数

$$\begin{aligned} u &= u(z) & \text{BPS} \\ u &= u(\bar{z}) & \text{anti-BPS} \end{aligned} \quad (1.4.16)$$

で与えられる。ただし, 場の 1 価性から有理関数であることが要求される。

この解は一般に

$$u = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{(z - a_1) \cdots (z - a_N)}{(z - b_1) \cdots (z - b_M)} \quad (1.4.17)$$

と記述できる。ここで,  $p$  と  $q$  は互いに素であるとする。この解に対するトポロジカルチャージは  $N$  と  $M$  の大きい方と等しい。つまり,

$$Q_{\text{top}} = \max \{N, M\} \quad (1.4.18)$$

となる。この解は  $Q_{\text{top}}$  個のソリトン解を表し,  $N > M$  のときは  $a_N$  が,  $N < M$  のときは  $b_M$  がソリトンの位置を表している。いま,  $Q_{\text{top}}$  個のソリトンを任意の場所に置いてもエネルギーは変わらない。これは, ソリトン間に相互作用が存在しないことを示している。

## 1.4.2 Baby skyrmion

$O(3)$  非線型シグマ模型における BP インスタントンは、トポロジカルチャージをもっており、それに対応したエネルギーの下限を持っているので、トポロジー的には安定である。しかし、1.3 節で言及したように、スケール不変性をもつソリトンには、動力的な不安定が存在する。それは、静的な解のサイズを変えてもエネルギーが変化しないので、時間に依存した少しの揺らぎでさえ、解は壊れてしまうためである。

その不安定性を取り除くため、新たな相互作用を模型に加えることでスケール不変性を破り、その修正された模型においてソリトン解を構築する取り組みが多くなされてきた。また、現実に現れるソリトンには、スケール不変性を持たないことから、スケール不変性を持たないソリトンの構築は、物理的応用への第一歩である。スケール不変性を破りつつ、Derrick の定理から避けるためには、ラグランジアンにスカラー場の高次微分項とポテンシャルを加えればよい。そのように拡張された模型の 1 つとして、baby Skyrme 模型 [12] が知られている。その模型のラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = \frac{M^2}{4} \partial_\mu \vec{n} \cdot \partial^\mu \vec{n} - \frac{1}{e^2} (\partial_\mu \vec{n} \times \partial_\nu \vec{n})^2 - V(\vec{n}), \quad \vec{n} \cdot \vec{n} = 1 \quad (1.4.19)$$

と与えられる。ここで、 $M, e$  は正の結合定数で、 $V$  はポテンシャルである。(1.4.19) の 1 項目は  $O(3)$  非線型シグマ模型で、2 項目は Skyrme 項と呼ばれる 4 次微分項である。Skyrme 項は、4 次微分項のなかで、高階微分を含まず、時間に関して高々 2 次である唯一の項である。この項は、 $SU(2)$  Yang-Mills 理論から  $O(3)$  非線型シグマ模型を導出する際に、高次の補正項として現れる。baby Skyrme 模型におけるポテンシャルとして、典型的なものとして次の 2 つがあげられる：

$$V_{\text{old}} = \mu^2 (1 - \vec{n}_\infty \cdot \vec{n}) \quad (1.4.20)$$

$$V_{\text{new}} = \mu^2 (1 - \vec{n}_0 \cdot \vec{n})(1 - \vec{n}_\infty \cdot \vec{n}) \quad (1.4.21)$$

ここで、 $\mu^2$  は結合定数である。ここで、 $\vec{n}_\infty$  と  $\vec{n}_0$  は、それぞれ無限遠と原点での  $\vec{n}$  の値である。 $V_{\text{old}}$  は、無限遠でのみ最小値をとる。このような、真空を 1 つだけ持つポテンシャルのことを old baby ポテンシャルと呼ぶ。一方で、 $V_{\text{new}}$  は無限遠だけでなく原点でも最小値を取る。このようなポテンシャルを new baby ポテンシャルと呼ぶ。ここで、境界条件  $\vec{n}_\infty = (0, 0, 1)$ ,  $\vec{n}_0 = (0, 0, -1)$  を用いると、

$$V_{\text{old}} = \mu^2 (1 - n_3) \quad (1.4.22)$$

$$V_{\text{new}} = \mu^2 (1 - n_3^2) \quad (1.4.23)$$

が得られる。物性物理では、 $V_{\text{old}}$  は Zeeman 項、 $V_{\text{new}}$  は磁気異方性 (easy axis anisotropy) の効果であると解釈できる。

ラグランジアン (1.4.24) に対応する静的なエネルギーは

$$E = \int \left( \frac{M^2}{4} \partial_i \vec{n} \cdot \partial_i \vec{n} + \frac{1}{e^2} (\partial_i \vec{n} \times \partial_j \vec{n})^2 + V \right) d^2x \quad (1.4.24)$$

と与えられる。ここで、Derrick の定理を確認するために、スケール変換  $\mathbf{x} \mapsto \lambda \mathbf{x}$  を考える。ただし、 $\lambda$  は正の定数とする。このとき、エネルギーは次のように変換される：

$$E(\lambda) = E_2 + \lambda^2 E_4 + \lambda^{-2} E_0. \quad (1.4.25)$$

ここで、 $E_2, E_4, E_0$  はそれぞれ非線型シグマ模型、Skyrme 項、ポテンシャルからの寄与を表しており、すべて正とする。(1.4.25) は  $\lambda$  に対して極値を持つので、(1.4.24) は適切なサイズを持った静的なソリトン解を持つことができる。また、その解は必ず  $E_4 = E_0$  を満たす。

もっともシンプルなポテンシャル  $V_{\text{old}}$  のもとでの、ソリトン解について議論する。このとき、模型には Bogomol'ny バウンドが存在するが、BPS 方程式に解はない。そのため、Euler-Lagrange 方程式を解く。簡単のために軸対称 ansatz を考える：

$$\vec{n} = (\sin f(r) \cos N\theta, \sin f(r) \sin N\theta, \cos f(r)) \quad (1.4.26)$$

ここで、 $(r, \theta)$  は極座標で、 $N$  はある整数である。 $f(r)$  は境界条件

$$f(0) = \pi, \quad f(\infty) = 0 \quad (1.4.27)$$

を満たす実数関数とする。解析の便利のために、無次元動径座標

$$\rho = \frac{r}{r_0}, \quad r_0 = \frac{4}{M^2 e^2} \quad (1.4.28)$$

を導入する。(1.4.26) をトポロジカルチャージの定義 (1.4.4) に代入すると、

$$Q_{\text{top}} = \frac{N}{4\pi} \int \sin f f' d\rho d\theta = \frac{N}{2} [\cos 0 - \cos \pi] = N \quad (1.4.29)$$

と得られる。ここで、 $'$  は  $\rho$  についての微分を表す。また、このときエネルギーは

$$\begin{aligned} E &= 2\pi \int \left( \frac{M^2}{4} \left\{ \left( \frac{df}{dr} \right)^2 + \frac{N^2 \sin^2 f}{r^2} \right\} + \frac{2}{e^2} \frac{N^2 \sin f}{r^2} \left( \frac{df}{dr} \right)^2 + \mu^2 (1 - \cos f) \right) r dr \\ &= \pi M^2 \int \left( \frac{1}{2} f'^2 + \frac{N^2 \sin^2 f}{2\rho^2} (1 + f'^2) + \tilde{\mu}^2 (1 - \cos f) \right) \rho d\rho \end{aligned} \quad (1.4.30)$$

と得られる。ここで、 $\tilde{\mu}^2 = \frac{8\mu^2}{M^4 e^2}$  とした。(1.4.30) の被積分関数は  $\tilde{\mu}^2$  しか結合定数を含んでいないため、このエネルギーの極値を導く運動方程式も  $\tilde{\mu}^2$  以外の結合定数を含まない。その運動方程式は次のように与えられる：

$$\left( \rho + \frac{N^2 \sin^2 f}{\rho} \right) f'' + \left( 1 - \frac{N^2 \sin^2 f}{\rho^2} \right) f' + \frac{N^2 \sin 2f}{2\rho} (f'^2 - 1) - \tilde{\mu}^2 \rho \sin f = 0. \quad (1.4.31)$$

この方程式の解の漸近挙動を解析的に調べることができる。原点付近では、次のように振る舞う：

$$f(\rho) \approx \pi + C\rho^N. \quad (1.4.32)$$

ここで、 $C$  はトポロジカルチャージで決まる実数である。一方、無限遠方では方程式が変形 Bessel 方程式と一致する：

$$f'' + \frac{1}{\rho} f' - \left( \frac{N^2}{\rho^2} + \tilde{\mu}^2 \right) f = 0 \quad (1.4.33)$$

したがって、無限遠方において方程式 (1.4.31) の解は  $N$  次変形 Bessel 関数  $K_N(\tilde{\mu}\rho)$  に比例する。変形 Bessel 関数の漸近形は

$$K_N(\tilde{\mu}\rho) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\tilde{\mu}\rho}} e^{-\tilde{\mu}\rho} (1 + \mathcal{O}(1/\rho)) \quad (1.4.34)$$

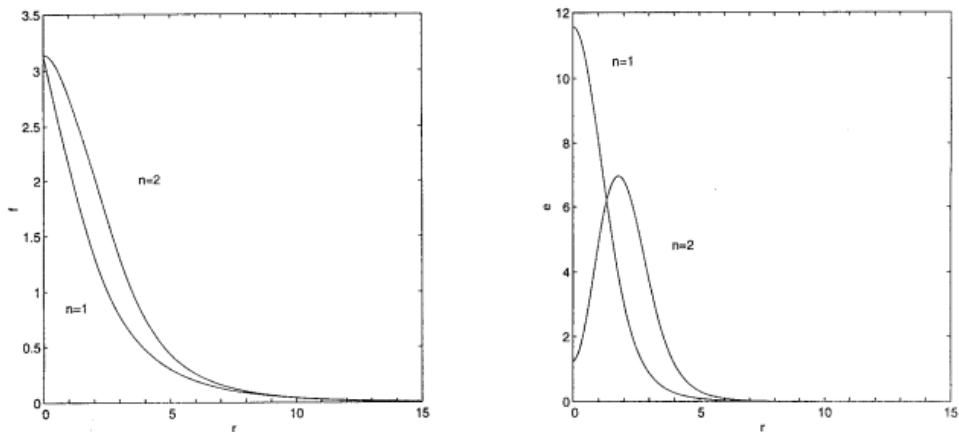


図 1.7: Baby skyrmion の動径関数。図は [12] の図を改変したものである。

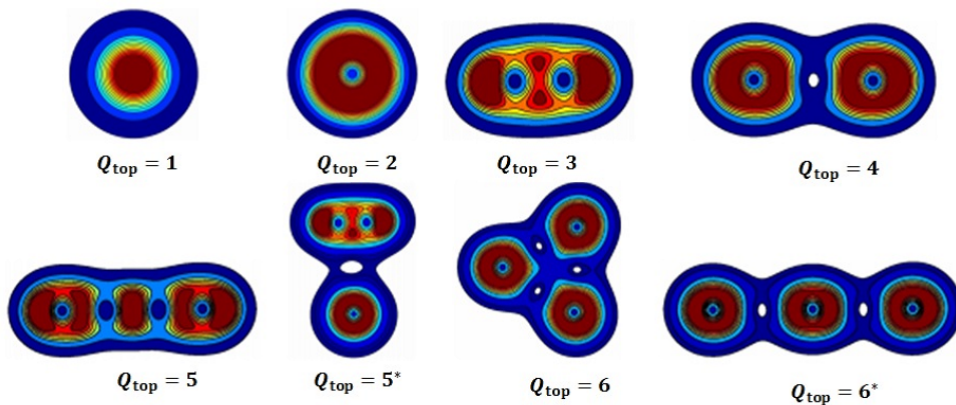


図 1.8: old baby ポテンシャルにおける非軸対称解のエネルギー密度。図は [35] の図を改変したものである。

と書けるので、無限遠方において  $f$  は  $e^{-\tilde{\mu}\rho}/\sqrt{\rho}$  のように振る舞う。

方程式 (1.4.31) を解析的に解くことは難しいので、解を得るためには数値解析が用いられる。数値計算によって得られた動径関数を図 1.7 に示す [12]。  $Q_{\text{top}} \geq 3$  に対して、エネルギー (1.4.30) を最小にする非自明な配位は、軸対称性を持たないことが知られている。図 1.8 に、数値シミュレーションによって得られた baby skyrmion 解のエネルギー密度を示す。トポロジカルチャージが大きくなると複雑な幾何学構造を持つようになっている。

一方で、new baby ポテンシャルでは、任意のトポロジカルチャージに対して、最小エネルギーを与える配位は軸対称性を持っている。このポテンシャルに対応するエネルギー密度を図 1.9 に示す。トポロジカルチャージが大きくなると軸対称性を保ちながら、解のサイズが大きくなっていく。

Baby Skyrme 模型に類似した模型として、extended Skyrme-Faddeev 模型 [36] という模型が存在する。  $SU(2)$  Yang-Mills 理論から Cho-Faddeev-Niemi-Shabanov (CFNS) 分解によって  $O(3)$  非線型シグマ模型を導出すると、その高次補正として、式 (1.4.24) 中の Skyrme 項とは異なる 4 次微分項も現れることが Gies によって示された [8]。この extended Skyrme-Faddeev 模型とは、その Gies によって見出された項も含んだ模型になっている。すなわち、extended Skyrme-Faddeev



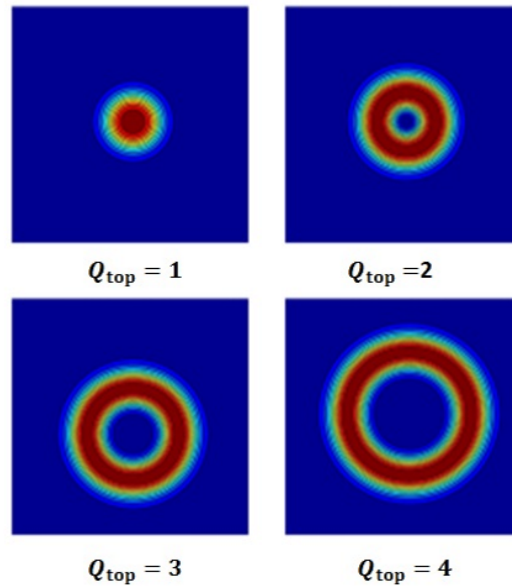


図 1.9: new baby ポテンシャルにおける数値シミュレーションの結果。図は [35] の図を改変したものである。

模型のラグランジアン密度は次のように与えられる：

$$\mathcal{L} = \frac{M^2}{4} \partial_\mu \vec{n} \cdot \partial^\mu \vec{n} - \frac{1}{e^2} (\partial_\mu \vec{n} \times \partial_\nu \vec{n})^2 + \frac{\beta}{2} (\partial_\mu \vec{n} \cdot \partial^\mu \vec{n})^2. \quad (1.4.35)$$

ここで、 $\vec{n}$  は  $\vec{n} \cdot \vec{n} = 1$  を満たすスカラー 3 重項である。また、便宜上  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$  とする。ラグランジアン (1.4.35) の 1 項目が非線型シグマ模型で、2 項目が Skyrme 項、3 項目は Gies によって見いだされた拡張項である。ここで、baby Skyrme 模型と異なり、 $e^2$  は負の値を取ることに注意する。Skyrme 項と Gies の拡張項の線形結合によって、高々 1 階微分しか含まない 4 次微分項すべてを表現できる。

この模型には  $\beta e^2 = 1$  のとき解析解が存在する [36]。その解の導出を行う。解を構成するためにはステレオグラフ射影 (1.4.9) を用いることが便利である。そのとき、ラグランジアン密度 (1.4.35) は

$$\mathcal{L} = M^2 \frac{\partial_\mu u \partial^\mu u^*}{(1 + |u|^2)^2} + \frac{8}{e^2} \left[ \frac{(\partial_\mu u)^2 (\partial^\nu u^*)^2}{(1 + |u|^2)^4} + (\beta e^2 - 1) \frac{(\partial_\mu u \partial^\mu u^*)^2}{(1 + |u|^2)^4} \right] \quad (1.4.36)$$

となる。このラグランジアンに対する運動方程式は以下のように得られる：

$$(1 + |u|^2) \partial^\mu \mathcal{K}_\mu - 2u^* \mathcal{K}_\mu \partial^\mu u = 0. \quad (1.4.37)$$

ここで、

$$\mathcal{K}_\mu \equiv M^2 \partial_\mu u - \frac{16 [(1 - \beta e^2) (\partial_\nu u \partial^\nu u^*) \partial_\mu u - (\partial_\nu u \partial^\nu u) \partial_\mu u^*]}{e^2 (1 + |u|^2)^2} \quad (1.4.38)$$

と定義した。可積分条件と呼ばれる制限を考える。可積分条件はターゲット空間で決まっており、ラグランジアン (1.4.36) のようにターゲット空間が  $S^2 = CP^1$  である理論に対する可積分条件は

$$\partial_\mu u \partial^\mu u = 0 \quad (1.4.39)$$

と与えられる [37, 36]。この制限を課すと、

$$\mathcal{K}_\mu \partial^\mu u = 0 \quad (1.4.40)$$

が満たされ、方程式 (1.4.37) は

$$M^2 \partial^\mu \partial_\mu u + \frac{16(\beta e^2 - 1)}{e^2} \partial^\mu (\partial_\nu u \partial^\nu u^* \partial_\mu u) = 0 \quad (1.4.41)$$

と書ける。さらに、結合定数を  $\beta e^2 = 1$  と置くと、結局のところ方程式は

$$\partial^\mu \partial_\mu u = 0 \quad (1.4.42)$$

に帰着する。いま、3 + 1次元 Minkowski 時空を考える。そのとき、可積分条件 (1.4.39) は

$$[(\partial_1 + i\partial_2)u][(\partial_1 - i\partial_2)u] = -[(\partial_3 + \partial_0)u][(\partial_3 + \partial_0)u] \quad (1.4.43)$$

であり、方程式 (1.4.42) は

$$(\partial_1 + i\partial_2)(\partial_1 - i\partial_2)u = -(\partial_3 + \partial_0)(\partial_3 + \partial_0)u \quad (1.4.44)$$

と書ける。明らかに、以下の条件を満たす場の配位は、この2本の方程式 (1.4.43) と (1.4.44) を同時に満たす：

$$(\partial_1 + i\epsilon_1 \partial_2)u = (\partial_3 + \epsilon_2 \partial_0)u = 0 \quad (1.4.45)$$

ここで、 $\epsilon_i = \pm 1$  で符号は独立に決められる。(1.4.45) を満たす配位は

$$u = P(z)e^{i\psi(w)} \quad (1.4.46)$$

と書ける。ここで、 $z = x^1 + i\epsilon_1 x^2$ 、 $w = x^3 - \epsilon_2 x^0$  とし、 $P(z)$  は有理関数、 $\psi(w)$  は実関数である。高次微分項を含む模型に2次元のソリトン解が存在するためには、Derrick の定理より、ポテンシャルが必要であった。しかし、ラグランジアン (1.4.36) はポテンシャルを含んでいないにも関わらず、そのような非自明な解を持つ。実は、この解はスケール不変を持っている。実際、可積分条件 (1.4.39) と  $\beta e^2 = 1$  を課すとラグランジアン (1.4.36) が

$$\mathcal{L} = M^2 \frac{\partial_\mu u \partial^\mu u^*}{(1 + |u|^2)^2} \quad (1.4.47)$$

と書けて、非線型シグマ模型に一致する。したがって、この解は不安定な鞍点解である。

この模型でも、ラグランジアン (1.4.35) にポテンシャルを加え、スケール不変性を破った解を構成する研究が行われている。そこでは、 $\beta e^2 \geq 1$  において、old baby ポテンシャル (1.4.20) や new baby ポテンシャル (1.4.21) のもと baby skyrmion と同様な性質を持つ解が得られている [38]。また、new baby 型のポテンシャル

$$\begin{aligned} V &= -\frac{2(\beta e^2 - 1)}{e^2} (1 - n_3)^{2 - \frac{2}{N}} (1 + n_3)^{2 + \frac{2}{N}} \\ &= -\frac{32(\beta e^2 - 1)}{e^2} \frac{(|u|^2)^{2 - \frac{2}{N}}}{(1 + |u|^2)^4} \end{aligned} \quad (1.4.48)$$

のもとでは

$$u = z^N \quad (1.4.49)$$

が方程式の解になる。ここで、 $N$  は任意の整数でトポロジカルチャージと一致する。

可積分条件を満たす解の注目すべき特徴として、無限個の保存量をもつことがあげられる。可積分条件 (1.4.39) のもと、無限個の保存カレントが

$$J_\mu \equiv \mathcal{W} \left\{ \frac{\partial G}{\partial u} \partial_\mu u - \frac{\partial G}{\partial u^*} \partial_\mu u^* \right\} \quad (1.4.50)$$

と与えられる。ここで、 $G$  は  $u, u^*$  の任意の実関数である。ただし、微分項は含まないとする。また、 $\mathcal{W}$  は以下のように定義される：

$$\mathcal{W} \equiv M^2 + \frac{4(\beta e^2 - 1)}{e^2} \frac{(\partial_\nu u \partial^\nu u^*)}{(1 + |u|^2)^2}. \quad (1.4.51)$$

(1.4.50) が保存量であることを確認する。可積分条件を仮定すると、

$$\begin{aligned} & \partial^\mu \left( \frac{\partial G}{\partial u} \right) \partial_\mu u - \partial^\mu \left( \frac{\partial G}{\partial u^*} \right) \partial_\mu u^* \\ &= \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \partial_\mu u \partial^\mu u + \frac{\partial^2 G}{\partial u \partial u^*} \partial_\mu u \partial^\mu u^* - \frac{\partial^2 G}{\partial u^{*2}} \partial_\mu u^* \partial^\mu u^* - \frac{\partial^2 G}{\partial u \partial u^*} \partial_\mu u^* \partial^\mu u \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.4.52)$$

となり、また運動方程式は次のように書ける：

$$\partial^\mu (\mathcal{W} \partial_\mu u) = - \frac{(1 + |u|^2)^2}{4} \frac{\partial V}{\partial u^*}. \quad (1.4.53)$$

ここで、 $V$  はポテンシャルである。よって、以上から (1.4.50) を微分すると、

$$\begin{aligned} \partial^\mu J_\mu &= \partial_\mu \left( \frac{\partial G}{\partial u} \right) \mathcal{W} \partial_\mu u + \frac{\partial G}{\partial u} \partial_\mu (\mathcal{W} \partial_\mu u) - \partial_\mu \left( \frac{\partial G}{\partial u^*} \right) \mathcal{W} \partial_\mu u^* - \frac{\partial G}{\partial u^*} \partial_\mu (\mathcal{W} \partial_\mu u^*) \\ &= - \frac{(1 + |u|^2)^2}{4} \left\{ \frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial V}{\partial u^*} - \frac{\partial G}{\partial u^*} \frac{\partial V}{\partial u} \right\} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.4.54)$$

となり、保存することがわかる。最後の等号は  $G, V$  が実関数であることを用いた。

### Baby skyrmion の観測

近年、baby skyrmion が磁性体において観測され、注目を集めている。Baby skyrmion が現れる典型的な物質としては、MnSi[39] や  $\text{Fe}_{1-x}\text{Co}_x\text{Si}$ [40] などがあげられる。これらでは、DM 相互作用が有効に働いており、Zeeman 項や磁化の異方性などのポテンシャル項とつりあうことによって baby skyrmion を安定化していると考えられる。また、単結晶 Ir(111) 上の Fe 単層膜では、リング交換相互作用がポテンシャルとつりあうことで baby skyrmion が安定に存在していると考えられている [41]。ここで、リング交換相互作用の連続極限を考えると、Skyrme 項や

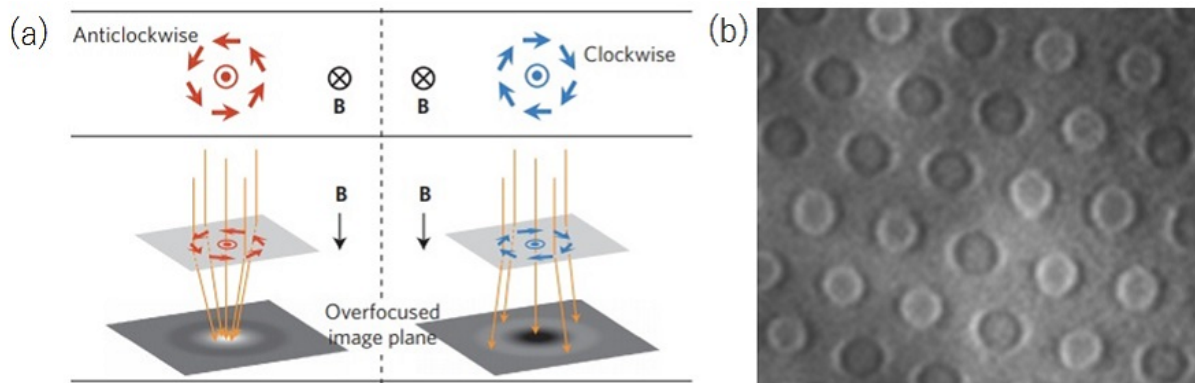


図 1.10: ローレンツ顕微鏡による baby skyrmion の観測。図 (a) は、ローレンツ顕微鏡の原理を示している。矢印は磁気モーメントを表しており、skyrmion などのスピネクチャーに垂直に電子線を照射すると、磁気モーメントによるローレンツ力によって電子線が曲げられ、明暗のパターンができる。図 (b) は、実際にローレンツ顕微鏡で観測された baby skyrmion を表している。図 (a) は [43], (b) は [44] の図を改変したものである。

Gies の拡張項のような 4 次微分項となることに注意する。これらの baby skyrmion は、中性子散乱 [39] や Lorentz 顕微鏡 [42] を用いて観測ができる。

磁性体中の baby skyrmion は、Berry 位相に起因して、伝導電子に有効な磁場を作る。この磁場のことを創発磁場と呼ぶ。伝導電子は、その創発磁場による Lorentz 力を受けて、運動の軌道が曲げられる [45]。創発磁場は、トポロジカルカレントに比例しているため、この現象はトポロジカル Hall 効果と呼ばれる。一方で、その反作用として、baby skyrmion が駆動される。これを skyrmion Hall 効果と呼ぶ。この skyrmion Hall 効果によって、電流を用いて baby skyrmion の運動を制御できる。Baby skyrmion のトポロジカルな安定性と電流を用いて操作できることにより、磁気メモリに応用できると期待がされている [14]。

### 1.4.3 Hopfion

これまで、 $O(3)$  非線型シグマ模型およびそれを拡張した模型に、2 次元空間に局在する解が存在することを見てきた。Faddeev は、Derrick の定理を満たすように拡張された  $O(3)$  非線型シグマ模型には、3 次元空間に局在するソリトンも存在すると予想した [46]。その拡張された模型を Skyrme-Faddeev 模型と呼ぶ。本項では、Skyrme-Faddeev 模型における 3 次元空間に局在するソリトンについて議論する。

Skyrme-Faddeev 模型は、次に与えられる 3+1 次元 Minkowski 時空上のラグランジアン密度で定義される：

$$\mathcal{L} = M^2 \partial_\mu \vec{n} \cdot \partial^\mu \vec{n} - \frac{1}{e^2} (\partial_\mu \vec{n} \times \partial_\nu \vec{n})^2, \quad \vec{n} \cdot \vec{n} = 1 \quad (1.4.55)$$

ここで、 $M$  は質量の次元をもち、 $e$  は無次元の結合定数である。(1.4.55) の 1 項目は  $O(3)$  非線型シグマ模型、2 項目は Skyrme 項である。Skyrme 項は Derrick の定理を満たすために、Faddeev によって導入された [46]。2 次元の場合と異なり、3 次元空間に局在するソリトンが存在するためには、ポテンシャル項を導入する必要はない。

2次元  $O(3)$  非線型シグマ模型と同様に、エネルギーの有限性は、無限遠において  $\vec{n}$  が定ベクトルになることを要求する。そのため、空間の無限遠はすべて同一視することができ、3次元空間  $\mathbb{R}^3$  が3次元球面  $S^3$  へコンパクト化される。したがって、 $\vec{n}$  のターゲット空間は  $S^2$  であることから、 $\vec{n}$  は  $S^3$  から  $S^2$  への写像を定義する。この写像  $S^3 \rightarrow S^2$  は、Hopf 写像と呼ばれ、Hopf 不変量と呼ばれる  $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$  の要素で特徴付けられる。この模型のソリトンは、Hopf 不変量で特徴付けられるため、Hopfion と呼ばれる。

Hopf 不変量は、物理空間とターゲット空間の次元が異なるため、単純なターゲット空間の巻き数として定義することはできない。しかし、積分形式で与えられたうまい定義が知られている [47]。ただし、その被積分関数は場  $\vec{n}$  で記述することはできないことに注意する。そのため、新たな2つの関数  $\mathcal{Z}_k, k = 1, 2$  を導入する。ただし、 $|\mathcal{Z}_1|^2 + |\mathcal{Z}_2|^2 = 1$  であり、 $\vec{n}$  とは次の関係にある：

$$n_a = \vec{\mathcal{Z}}^\dagger \sigma_a \vec{\mathcal{Z}}, \quad \vec{\mathcal{Z}} = (\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2)^T \quad (1.4.56)$$

ここで、 $\sigma_a$  は Pauli 行列で、 $T$  は転置を表している。この  $\mathcal{Z}_k$  を用いて、Hopf 不変量は次のように与えられる：

$$H = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} A \wedge dA \quad (1.4.57)$$

$$A = i \vec{\mathcal{Z}}^\dagger d\vec{\mathcal{Z}} \quad (1.4.58)$$

いま、 $A$  は場  $\vec{n}$  だけを用いて記述することはできないが、 $dA$  は  $\vec{n}$  を用いて

$$dA = \frac{1}{4} \vec{n} \cdot (\partial_i \vec{n} \times \partial_j \vec{n}) dx^i \wedge dx^j \quad (1.4.59)$$

と書くことができる。また、Hopf 不変量 (1.4.57) は、 $S^3$  から  $S^3$  の巻き数とも等しい。すなわち、

$$H = \frac{1}{24\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} \text{Tr} (U^\dagger dU \wedge U^\dagger dU \wedge U^\dagger dU) \quad (1.4.60)$$

と書くこともできる。ただし、

$$U = \begin{pmatrix} \mathcal{Z}_1 & -\mathcal{Z}_2^* \\ \mathcal{Z}_2 & \mathcal{Z}_1^* \end{pmatrix} \in SU(2) \quad (1.4.61)$$

である。

Hopf 不変量の幾何学的な意味について述べる。ターゲット空間の次元が空間の次元よりも低いため、ターゲット空間  $S^2$  上のある点は、空間  $\mathbb{R}^3$  上のある閉曲線に対応する。もし、 $N$  をある整数として、場のもつ Hopf 不変量が  $H = N$  ならば、 $S^2$  上の異なる2点に対応する  $\mathbb{R}^3$  上の2本の閉曲線が  $N$  回結びついていると解釈される。図 1.11 に、 $N = 1$  の場合の模式図を示す。この写像の解釈から、Hopfion はトーラスなどの閉ループ状の形をしていると考えられる。

簡単のため、トーラスの形をした配位を考え、この写像の描像を確かめる。トーラスを簡単に記述するために、トロイダル座標  $(z, \xi, \varphi)$  を次のように導入する：

$$\begin{aligned} x^1 &= \frac{r_0}{p} \sqrt{z} \cos \varphi \\ x^2 &= \frac{r_0}{p} \sqrt{z} \sin \varphi \\ x^3 &= \frac{r_0}{p} \sqrt{1-z} \sin \xi \end{aligned} \quad (1.4.62)$$

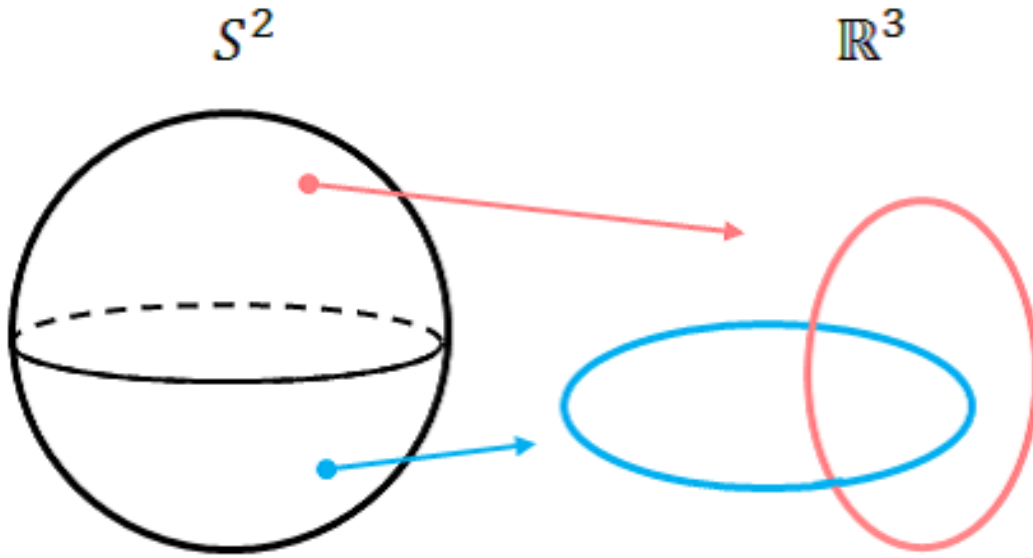


図 1.11:  $H = 1$  である Hopf 写像の模式図

ここで,  $x^i, i = 1, 2, 3$  は  $\mathbb{R}^3$  の直交座標で,  $p = 1 - \cos \xi \sqrt{1-z}$  である。また, 定義域は  $0 \leq z \leq 1, -\pi \leq \xi \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$  であり,  $r_0$  は長さの次元をもつパラメータである。次のトーラス形の ansatz を考える:

$$Z_1 = \sqrt{1-g(z,\xi)} e^{im\Theta(z,\xi)}, \quad Z_2 = \sqrt{g(z,\xi)} e^{in\varphi} \quad (1.4.63)$$

ただし,  $0 \leq g \leq 1, -\pi \leq \Theta \leq \pi$  であり,  $n, m$  はある整数とする。これを (1.4.57) に代入すると,

$$H = \frac{nm}{2\pi} \int_0^1 dz \int_{-\pi}^{\pi} d\xi [\partial_z(g\partial_\xi\Theta) - \partial_\xi(g\partial_z\Theta)] \quad (1.4.64)$$

が得られる。境界条件として,

$$g(z=0, \xi) = 0, \quad g(z=1, \xi) = 1, \quad (1.4.65)$$

$$\Theta(z, \xi = -\pi) = -\pi, \quad \Theta(z, \xi = \pi) = \pi \quad (1.4.66)$$

を課す。そのとき,  $\xi = \pm\pi$  において  $\partial_z\Theta = 0$  なので, (1.4.64) を部分積分すれば,

$$H = mn \quad (1.4.67)$$

と得られる [49]。これは,  $\xi$  に沿って  $m$  回巻いている閉曲線と,  $\varphi$  に沿って  $n$  回巻いている閉曲線が絡んでいるということを表している。さらに, 配位の  $\varphi$  に垂直なある断面は, トポロジカルチャージが  $m$  である 2次元の baby skyrmion と解釈できる。したがって, トーラス形の Hopfion は, トポロジカルチャージ  $m$  の baby skyrmion を  $\varphi$  に沿って  $n$  回巻いてできた閉ループである。一般の Hopfion も baby skyrmion でできた閉ループであると解釈できるだろう。

さて, Hopfion 解について議論しよう。  $N = 1, 2$  に対しては, トーラス形の配位がその Hopf 不変量をもつ配位の中で最小のエネルギーを与えることが知られている。したがって, ansatz(1.4.63)

のもとで Euler-Lagrange 方程式を解けば、適切な解が得られるだろう。しかし、実際には Euler-Lagrange 方程式はとても複雑であるため、ansatz を課したエネルギー汎関数を数値的に極小化することによって解が構築された [50, 15]。一方で、より高次の  $N$  に対しては、軸対称性をもつ配位は、その Hopf 不変量に対する最小のエネルギーを与える配位にならないため、ansatz を用いずに、3次元の数値シミュレーションによって、エネルギー汎関数を極小化することで解が構築された [48, 51, 52, 53]。

Hopf 不変量が 1 から 8 までの解がもつ典型的な量（コア、ねじれ構造、エネルギー密度）の等位面を図 1.12 に示す。コアは、 $\vec{n} = (0, 0, -1)$  を意味するが、図示するのが難しいため、 $\epsilon \approx 0.2$  として  $n_3 = -1 + \epsilon$  のある等位面を表している。ねじれ構造は、 $\vec{n} = (0, 0, -1)$  と  $\vec{n} = (0, -1, 0)$  の周りのある等位面を図示したものであり、これから Hopf 不変量を確認することができる。解に対するそれらの量の性質を以下に示す：

- $H = 1, 2$

どちらもコアは軸対称性をもつトーラスである。ただし、エネルギー密度は、 $H = 1$  の場合には原点に局在しているのに対して、 $H = 2$  の場合にはトーラスに近い形をしている。ねじれ構造を見ると、実際に Hopf 不変量の値だけ巻きついていることがわかる。

- $H = 3, 4, 5$

これらのコアは、1つの閉ループになっている、軸対称性は持っていない。エネルギー密度はトーラス状ではなく、それぞれ穴が  $H - 1$  個空いたプリッツェルのような形状をしている。

- $H = 6, 7, 8$

$H$  が 6 以上になると、コアの形は単一の閉ループではなく、2つのループが絡んだ状態になる。2つのループそれぞれがすでに絡み合っているため、Hopf 不変量をねじれ構造から一目で理解するのは難しい。 $H = 7$  のコアの形は三葉結び目のような形状をしており、 $H = 8$  のコアは  $H = 2$  のコア 2つが絡んでいる形をしている。

Hopfion は、Skyrme-Faddeev 模型 (1.4.55) の他にも、(1.4.55) にポテンシャル項や DM 相互作用を加えた模型や Gies による拡張項を加えた extended Skyrme-Faddeev 模型においても構築されている [54, 55, 49]。

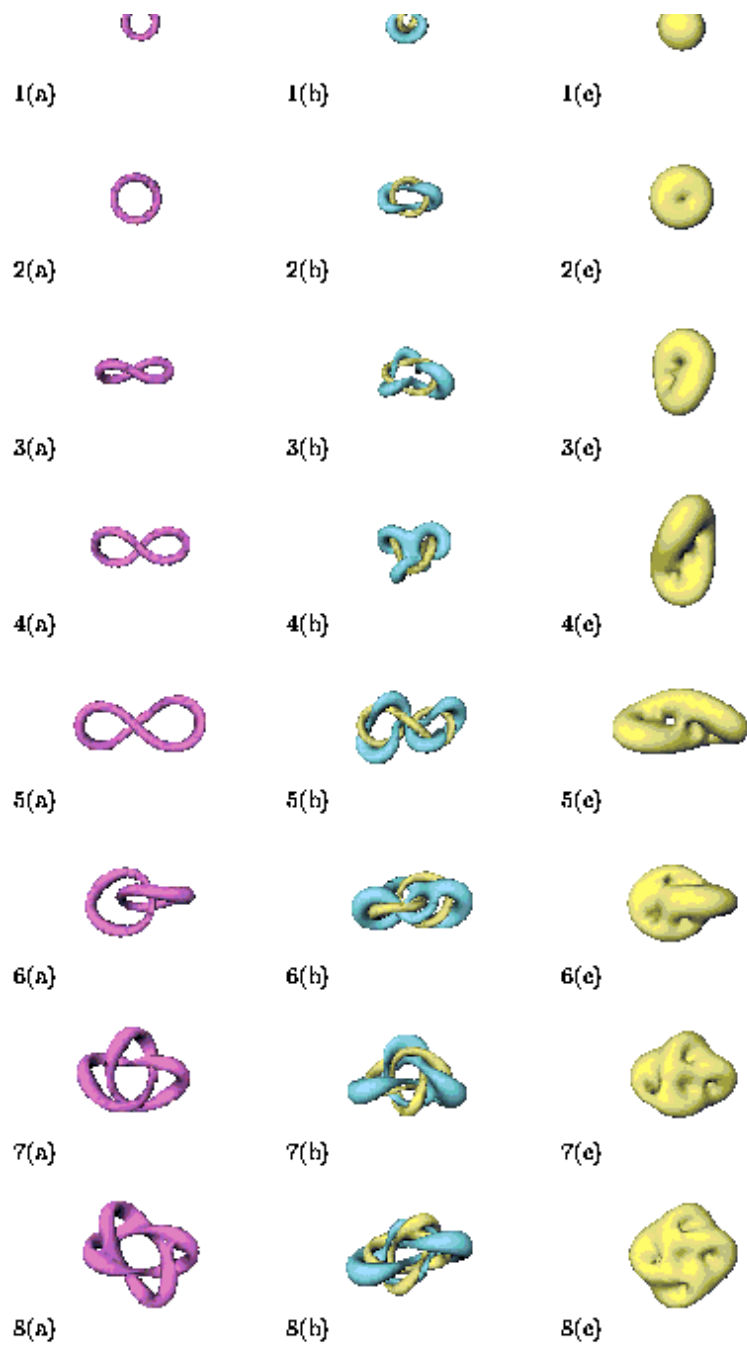


図 1.12:  $H = 1$  から 8 の Hopfion。左から，コア，ねじれ構造，エネルギー等位面を表している。また，下に行くにしたがって Hopf 不変量  $H$  が大きくなっている。図は [48] の図を改変したものである。



## 第2章 $CP^{N-1}$ 非線型シグマ模型における インスタントン解

この章では、 $SU(N)$  対称性をもつ非線型シグマ模型である、 $CP^{N-1}$  非線型シグマ模型を導入し、その模型のインスタントン解について紹介する。ここで、 $CP^1$  非線型シグマ模型は、 $O(3)$  非線型シグマ模型と等価である。そのため、 $CP^{N-1}$  非線型シグマ模型は、 $O(3)$  非線型シグマ模型を  $SU(N)$  対称性を持たせるように拡張した模型である。この模型には、Belavin-Polyakov 型の (反) インスタントン解 [22] のほか、Din-Zakrewski 解と呼ばれるインスタントン-反インスタントンの結合状態である配位も解析解として存在する [23]。さらに、 $CP^{N-1}$  非線型シグマ模型に高次微分項を加えた模型、 $CP^{N-1}$  extended Skyrme-Faddeev 模型にも、高次微分項の結合定数がある条件を満たす場合、インスタントン解が存在するので、それについても紹介する [24]。

2.1 節では、 $CP^{N-1}$  非線型シグマ模型におけるインスタントン解について議論する。まず、2.1.1 項では、対称性やトポロジカルチャージなど、模型のもつ性質について議論する。2.1.2 項では BP インスタントン解を、2.1.3 項では Din-Zakrewski 解を議論する。2.2 節では、 $CP^{N-1}$  extended Skyrme-Faddeev 模型の持つインスタントン解について議論する。

### 2.1 $CP^{N-1}$ 非線型シグマ模型におけるインスタントン解

#### 2.1.1 $CP^{N-1}$ 非線型シグマ模型

3+1 次元 Minkowski 時空における  $CP^{N-1}$  非線型シグマ模型のラグランジアン密度は次のように与えられる：

$$\mathcal{L} = (D_\mu Z)^\dagger (D^\mu Z), \quad Z^\dagger \cdot Z = 1 \quad (2.1.1)$$

ここで、 $Z = (Z_1, \dots, Z_N)$  は大きさ 1 の  $N$  成分の複素ベクトルである。また、共変微分  $D_\mu$  は、 $N$  成分のベクトル  $\Psi$  に対して次のように作用する：

$$D_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi - (Z^\dagger \cdot \partial_\mu Z) \Psi \quad (2.1.2)$$

ラグランジアン (2.1.1) は大域的な変換  $Z \mapsto AZ$  のもとで不変に保たれる。ここで、 $A \in SU(N)$  である。また、エネルギーの有限性から要求される境界条件は、無限遠において

$$D_\mu Z = 0 \quad (2.1.3)$$

である。この条件は、 $Z_k = |Z_k| e^{i\varphi_k}$  と置くと、

$$Z^\dagger \cdot \partial_\mu Z = \frac{\partial_\mu |Z_k|}{|Z_k|} + i \partial_\mu \varphi_k \quad (2.1.4)$$

と表せる。ここで、非線型拘束条件  $Z^\dagger \cdot Z = 1$  より、

$$\partial_\mu(Z^\dagger \cdot Z) = \partial_\mu Z^\dagger \cdot Z + Z^\dagger \cdot \partial_\mu Z = 2\text{Re}(Z^\dagger \cdot \partial_\mu Z) = 0 \quad (2.1.5)$$

が成り立つので、(2.1.4)の左辺は純虚数である。さらに、(2.1.4)の左辺は添え字  $k$  に拠らないことから、 $|\vec{x}| \rightarrow \infty$  において満たすべき境界条件は

$$\begin{cases} \partial_\mu |Z_k| = 0 \\ \varphi_1 = \cdots = \varphi_{N+1} \end{cases} \quad (2.1.6)$$

である。この境界条件を満たす配位のうち、最大の対称性をもつのは、一般性を欠くことなく

$$Z(\mathbf{x}) \xrightarrow{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} Z_\infty = (e^{i\varphi(\theta)}, 0, \dots, 0) \quad (2.1.7)$$

と表せる。したがって、 $SU(N)$  対称性から自発的に以下の大域的な変換に対応する  $SU(N-1) \times U(1)$  対称性まで破れる：

$$Z \mapsto BZ, \quad B = e^{i\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{B} \end{pmatrix}, \quad \hat{B} \in SU(N-1) \quad (2.1.8)$$

したがって、この模型における2次元平面上に局在するソリトン解の配位はホモトピー群

$$\pi_2(SU(N)/(SU(N-1) \times U(1))) = \pi_1(U(1)) = \mathbb{Z} \quad (2.1.9)$$

の要素で特徴付けられる。このホモトピー群の要素に対応するトポロジカルチャージは

$$Q_{\text{top}} = -\frac{i}{2\pi} \int d^2x \varepsilon^{ij} (D_i Z)^\dagger (D_j Z) \quad (2.1.10)$$

で与えられる。

解を導出するために、 $CP^{N-1}$  非線型シグマ模型の Euler-Lagrange 方程式を導出する。 $Z^\dagger Z = 1$  を満たしたまま、変分を取るために、Lagrange の未定乗数  $\lambda (Z^\dagger Z - 1)$  を導入する。未定乗数を加えたラグランジアンを  $\mathcal{L}_\lambda$  と書き、その変分を計算すると、

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}_\lambda}{\partial (\partial_\mu Z^\dagger)} - \frac{\partial \mathcal{L}_\lambda}{\partial Z^\dagger} &= \partial_\mu \partial^\mu Z - 2(Z^\dagger \partial_\mu Z) \partial^\mu Z - \lambda Z \\ &= \partial_\mu \partial^\mu Z - (Z^\dagger \partial_\mu Z) \partial^\mu Z - \partial_\mu [(Z^\dagger \partial^\mu Z) Z] + \partial^\mu (Z^\dagger \partial_\mu Z) Z - \lambda Z \\ &= D_\mu D^\mu Z - (Z^\dagger \partial_\mu Z)^2 Z + \partial^\mu (Z^\dagger \partial_\mu Z) Z - \lambda Z \\ &= D_\mu D^\mu Z - \tilde{\lambda} Z \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

となる。ここで、 $\tilde{\lambda} = (Z^\dagger \partial_\mu Z)^2 - \partial^\mu (Z^\dagger \partial_\mu Z) + \lambda$  である。式(2.1.11)に  $Z^\dagger$  をかけると、

$$\tilde{\lambda} = Z D_\mu D^\mu Z = -(D_\mu Z)^\dagger (D^\mu Z) \quad (2.1.12)$$

と得られる。ここで、2つ目の等式を得るために  $Z^\dagger D_\mu Z = 0$  を用いた。よって、 $CP^{N-1}$  非線型シグマ模型の Euler-Lagrange 方程式は、

$$D_\mu D^\mu Z + (D_\mu Z)^\dagger (D^\mu Z) Z = 0 \quad (2.1.13)$$

と得られる。以下では、この方程式がもつ2種類の非自明な解—すなわち、BP インスタントン解 [56] と Din-Zakrewski 解 [23]—について議論する。

## 2.1.2 インスタントン解

まず、BP インスタントン解から議論する。方程式を解くためには、次に与えるように、複素スカラー場  $u_i$  を用いて  $Z$  を記述することが便利である：

$$Z = \frac{(1, u_1, \dots, u_{N-1})^T}{\sqrt{1 + |u_1|^2 + \dots + |u_{N-1}|^2}} \quad (2.1.14)$$

ここで、 $T$  は転置を表している。(2.1.14) を (2.1.13) に代入すると、次の  $N-1$  本の方程式が得られる：

$$(1 + u^\dagger \cdot u) \partial_\mu \partial^\mu u_k - 2(\partial_\mu u^\dagger \cdot u) \partial^\mu u_k = 0, \quad k = 1, \dots, N-1 \quad (2.1.15)$$

いま、 $CP^1$  の場合と同様に座標

$$z \equiv x^1 + i\epsilon_1 x^2, \quad w \equiv x^3 + \epsilon_2 x^0 \quad (2.1.16)$$

を導入する。ここで、 $\epsilon_a = \pm 1$  で、符号は独立に選ばれる。この座標を用いて複素スカラー場  $u_k$  を

$$u_k = u_k(z, w) \quad (2.1.17)$$

と仮定すると、

$$\partial_1 u_k = i\epsilon_1 \partial_2 u_k, \quad \partial_3 u_k = \epsilon_2 \partial_0 u_k \quad (2.1.18)$$

を満たす。この関係式から

$$\partial_\mu \partial^\mu u_k = (\partial_0 + \partial_3)(\partial_0 - \partial_3)u_k - (\partial_1 + i\partial_2)(\partial_1 - i\partial_2)u_k = 0 \quad (2.1.19)$$

$$(\partial_\mu u_j)(\partial^\mu u_k) = \partial_0 u_j \partial_0 u_k - \partial_1 u_j \partial_1 u_k - \partial_2 u_j \partial_2 u_k - \partial_3 u_j \partial_3 u_k = 0 \quad (2.1.20)$$

が成り立つので、(2.1.17) は方程式 (2.1.15) を満たしている。ゆえに、場の 1 価性から一般解が

$$u_k = P_k(z) e^{i\psi_k(w)} \quad (2.1.21)$$

と記述できる。ここで、場の 1 価性から  $P_k(z)$  は  $z$  の任意の有理関数で、 $\psi_k(w)$  は  $w$  の任意の実関数である。

静的な BP インスタントンは、 $CP^{N-1}$  非線型シグマ模型における BPS 方程式からも得られる。2次元平面上の  $CP^{N-1}$  非線型シグマ模型の Bogomol'nyi バウンドは、

$$\begin{aligned} E_{\text{static}} &= \int d^2x (D_i Z)^\dagger (D_i Z) \\ &= \frac{1}{2} \int d^2x \left[ (D_i Z)^\dagger (D_i Z) + (\varepsilon_{ij} D_j Z)^\dagger (\varepsilon_{ik} D_k Z) \right] \\ &= \frac{1}{2} \int d^2x (D_i Z \pm i\varepsilon_{ij} D_j Z)^\dagger (D_i Z \pm i\varepsilon_{ik} D_k Z) \mp i \int d^2x \varepsilon_{ij} (D_i Z)^\dagger (D_j Z) \\ &\geq 2\pi |Q_{\text{top}}| \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

と与えられる。ただし、 $i, j, k = 1, 2$  である。したがって、BPS 方程式は

$$D_i Z = \pm i\varepsilon_{ij} D_j Z \quad (2.1.23)$$

である。いま (2.1.14) を次のように記述する：

$$Z = \frac{\hat{Z}}{|\hat{Z}|}, \quad \hat{Z} = (1, u_1, \dots, u_{N-1})^T \quad (2.1.24)$$

このとき, (2.1.23) は

$$\frac{\partial_i \hat{Z}}{|\hat{Z}|} + D_i \left( \frac{1}{|\hat{Z}|} \right) \hat{Z} = \pm i \varepsilon_{ij} \left[ \frac{\partial_j \hat{Z}}{|\hat{Z}|} + D_j \left( \frac{1}{|\hat{Z}|} \right) \hat{Z} \right] \quad (2.1.25)$$

となる。ここで,  $\hat{Z}$  の第一成分が 1 であることと (2.1.23) より,

$$D_i \left( \frac{1}{|\hat{Z}|} \right) = \pm i \varepsilon_{ij} D_j \left( \frac{1}{|\hat{Z}|} \right) \quad (2.1.26)$$

が成り立つことに注意すると, (2.1.14) は

$$\partial_i u_k = \pm i \varepsilon_{ij} u_k \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \quad (2.1.27)$$

に帰着する。ただし, すべての  $k$  に対して, 同じ符号を選ばなくてはならないことに注意する。式 (2.1.27) は Cauchy-Riemann 方程式なので, 確かに静的な BP インスタントンすなわち  $u_k = P_k(z)$  が BPS 方程式から得られることが示された。

BP インスタントンのトポロジカルチャージは,  $x^1 x^2$  平面上の無限遠を含む領域における,  $u_k$  のもつポールの数と等しい。具体例として, もっとも単純な解

$$u_k = c_k \left( \frac{z}{r_0} \right)^{n_k} \quad (2.1.28)$$

を考える。ここで,  $c_k$  は任意の複素定数で,  $n_k$  は整数,  $r_0$  は長さのスケールを持った定数とする。このとき, トポロジカルチャージは

$$Q_{\text{top}} = (n_{\text{max}} + |n_{\text{min}}|) \epsilon_1 \quad (2.1.29)$$

と与えられる。ここで,  $n_{\text{max}}$  は  $n_k$  の中で最大の正の整数で,  $n_{\text{min}}$  は  $n_k$  の中で最小の負の整数である。以下に例をあげる (ただし, 簡単のため  $\epsilon_1 = 1$  とする。):

$$\begin{aligned} (n_1, n_2, n_3) = (4, 3, 1) &\implies Q_{\text{top}} = n_1 = 4 \\ (n_1, n_2, n_3) = (4, 3, -1) &\implies Q_{\text{top}} = n_1 + |n_3| = 5 \end{aligned} \quad (2.1.30)$$

また, 解 (2.1.28) は Bogomol'nyi バウンドを満たしているので, 単位長さ当たりのエネルギーは

$$E = 2\pi(n_{\text{max}} + |n_{\text{min}}|) = 2\pi Q_{\text{top}} \quad (2.1.31)$$

と表すことができる。

### 2.1.3 Din-Zakrzewski 解

次に、インスタントン-反インスタントンの結合状態である Din-Zakrzewski (DZ) 解の簡単なレビューを行う。この解は BPS 方程式から得ることができないため、Euler-Lagrange 方程式を直接解かなければならない。しかし、統一的な構築方法が知られている。それは、静的な BP インスタントン解の Bäcklund 変換するというものである。Bäcklund 変換の演算子  $P_{\pm}$  を、任意のベクトル  $\Phi$  に対して、

$$P_{\pm}\Phi = \partial_{\pm}\Phi - \frac{(\Phi^{\dagger}\partial_{\pm}\Phi)}{|\Phi|^2}\Phi \quad (2.1.32)$$

と定義する。ここで、便宜上  $\partial_+ \equiv \partial_z$ ,  $\partial_- \equiv \partial_{\bar{z}}$  とした。このとき、 $Z_{\text{BP}}$  を静的な BP インスタントン解を表す複素ベクトルとして、DZ 解は

$$Z^{(n)} = \frac{P_+^n Z_{\text{BP}}}{|P_+^n Z_{\text{BP}}|}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.1.33)$$

で与えられる。ここで、 $P_+^n Z = P_+(P_+^{n-1} Z)$  という関係がある。また、 $\Phi = \hat{\Phi}/|\hat{\Phi}|$  に対して、

$$P_{\pm}\Phi = \frac{P_{\pm}\hat{\Phi}}{|\hat{\Phi}|} \quad (2.1.34)$$

となるので、 $Z^{(n)}$  は

$$Z^{(n)} = \frac{P_+ Z^{(n-1)}}{|P_+ Z^{(n-1)}|}, \quad n = 1, \dots, N-1 \quad (2.1.35)$$

と書くことができる。 $Z^{(n)}$  はすべて Euler-Lagrange 方程式を満たし、特に  $Z^{(0)}$  は BP インスタントン、 $Z^{(N-1)}$  は BP 反インスタントンである。また、 $0 < n < N-1$  に対してはインスタントン-反インスタントンの結合状態である。このインスタントン-反インスタントンの結合状態は、鞍点解であることが知られている。

式 (2.1.33) が Euler-Lagrange 方程式を満たすことを示す。2次元平面上の静的な配位に対して、Euler-Lagrange 方程式 (2.1.13) は

$$(D_+ D_- + D_- D_+) Z + (|D_+ Z|^2 + |D_- Z|^2) Z = 0 \quad (2.1.36)$$

と書ける。ここで、

$$[D_+, D_-] = |D_+ Z|^2 - |D_- Z|^2 \quad (2.1.37)$$

を用いると、(2.1.36) は

$$D_- D_+ Z + |D_+ Z|^2 Z = 0 \quad (2.1.38)$$

もしくは

$$D_+ D_- Z + |D_- Z|^2 Z = 0 \quad (2.1.39)$$

と書くことができる。

DZ 解 (2.1.33) が (2.1.38) または (2.1.39) を満たすことを示すには、(2.1.35) の関係を用いて、

$$Z = \frac{D_+^{(\omega)} \omega}{|D_+^{(\omega)} \omega|}, \quad D_{\pm}^{(\omega)} = \partial_{\pm} - \omega^{\dagger} \partial_{\pm} \omega \quad (2.1.40)$$

が (2.1.39) を満たすことを示せばよい。ここで、 $\omega$  は次の関係を満たす  $N$  成分の単位複素ベクトルである：

$$D_-^{(\omega)} D_+^{(\omega)} \omega + \chi^2 \omega = 0, \quad \chi = \left| D_+^{(\omega)} \omega \right| \quad (2.1.41)$$

つまり、 $D_+^{(\omega)} \omega$  は  $P_+ Z^{(n-1)}$  に対応している。

(2.1.41) に  $D_+^{(\omega)} = \chi Z$  を代入する。そのとき、 $\omega$  と  $D_{\pm}^{(\omega)} \omega$  は直交しているので  $\omega^\dagger Z = 0$  であることを使うと

$$Z^\dagger \partial_{\pm} Z = \omega^\dagger \partial_{\pm} \omega \pm \partial_{\pm} \log \chi \quad (2.1.42)$$

が得られる。この関係を使うと、

$$\begin{aligned} D_- Z &= D_-^{(\omega)} \left( \frac{D_+^{(\omega)} \omega}{\chi} \right) + (\partial_- \log \chi) Z \\ &= \frac{1}{\chi} D_-^{(\omega)} D_+^{(\omega)} \omega - \chi Z \frac{\partial_- \chi}{\chi^2} + (\partial_- \log \chi) Z \\ &= -\chi \omega \end{aligned} \quad (2.1.43)$$

となる。さらに、

$$\begin{aligned} D_+ D_- Z &= -D_+(\chi \omega) \\ &= -\chi D_+^{(\omega)} \omega - \partial_+ \chi \omega + \partial_+ (\log \chi) \chi \omega \\ &= -\chi^2 Z \end{aligned} \quad (2.1.44)$$

が得られる。(2.1.44) の左から  $Z^\dagger$  を掛けると、

$$\chi^2 = -Z^\dagger D_+ D_- Z = |D_- Z|^2 \quad (2.1.45)$$

であることがわかる。したがって、式 (2.1.40) で与えられた  $Z$  は、(2.1.39) を満たすことが示された。 $Z^{(0)} = Z_{\text{BP}}$  は Euler-Lagrange 方程式を確かに満たすので、 $Z^{(0)}$  を Bäcklund 変換して得られた  $Z^{(1)}$  も Euler-Lagrange 方程式を満たす。同様にして、 $0 < n \leq N-1$  に対して、Euler-Lagrange 方程式を満たす  $Z^{(n-1)}$  を変換することで得られた  $Z^{(n)}$  が、Euler-Lagrange 方程式を満たすことが帰納的にわかる。

## 2.2 $CP^{N-1}$ extended Skyrme-Faddeev 模型

前章で紹介した extended Skyrme-Faddeev 模型は、 $SU(2)$  Yang-Mills 理論から導出できることから、 $SU(2)$  Yang-Mills 理論の有効模型だと考えられている。より高次の  $SU(N)$  ゲージ群を持つ Yang-Mills 理論から、有効模型を導出するのは非常に困難で、いまだ完全な導出はなされていない。ただし、 $SU(N)$  Yang-Mills 理論の低エネルギー領域における自由度は、 $SU(N)$  の商空間である  $CP^{N-1}$  や  $F_{N-1}$  という多様体で記述されると予想されている [57]。それゆえ、ターゲット空間が  $CP^1$  である extended Skyrme-Faddeev 模型を、ターゲット空間が  $SU(N)$  の商空間であるように拡張した模型が  $SU(N)$  Yang-Mills 理論の有効模型の候補として提案されている。そのひとつが  $CP^{N-1}$  extended Skyrme-Faddeev 模型である。ここでは、単に  $CP^{N-1}$

Skyrme-Faddeev 模型と呼ぶことにする。 $CP^{N-1}$  Skyrme-Faddeev 模型は、 $CP^{N-1}$  非線型シグマ模型に4次の微分項を加えた模型になっており、extended Skyrme-Faddeev 模型のときと同様に、あるパラメータ条件の下、無限個の保存量を持った解析解が見つかっている [24]。この節では、模型の基本的な性質と解析解の導出について紹介する。

前節では  $CP^{N-1}$  非線型シグマ模型を記述するために、 $N$  次元複素ベクトル  $Z$  と複素スカラー場  $u_k$  を用いた。 $Z$  は対称性の解析、 $u_k$  は解の導出に便利であった。一方で、Skyrme 項などの構成には principal variable [58] と呼ばれる行列を用いることが便利である。そのため、まず principal variable を導入する。Principal variable は、対合的自己同型写像  $\sigma$  を用いて定義される ( $\sigma^2 = 1$ )。ただし、対合的自己同型写像  $\sigma$  の下で、 $SU(N)$  の部分群  $SU(N-1) \times U(1)$  の要素は不変であるとする。そのような写像  $\sigma$  は、 $T \in SU(N)$  に対して、

$$\sigma(T) = \Omega T \Omega^{-1}; \quad \Omega = e^{i\pi\Lambda}; \quad \Lambda = \frac{2\omega_{N-1} \cdot H}{\alpha_{N-1}^2} \quad (2.2.1)$$

と定義できる。ここで、 $\alpha_{N-1}$  は  $SU(N)$  における  $N-1$  番目の単純ルート (simple roots) で、 $\omega_{N-1}$  は  $\alpha_{N-1}$  に対応する  $SU(N)$  の基本ウェイト (fundamental weights) である。つまり、 $2\omega_{N-1} \cdot \alpha_{N-1} / \alpha_{N-1}^2 = 1$  を満たす。また、不変に保たれる部分群  $SU(N-1) \times U(1)$  は、Cartan 生成子  $H_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, N-1$ ) と  $\alpha_{N-1}$  でない単純ルートに対応した昇降演算子で構成される。また、定義より、

$$\sigma(\sigma(T)) = T, \quad \sigma(S) = S, \quad T \in SU(N), \quad S \in SU(N-1) \times U(1) \quad (2.2.2)$$

が成り立つ。

例として、 $N = 3$  の場合を考えてみる。 $SU(3)$  の生成子として Gell-mann 行列を用いる。このとき、Cartan 生成子是对角行列である  $\lambda_3, \lambda_8$  を選ぶと便利である。つまり、

$$H = (H_1, H_2) = (\lambda_3/\sqrt{2}, \lambda_8/\sqrt{2}) \quad (2.2.3)$$

と採る。一方、昇降演算子は Gell-mann 行列の  $\lambda_3, \lambda_8$  以外の成分を用いて

$$\begin{aligned} E_{\pm\alpha_1} &= \frac{1}{2}(\lambda_1 \pm \lambda_2) & \alpha_1 &= (\sqrt{2}, 0) \\ E_{\pm\alpha_2} &= \frac{1}{2}(\lambda_4 \pm \lambda_5) & \alpha_2 &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) \\ E_{\pm\alpha_3} &= \frac{1}{2}(\lambda_6 \pm \lambda_7) & \alpha_3 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

と定義できる。ここで、 $\alpha_i$  はルートベクトルである。 $\alpha_3$  は他の2つのルートベクトルの正係数の和 (係数はともに1) で表せるので単純ルートでない。一方、 $\alpha_1, \alpha_2$  はそれぞれ他の2つのルートベクトルの正係数の和で表せないので単純ルートである。2つの単純ルートに対応した基本ウェイト  $\omega_i$  はそれぞれ

$$\omega_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \quad \omega_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \quad (2.2.5)$$

と得られる。よって,

$$\Lambda = \frac{2\omega_2 \cdot H}{\alpha_2^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8, \quad (2.2.6)$$

$$\Omega = \exp\left(\pi i \lambda_8 / \sqrt{3}\right) = e^{\pi i/3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.2.7)$$

となる。以上から

$$\sigma(\sigma(T)) = \Omega \Omega T \Omega^{-1} \Omega^{-1} = T \quad (2.2.8)$$

が成り立つので,  $\sigma$  は対合的自己同形写像の定義をたしかに満たしている。また, 不変部分群  $SU(2) \times U(1)$  の元は, Cartan 生成子と昇降演算子  $E_{\pm\alpha_1}$  で構成される。つまり, 一般に

$$k = e^{i\theta} \begin{pmatrix} \hat{k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2.9)$$

と表せる。ここで,  $\hat{k}$  は  $\text{Tr}\hat{k} = -1$  を満たす  $2 \times 2$  のユニタリ一行列である。この  $k$  に  $\sigma$  を作用させると,

$$\sigma(k) = e^{i\theta} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = e^{i\theta} \begin{pmatrix} \hat{k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = k \quad (2.2.10)$$

となり, 確かに  $k \in SU(N-1) \times U(1)$  は  $\sigma$  のもと不変に保たれている。

Principal variable  $X$  の定義は, 対合的自己同形写像を用いて

$$X(g) \equiv g\sigma(g)^{-1} \quad g \in SU(N) \quad (2.2.11)$$

と与えられる。 $k \in SU(N-1) \times U(1)$  に対して  $\sigma(k) = k$  なので,  $X(gk) = X(g)$  が成り立つ。したがって, 部分群  $SU(N-1) \times U(1)$  の要素はすべて単位元と見なせるので,  $CP^{N-1}$  空間上の 1 点に対してただ 1 つの  $X$  を定義できる。

3+1 次元 Minkowski 時空上の  $CP^{N-1}$  Skyrme-Faddeev 模型のラグランジアン密度は principal variable を用いて次のように与えられる:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{M^2}{2} \text{Tr} (X^{-1} \partial_\mu X)^2 + \frac{1}{e^2} \text{Tr} ([X^{-1} \partial_\mu X, X^{-1} \partial_\nu X])^2 \\ & + \frac{\beta}{2} [\text{Tr} (X^{-1} \partial_\mu X)^2]^2 + \gamma [\text{Tr} (X^{-1} \partial_\mu X X^{-1} \partial_\nu X)]^2 \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

ここで,  $M$  は質量の次元を持ち,  $e^2$  と  $\beta, \gamma$  は無次元の定数である。ただし,  $e^2 < 0$  とする。右辺第 1 項は非線型シグマ模型, 第 2 項は Skyrme 項に対応している。第 3 項, 第 4 項は通常の Skyrme-Faddeev 模型には含まれない項で, 一般化のために加えられている。これらの項を加えることで, 4 次の微分項のすべての組み合わせを表すことができる。 $N = 2$  の場合, この模型は extended Skyrme-Faddeev 模型と一致する。

このラグランジアン (2.2.12) は  $g \in SU(N)$  に対して 2 種類の対称性を持っている。1 つ目は左からの大域的  $SU(N)$  対称性。つまり,  $g \rightarrow \bar{g}g$  である。ここで,  $\bar{g} \in SU(N)$ 。これは,  $X \rightarrow \bar{g}X\sigma(\bar{g})$  に対応している。このとき,  $X^{-1} \partial_\mu X \rightarrow \sigma(\bar{g})X^{-1} \partial_\mu X \sigma(\bar{g})^{-1}$  と変換され, トレー



スの循環性よりラグランジアン (2.2.12) は不変である。2つ目は右からの局所的  $SU(N-1) \times U(1)$  対称性。つまり,  $g \rightarrow gk$  である。ここで,  $k \in SU(N-1) \times U(1)$  である。この変換は,  $X$  の定義から明らかに  $X$  を不変に保つ。したがって, ラグランジアン (2.2.12) はこの変換のもとでも不変に保たれる。

複素スカラー場  $u_i$  を導入し, principal variable  $X$  を具体的に記述する。  $SU(N)$  の  $N$  次元基本表現を考える。このとき, 群元  $g \in SU(N)$  は

$$g \equiv \frac{1}{\vartheta} \begin{pmatrix} \Delta & i u \\ i u^\dagger & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2.13)$$

と与えられる。ここで  $\vartheta = \sqrt{1 + u^\dagger \cdot u}$  である。また,  $\Delta$  は  $(N-1) \times (N-1)$  のエルミート行列

$$\Delta_{ij} = \vartheta \delta_{ij} - \frac{u_i u_j^*}{1 + \vartheta} \quad (2.2.14)$$

と定義され, 次の関係を満たす:

$$\Delta \cdot u = u, \quad u^\dagger \cdot \Delta = u^\dagger. \quad (2.2.15)$$

いま考えている表現のもとでは, (2.2.1) で定義された  $\Omega$  は

$$\Omega = e^{\pi i/N} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{N-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.2.16)$$

と書ける。ここで,  $\mathbf{1}_{N-1}$  は,  $N-1$  次正方形行列の単位行列である。したがって,  $g$  に対合的自己同形写像を作用させると,

$$\begin{aligned} \sigma(g) &= \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{N-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\vartheta} \begin{pmatrix} \Delta & i u \\ i u^\dagger & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{N-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\vartheta} \begin{pmatrix} \Delta & -i u \\ -i u^\dagger & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

$$= g^{-1} \quad (2.2.18)$$

となる。ゆえに, principal variable  $X$  は

$$X = g^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{N-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{2}{\vartheta^2} \begin{pmatrix} -u \otimes u^\dagger & i u \\ -i u^\dagger & -1 \end{pmatrix} \quad (2.2.19)$$

と記述できる。

解析解を導出する。ラグランジアン (2.2.12) を  $u_i^*$  で変分を取ると, 次の  $N-1$  本の方程式が得られる:

$$(1 + u^\dagger \cdot u) \partial^\mu (C_{\mu\nu} \partial^\nu u_i) - C_{\mu\nu} [(u^\dagger \cdot \partial^\mu u) \partial^\nu u_i + (u^\dagger \cdot \partial^\nu u) \partial^\mu u_i] = 0 \quad (2.2.20)$$

ここで,

$$C_{\mu\nu} := M^2 \eta_{\mu\nu} - \frac{4}{e^2} [(\beta e^2 - 1) \tau_\rho^\rho \eta_{\mu\nu} + (\gamma e^2 - 1) \tau_{\mu\nu} + (\gamma e^2 + 2) \tau_{\nu\mu}], \quad (2.2.21)$$

$$\tau_{\mu\nu} := -\frac{4}{\vartheta^4} \partial_\nu u^\dagger \cdot \Delta \cdot \partial_\mu u = -\frac{4}{\vartheta^4} [\vartheta^2 \partial_\nu u^\dagger \cdot \partial_\mu u - (\partial_\nu u^\dagger \cdot u)(u^\dagger \cdot \partial_\mu u)] \quad (2.2.22)$$

である。この方程式は  $C_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$  とすると、 $CP^{N-1}$  非線型シグマ模型の方程式に一致する。

extended Skyrme-Faddeev 模型のときと同様に、可積分条件を考える。ターゲット空間が  $CP^{N-1}$  のときの可積分条件は

$$\partial_\mu u_i \partial^\mu u_j = 0 \quad i, j = 1, \dots, N-1 \quad (2.2.23)$$

である [59]。このとき、明らかに  $\tau_{\mu\nu} \partial^\mu u_i = 0$  である。よって、

$$C_{\mu\nu} \partial^\mu u_i \partial^\nu u_j = 0 \quad i, j = 1, \dots, N-1 \quad (2.2.24)$$

が成り立ち、方程式は

$$\partial^\mu (C_{\mu\nu} \partial^\nu u_i) = 0 \quad i = 1, \dots, N-1 \quad (2.2.25)$$

となる。これを具体的に書くと、次のように与えられる：

$$M^2 \partial^2 u_i + \frac{16}{e^2} \partial^\mu \left[ \left( \partial^\nu u^\dagger \cdot \frac{\Delta^2}{\vartheta^4} \right)_j \{ (\beta e^2 - 1) \partial_\nu u_j \partial_\mu u_i + (\gamma e^2 - 1) \partial_\mu u_j \partial_\nu u_i \} \right] = 0 \quad (2.2.26)$$

ここで、 $\Delta_{ij}^2 = (1 + u^\dagger \cdot u) \delta_{ij} - u_i u_j^*$  より、

$$\begin{aligned} & \left\{ \partial^\mu \left( \partial^\nu u^\dagger \cdot \frac{\Delta^2}{\vartheta^4} \right)_j \right\} \partial_\mu u_i \\ &= \left[ \partial^\mu \partial^\nu u_k \frac{\Delta_{kj}}{\vartheta^4} - \frac{1}{\vartheta^4} \{ (\partial^\mu \cdot u) \partial^\nu u^* + (\partial^\nu \cdot u) \partial^\mu u^* \} + \frac{1}{\vartheta^6} (\partial^\mu u^\dagger \cdot u) (\partial^\nu u^\dagger \cdot u) u_j^* \right] \partial_\mu u_i \\ &\equiv R_j^{\mu\nu} \partial_\mu u_i \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

と表すことができる。  $R_j^{\mu\nu} = R_j^{\nu\mu}$  の関係を用いると、方程式は結局

$$\begin{aligned} M^2 \partial^2 u_i + \frac{16}{e^2} \left( \partial^\nu u^\dagger \cdot \frac{\Delta^2}{\vartheta^4} \right)_j \partial^\mu [ (\beta e^2 - 1) \partial_\nu u_j \partial_\mu u_i + (\gamma e^2 - 1) \partial_\mu u_j \partial_\nu u_i ] \\ \frac{8}{e^2} (\beta e^2 + \gamma e^2 - 2) R_j^{\mu\nu} (\partial_\mu u_j \partial_\nu u_i + \partial_\mu u_i \partial_\nu u_j) = 0 \end{aligned} \quad (2.2.28)$$

と得られる。いま、 $u$  を BP インスタントンと同様に正則関数

$$u_k = u_k(z, w) \quad (2.2.29)$$

を仮定する。ここで、 $z = x^1 + i\epsilon_1 x^2$ ,  $w = x^3 + \epsilon_2 x^0$  である。ただし、 $\epsilon_a = \pm 1$  で、符号は独立に選ばれる。このとき、 $u_k$  は次の3つの等式を満たす：

$$\partial^2 u_k = 0, \quad \partial_\mu u_i \partial^\mu u_j = 0, \quad \partial^\mu [\partial_\nu u_i \partial_\mu u_j] = 0 \quad (2.2.30)$$

よって、結合定数を

$$\beta e^2 + \gamma e^2 = 2 \quad (2.2.31)$$

と選ぶと、(2.2.29) は可積分条件と方程式を同時に満たす。ゆえに一般解は、BP インスタントン (2.1.21) と同様に

$$u_k = P_k(z) e^{i\psi(w)} \quad (2.2.32)$$

で与えられる。ここで、 $P_k$  は任意の有理関数で、 $\psi(w)$  は任意の実関数である。この解のことを Ferreira-Klimas (FK) インスタントと呼ぶ。この解は、extended Skyrme-Faddeev 模型のインスタント解と同様、模型に4次の微分項が含まれているにもかかわらず、スケール不変を持っている。

FK インスタントも可積分条件を満たしているため、無限個の保存量を持っている。その保存カレントは次のように与えられる：

$$J_\mu \equiv \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\partial G}{\partial u_i} C_{\mu\nu} \partial^\nu u_i - \frac{\partial G}{\partial u_i^*} C_{\nu\mu} \partial^\nu u_i^* \right] \quad (2.2.33)$$

ここで、 $G$  は  $u_i$  と  $u_i^*$  の任意の関数である。ただし、微分項は含まないこととする。(2.2.33) を微分すると

$$\begin{aligned} \partial^\mu J_\mu &= \sum_{i=1}^N \left[ \partial^\mu \left( \frac{\partial G}{\partial u_i} \right) C_{\mu\nu} \partial^\nu u_i + \frac{\partial G}{\partial u_i} \partial^\mu (C_{\mu\nu} \partial^\nu u_i) - \partial^\mu \left( \frac{\partial G}{\partial u_i^*} \right) C_{\nu\mu} \partial^\nu u_i - \frac{\partial G}{\partial u_i^*} \partial^\mu (C_{\nu\mu} \partial^\nu u_i^*) \right] \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\partial^2 G}{\partial u_i \partial u_j} C_{\mu\nu} \partial^\nu u_i \partial^\mu u_j + \frac{\partial^2 G}{\partial u_i \partial u_j^*} C_{\mu\nu} \partial^\nu u_i \partial^\mu u_j^* \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial^2 G}{\partial u_i^* \partial u_j^*} C_{\mu\nu} \partial^\nu u_i^* \partial^\mu u_j^* - \frac{\partial^2 G}{\partial u_i^* \partial u_j} C_{\mu\nu} \partial^\nu u_i^* \partial^\mu u_j \right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.34)$$

となり、(2.2.33) が保存することが確かめられた。ここで、1段目は方程式  $\partial^\mu (C_{\mu\nu} \partial^\nu u_i) = 0$  を、2段目では可積分条件  $\partial^\mu u_i \partial^\nu u_j = 0$  を用いた。

# 第3章 $CP^{N-1}$ Skyrme-Faddeev 模型における baby skyrmion

前章において、 $CP^{N-1}$  非線型シグマ模型と  $CP^{N-1}$  Skyrme-Faddeev 模型がインスタントン解を持つことを示した。しかし、 $N \geq 3$  の場合、ターゲット空間が  $CP^{N-1}$  である非線型シグマ模型やその拡張した模型において、これまでに知られていたソリトン解は、どれもスケール不変性を持ち、それに伴う不安定性を持っていた。さらに、スケール不変性を持つ解は、現象を記述するには不適切であるように思われる。そこで我々は、Derrick の定理から、 $CP^{N-1}$  Skyrme-Faddeev 模型にポテンシャルを導入し、スケール不変性を破ったソリトンが存在するような模型を構成した。その模型において、解の構築を行った。ここでは、その解のことを  $CP^{N-1}$  baby skyrmion または単に baby skyrmion と呼ぶ。

3.1 節では、 $CP^{N-1}$  Skyrme-Faddeev 模型にポテンシャルを加えた模型において、場が軸対称性を持っていると仮定し、その ansatz のもとで運動方程式やハミルトニアンを具体的に書き下す。3.2 節では、模型のもつ対称性をもとにポテンシャルを構成し、 $CP^{N-1}$  Skyrme-Faddeev 模型が軸対称解を持つことを数値計算を用いて示す。

## 3.1 模型の定式化

3+1 次元 Minkowski 時空における  $CP^{N-1}$  Skyrme-Faddeev 模型のラグランジアンは、principal variable  $X$  を用いて次のように与えられる：

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{M^2}{2} \text{Tr}(X^{-1} \partial_\mu X)^2 + \frac{1}{e^2} \text{Tr}(X^{-1} \partial_\mu X X^{-1} \partial_\nu X)^2 \\ & + \frac{\beta}{2} [\text{Tr}(X^{-1} \partial_\mu X)^2]^2 + \gamma [\text{Tr}(X^{-1} \partial_\mu X X^{-1} \partial_\nu X)]^2 - V \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

ここで、 $V$  はポテンシャルである。 $M, e, \beta, \gamma$  は結合定数であり、特に  $e^2 < 0$  であることに注意する。前章で紹介したように、 $\beta e^2 + \gamma e^2 = 2, V = 0$  のとき、この模型は解析的なインスタントン解を持つ。この章では、この条件が満たされているパラメータ領域を可積分領域と呼ぶ。Principal variable は複素スカラー場  $u_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N-1$ ) を用いて次のように記述できる：

$$X = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{N-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{2}{\vartheta^2} \begin{pmatrix} -u \otimes u^\dagger & iu \\ iu^\dagger & 1 \end{pmatrix} \quad (3.1.2)$$

ここで、 $\vartheta = \sqrt{1 + u^\dagger \cdot u}$  である。また、 $\mathbf{1}_{N-1}$  は、 $N-1$  次正方行列の単位元であり、 $u = (u_1, u_2, \dots, u_{N-1})$  である。後の便利のために、ラグランジアンを

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}_0 - V = -\frac{1}{2} [M^2 \eta_{\mu\nu} + C_{\mu\nu}] - V \quad (3.1.3)$$

と書き直す。ここで,

$$\begin{aligned} C_{\mu\nu} &= M^2\eta_{\mu\nu} - \frac{4}{e^2} \left[ (\beta e^2 - 1)\tau_\rho^\rho\eta_{\mu\nu} + (\gamma e^2 - 1)\tau_{\mu\nu} + (\gamma e^2 + 2)\tau_{\nu\mu} \right], \\ \tau_{\mu\nu} &= -\frac{4}{\vartheta^4} \partial_\nu u^\dagger \cdot \Delta^2 \cdot \partial_\mu u = -\frac{4}{\vartheta^4} \left[ \vartheta^2 \partial_\nu u^\dagger \cdot \partial_\mu u - (\partial_\nu u^\dagger \cdot u)(u^\dagger \cdot \partial_\mu u) \right], \\ \Delta_{ij} &= (1 + u^\dagger \cdot u)\delta_{ij} - u_i u_j^* \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

である。

このラグランジアン (3.1.3) の任意の場による変分は次のように表せる：

$$\delta\mathcal{L} = -C_{\mu\nu}\delta\tau^{\nu\mu} - \delta V \quad (3.1.5)$$

場  $u_k^*$  による変分に対応している Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u_k^*} - \partial_\alpha \left( \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\alpha u_k^*)} \right) = 0 \quad (3.1.6)$$

を具体的に書き下そう。計算を簡単にするため全体に  $-(1 + u^\dagger \cdot u)^2$  を掛けると、方程式は

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \left[ \frac{1}{4}(1 + u^\dagger \cdot u)^2 \frac{\delta\mathcal{L}_0}{\delta(\partial_\alpha u_k^*)} \right] - \frac{1}{4} \frac{\delta\mathcal{L}_0}{\delta(\partial_\alpha u_k^*)} \partial_\alpha (1 + u^\dagger \cdot u)^2 \\ - \frac{1}{4}(1 + u^\dagger \cdot u)^2 \frac{\delta\mathcal{L}_0}{\delta u_k^*} + \frac{1}{4}(1 + u^\dagger \cdot u)^2 \frac{\delta V}{\delta u_k^*} = 0 \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

と書ける。ここで、それぞれの項は

$$\frac{1}{4}(1 + u^\dagger \cdot u)^2 \frac{\delta\mathcal{L}_0}{\delta(\partial_\alpha u_k^*)} = -\frac{1}{4}(1 + u^\dagger \cdot u)^2 C_{\mu\nu} \frac{\delta\tau^{\nu\mu}}{\delta(\partial_\alpha u_k^*)} = C_\nu^\alpha \Delta_{kj}^2 \partial^\nu u_j, \quad (3.1.8)$$

$$\frac{1}{4} \frac{\delta\mathcal{L}_0}{\delta(\partial_\alpha u_k^*)} \partial_\alpha (1 + u^\dagger \cdot u)^2 = 2C_\mu^\alpha \Delta_{kj}^2 \partial^\nu u_j \frac{u^\dagger \cdot \partial^\alpha u + \partial^\alpha u^\dagger \cdot u}{1 + u^\dagger \cdot u}, \quad (3.1.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(1 + u^\dagger \cdot u)^2 \frac{\delta\mathcal{L}_0}{\delta u_k^*} &= -\frac{1}{4}(1 + u^\dagger \cdot u)^2 C_{\mu\nu} \frac{\delta\tau^{\nu\mu}}{\delta u_k^*} \\ &= -2u_k C_{\mu\nu} \frac{\partial^\mu u^\dagger \cdot \Delta \cdot \partial^\nu u}{1 + u^\dagger \cdot u} + C_{\mu\nu} [(\partial^\mu u^\dagger \cdot \partial^\nu u)u_k - (\partial^\mu u^\dagger \cdot u)\partial^\nu u_k] \end{aligned}$$

と計算できる。また,

$$\partial^\alpha \Delta_{kj}^2 \partial^\nu u_j = (\partial^\alpha u^\dagger \cdot u + u^\dagger \cdot \partial^\alpha u)\partial^\nu u_k - (u^\dagger \cdot \partial^\nu u)\partial^\alpha u_k - (\partial^\alpha u^\dagger \cdot \partial^\nu u)u_k \quad (3.1.10)$$

を用いると、方程式は

$$\begin{aligned} \Delta_{kj}^2 \left[ \partial^\mu (C_{\mu\nu} \partial^\nu u_j) - 2C_{\mu\nu} \frac{u^\dagger \cdot \partial^\alpha u + \partial^\alpha u^\dagger \cdot u}{1 + u^\dagger \cdot u} \partial^\nu u_j \right] \\ - 2C_{\mu\nu} [(\partial^\mu u^\dagger \cdot \partial^\nu u)u_k - (\partial^\mu u^\dagger \cdot u)\partial^\nu u_k] \\ + C_{\mu\nu} [(u^\dagger \cdot \partial^\mu u)\partial^\nu u_k - (u^\dagger \cdot \partial^\nu u)\partial^\mu u_k] \\ + 2u_k C_{\mu\nu} \frac{\partial^\mu u^\dagger \cdot \Delta \cdot \partial^\nu u}{1 + u^\dagger \cdot u} + \frac{1}{4}(1 + u^\dagger \cdot u)^2 \frac{\delta V}{\delta u_k^*} = 0 \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

となる。ここで、 $\Delta_{ij}^{-2} = \frac{1}{1+u^\dagger \cdot u} (\delta_{ij} + u_i^* u_j)$  を全体に掛けて整理すると、方程式が以下のように得られる：

$$(1 + u^\dagger \cdot u) \partial^\mu (C_{\mu\nu} \partial^\nu u_i) - C_{\mu\nu} [(u^\dagger \cdot \partial^\mu u) \partial^\nu u_i + (u^\dagger \cdot \partial^\nu u) \partial^\mu u_i] + \frac{1}{4} (1 + u^\dagger \cdot u)^2 \sum_{j=1}^N \left[ (\delta_{ij} + u_i u_j^*) \frac{\delta V}{\delta u_j^*} \right] = 0 \quad (3.1.12)$$

ここで、 $\Delta_{ij}^{-2}$  の性質

$$\sum_{k=1}^N \Delta_{ik}^{-2} u_k = u_i, \quad \sum_{k=1}^N \Delta_{ik}^{-2} \partial^\nu u_k = \frac{\partial^\nu u u_i + u_i (u^\dagger \cdot \partial^\nu u)}{1 + u^\dagger \cdot u} \quad (3.1.13)$$

を用いた。また、特にポテンシャルが場の絶対値の関数  $V(|u_1|^2, \dots, |u_N|^2)$  である時は

$$\frac{\delta V}{\delta u_k^*} = u_k \frac{\delta V}{\delta |u_k|^2} \quad (3.1.14)$$

と書けるので、方程式は以下の形に帰着する：

$$(1 + u^\dagger \cdot u) \partial^\mu (C_{\mu\nu} \partial^\nu u_i) - C_{\mu\nu} [(u^\dagger \cdot \partial^\mu u) \partial^\nu u_i + (u^\dagger \cdot \partial^\nu u) \partial^\mu u_i] + \frac{u_i}{4} (1 + u^\dagger \cdot u)^2 \left[ \frac{\delta V}{\delta |u_i|^2} + \sum_{j=1}^N |u_j|^2 \frac{\delta V}{\delta |u_j|^2} \right] = 0 \quad (3.1.15)$$

次のように定義される無次元円筒座標  $(t, \rho, \varphi, z)$  を導入する：

$$x^0 = r_0 t, \quad x^1 = r_0 \rho \cos \varphi, \quad x^2 = r_0 \rho \sin \varphi, \quad x^3 = r_0 z \quad (3.1.16)$$

ここで、 $r_0$  は長さの次元を持つ定数で、結合定数  $M^2$  と  $e^2$  を用いて

$$r_0^2 = -\frac{4}{M^2 e^2} \quad (3.1.17)$$

と定義する。ここで、 $e^2 < 0$  より、 $r_0^2$  は正であることを注意する。この座標系の線素  $ds^2$  は

$$ds^2 = r_0^2 (dt^2 - dz^2 - d\rho^2 - \rho^2 d\varphi^2) \quad (3.1.18)$$

と与えられる。

ここでは簡単のため、以下の ansatz で表される軸対称解を考えていく：

$$u_j = f_j(\rho) e^{i(n_j \varphi + k_j \psi(w))} \quad (3.1.19)$$

ここで、 $\psi(w)$  は light-cone 座標 ( $w = t - z$  または  $w = t + z$ ) の実関数であり、 $n_j$  をある整数、 $k$  をある実定数とする。そのとき、可積分領域に属す解としてもっとも簡単なものは

$$f_i(\rho) = c_i \rho^{n_i} \quad (3.1.20)$$

と表すことができる。ここで、 $c_i$  は任意の複素定数である。定式化を簡単にするために、次の2つの対角行列を導入する：

$$n \equiv \text{diag}(n_1, \dots, n_{N-1}), \quad k \equiv \text{diag}(k_1, \dots, k_{N-1}) \quad (3.1.21)$$

これらを用いると ansatz(3.1.19) は行列形式で

$$u = f(\rho)e^{i(n\varphi+k\psi(w))} \quad (3.1.22)$$

と書ける。この ansatz のもと

$$\tau_{\mu\nu} = -\frac{4}{\vartheta^4} [\vartheta^2 \partial_\nu u^\dagger \cdot \partial_\mu u - (\partial_\nu u^\dagger \cdot u)(u^\dagger \cdot \partial_\mu u)] \quad (3.1.23)$$

を具体的に書き下すと、以下のようになる：

$$\begin{aligned} \tau_{\rho\rho} &\equiv \theta(\rho) = -\frac{4}{\vartheta^4} [\vartheta^2 f'^T \cdot f' - (f'^T \cdot f)(f^T \cdot f')], \\ \tau_{\varphi\varphi} &\equiv \omega(\rho) = -\frac{4}{\vartheta^4} [\vartheta^2 f^T \cdot n^2 \cdot f - (f^T \cdot n \cdot f)^2], \\ \tau_{\varphi\rho} &= -\tau_{\rho\varphi} \equiv i\zeta(\rho), \\ \zeta(\rho) &= -\frac{4}{\vartheta^4} [\vartheta^2 f'^T \cdot n \cdot f - (f^T \cdot n \cdot f)(f'^T \cdot f)], \\ \tau_{t\rho} &= -\tau_{\rho t} \equiv (i\partial_t \psi)\xi(\rho), \quad \tau_{z\rho} = -\tau_{\rho z} \equiv (i\partial_z \psi)\xi(\rho), \\ \xi(\rho) &= -\frac{4}{\vartheta^4} [\vartheta^2 f'^T \cdot \sigma \cdot f - (f^T \cdot \sigma \cdot f)(f'^T \cdot f)], \\ \tau_{t\varphi} &= \tau_{\varphi t} \equiv (\partial_t \psi)\eta(\rho), \quad \tau_{z\varphi} = \tau_{\varphi z} \equiv (\partial_z \psi)\eta(\rho), \\ \eta(\rho) &= -\frac{4}{\vartheta^4} [\vartheta^2 f^T \cdot n \cdot \sigma \cdot f - (f^T \cdot n \cdot f)(f^T \cdot \sigma \cdot f)], \\ \tau_{tt} &\equiv (\partial_t \psi)^2 \chi(\rho), \quad \tau_{zz} \equiv (\partial_z \psi)^2 \chi(\rho), \quad \tau_{tz} = \tau_{zt} \equiv (\partial_t \psi)(\partial_z \psi)\chi(\rho), \\ \chi(\rho) &= -\frac{4}{\vartheta^4} [\vartheta^2 f^T \cdot \sigma^2 \cdot f - (f^T \cdot \sigma \cdot f)(f^T \cdot \sigma \cdot f)] \end{aligned}$$

ここで、 $T$  は行列の転置を表し、 $\frac{d}{d\rho} = '$  とした。また、一般の曲線座標 (curvilinear coordinates) において、方程式 (3.1.12) は

$$\begin{aligned} &\frac{(1 + u^\dagger \cdot u)}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha (\sqrt{-g} g^{\alpha\mu} g^{\nu\beta} C_{\mu\nu} \partial_\beta u_i) \\ &- g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} C_{\mu\nu} [(u^\dagger \cdot \partial_\alpha u) \partial_\beta u_i + (u^\dagger \cdot \partial_\beta u) \partial_\alpha u_i] \\ &+ \frac{1}{4} (1 + u^\dagger \cdot u)^2 \sum_{j=1}^N \left[ (\delta_{ij} + u_i u_j^*) \frac{\delta V}{\delta u_j^*} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

と表せるので、無次元円筒座標のもと、方程式を書き下すと、

$$\begin{aligned} &(1 + f^T \cdot f) \left[ \frac{1}{\rho} \left( \rho \tilde{C}_{\rho\rho} f'_i \right)' + \frac{i}{\rho} \left( \frac{\tilde{C}_{\rho\varphi}}{\rho} \right)' (n \cdot f)_i - \frac{1}{\rho^4} \tilde{C}_{\varphi\varphi} (n \cdot f)_i \right] \\ &- 2 \left[ \tilde{C}_{\rho\rho} (f^T \cdot f') f'_i - \frac{1}{\rho^4} \tilde{C}_{\varphi\varphi} (f^T \cdot n \cdot f) (n \cdot f)_i \right] \\ &+ \frac{1}{8} (1 + f^T \cdot f)^2 \left[ \frac{\delta \tilde{V}}{\delta f_i} + \sum_{j=1}^N f_i f_j \frac{\delta \tilde{V}}{\delta f_j} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.1.25)$$

が得られる。ここで、 $\tilde{C}_{\mu\nu} := \frac{1}{r_0^2 M^2} C_{\mu\nu}$ ,  $\tilde{V} := \frac{r_0^2}{M^2} V$  と定義した。 $\tilde{C}_{\mu\nu}$  は具体的に次のように書ける：

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{\rho\rho} &= -1 + (\beta e^2 - 1) \left( \theta + \frac{\omega}{\rho^2} \right) + (2\gamma e^2 + 1)\theta, \\ \tilde{C}_{\varphi\varphi} &= -\rho^2 + \rho^2(\beta e^2 - 1) \left( \theta + \frac{\omega}{\rho^2} \right) + (2\gamma e^2 + 1)\omega, \\ \tilde{C}_{\varphi\rho} &= -\tilde{C}_{\rho\varphi} = -3i\zeta\end{aligned}\tag{3.1.26}$$

### 3.1.1 エネルギー

ハミルトニアン密度は (3.1.1) の Legendre 変換

$$\mathcal{H} := \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_0 u_i} \partial_0 u_i + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_0 u_i^*} \partial_0 u_i^* - \mathcal{L}\tag{3.1.27}$$

で定義する。軸対称解 (3.1.21) に対して、ラグランジアン密度とハミルトニアン密度は、両者とも  $\rho$  と、 $z+t$  または  $z-t$  のみを変数にもつ。いま、ラグランジアン密度は以上で定義した文字を用いて次のように書ける：

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{M^2}{r_0^2} \left( \theta + \frac{\omega}{\rho^2} \right) + \frac{2}{r_0^4 e^2} (\beta e^2 + \gamma e^2 - 2) \left( \theta + \frac{\omega}{\rho^2} \right)^2 \\ &+ \frac{4}{r_0^4 e^2} (\gamma e^2 - 1) \frac{\zeta^2 - \theta\omega}{\rho^2} \\ &+ \frac{2}{r_0^4 e^2} (\gamma e^2 + 2) \left( \theta^2 + \frac{\omega^2}{\rho^4} - 2 \frac{\zeta^2}{\rho^2} \right) - V\end{aligned}\tag{3.1.28}$$

ここで、 $M^2$  に比例する項は  $CP^{N-1}$  非線型シグマ模型からの寄与である。また、 $f_k(\rho)$  が正則解ならば  $f'_j(\rho) = \frac{n_j}{\rho} f_j(\rho)$  という性質から、

$$\theta = \frac{\omega}{\rho^2} = \frac{\zeta}{\rho}, \quad \xi = \frac{\eta}{\rho}\tag{3.1.29}$$

が成り立つため、 $\gamma e^2 - 1$  と  $\gamma e^2 + 2$  に比例する項はゼロとなる。ラグランジアン密度 (3.1.28) に Legendre 変換を施すことで、ハミルトニアン密度を

$$\mathcal{H} = -\frac{M^4 e^2}{4} \sum_{j=1}^7 \mathcal{H}_j\tag{3.1.30}$$

と定義する。ここで、 $\mathcal{H}_j$  は以下のように与えられる：

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1 &= -\left( \theta + \frac{\omega}{\rho^2} \right), \quad \mathcal{H}_2 = -2 \left( \frac{d\psi}{dw} \right)^2 \chi, \\ \mathcal{H}_3 &= 2 \left( \frac{d\psi}{dw} \right)^2 \left\{ (\beta e^2 - 1) \left( \theta + \frac{\omega}{\rho^2} \right) \chi + (\gamma e^2 - 1) \frac{2\eta^2}{\rho^2} \right\}, \\ \mathcal{H}_4 &= \frac{1}{2} (\beta e^2 + \gamma e^2 - 2) \left( \theta + \frac{\omega}{\rho^2} \right)^2, \\ \mathcal{H}_5 &= (\gamma e^2 - 1) \frac{\zeta^2 - \theta\omega}{\rho^2} + \frac{1}{2} (\gamma e^2 + 2) \left( \theta^2 + \frac{\omega^2}{\rho^4} - 2 \frac{\zeta^2}{\rho^2} \right), \\ \mathcal{H}_6 &= -6 \left( \frac{d\psi}{dw} \right)^2 \left( \xi^2 - \frac{\eta^2}{\rho^2} \right), \quad \mathcal{H}_7 = \tilde{V}\end{aligned}\tag{3.1.31}$$



ハミルトニアン密度を分割したのは、前章で議論したインスタントンと比較しやすくするためである。BP インスタントンのハミルトニアンは  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  から成っていた。FK インスタントンでは、結合定数への条件  $\beta e^2 + \gamma e^2 = 2$  のため  $\mathcal{H}_4 = 0$  でポテンシャル  $\mathcal{H}_7$  を含んでいなかった。また、一般の正則解に対して (3.1.29) より  $\mathcal{H}_5, \mathcal{H}_6$  はゼロである。さらに、 $w$  に依らない配位、つまり、静的な配位では  $\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3, \mathcal{H}_6$  がゼロである。よって、一般の静的な配位に対する Derrick の定理は、解が安定ならば

$$\int (\mathcal{H}_4 + \mathcal{H}_5 - \mathcal{H}_7) \rho d\rho = 0 \quad (3.1.32)$$

が成り立つことを要求する。

### 3.2 ポテンシャルの構成と数値解

ここでは、ansatz (3.1.21) のもとで、スケール不変性を持たない解の構築を行う。解の存在は、導入するポテンシャルの構造に強く依存しているため、ポテンシャルの構成が解の構築の鍵を握っている。

模型にポテンシャルを加えると、解析的に方程式を解くことができなくなってしまうので、数値計算を用いて解析を行う。数値計算の便利のため、新たな動径座標  $y$  を導入する：

$$\rho = \sqrt{\frac{1-y}{y}} \Leftrightarrow y = \frac{1}{1+\rho^2} \quad (3.2.1)$$

ここで、 $y = 0$  が無限遠  $\rho = \infty$ 、 $y = 1$  が原点  $\rho = 0$  に対応する。同様にして、ansatz (3.1.21) も  $y$  の関数である新たな動径関数  $g_i$  を用いて

$$u_j = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sqrt{\frac{1-g_j(y)}{g_j(y)}} e^{i(n_j\varphi + k_j\psi(w))} \quad (3.2.2)$$

と定義する。係数  $1/\sqrt{N-1}$  は、 $u_1 = \dots = u_{N-1}$  のとき、任意の  $N$  に対して、方程式が  $CP^1$  のものと一致するように導入した。方程式 (3.1.25) に (3.2.2) を代入すると、解くべき方程式が

$$\begin{aligned} & \frac{g_i''}{g_i(1-g_i)} + \left( \frac{C_1'}{C_1} + \frac{1-2y}{y(1-y)} \right) \frac{g_i'}{g_i(1-g_i)} + \frac{1}{2} \frac{4g_i-3}{(g_i(1-g_i))^2} g_i'^2 \\ & + \frac{1}{\sqrt{y(1-y)^3}} \left( \frac{C_2'}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{C_2}{C_1} \frac{1}{y(1-y)} \right) n_i + \frac{1}{2} \frac{1}{y(1-y)^3} \frac{C_3}{C_1} n_i^2 \\ & + \frac{\prod_{k=1}^{N-1} g_k}{\Theta} \left\{ \sum_{l=1}^{N-1} \left( \frac{g_l'}{g_l^2} \right) \frac{g_i'}{g_i(1-g_i)} - \frac{1}{y(1-y)^3} \frac{C_3}{C_1} \sum_{l=1}^{N-1} \left( n_l \frac{1-g_l}{g_l} \right) n_i \right\} \\ & - \frac{1}{8} \frac{1}{y^3(1-y)} \frac{1}{C_1} \frac{\Theta}{(N-1) \prod_{k=1}^{N-1} g_k} \delta \tilde{V}_i = 0, \quad i = 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

と得られる。ここで、 $\Theta \equiv \sum_{k=1}^{N-1} g_k$  とする。また、 $C_k$  は

$$\begin{aligned} C_1 &\equiv \tilde{C}_{\rho\rho} = -1 + (2\gamma e^2 + \beta e^2)\theta(y) + (\beta e^2 - 1) \frac{y}{1-y} \omega(y) \\ C_2 &\equiv i\tilde{C}_{\rho\varphi} = -3\zeta(y) \\ C_3 &\equiv \tilde{C}_{\varphi\varphi} = -\frac{1-y}{y} + (\beta e^2 - 1) \frac{1-y}{y} \theta(y) + (2\gamma e^2 + \beta e^2)\omega(y) \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

と定義し、 $\delta V_i$  はポテンシャルの寄与を表しており、次のように表せる：

$$\delta V_i \equiv -(N-1)g_i^2 \frac{\delta V}{\delta g_i} - \sum_{k=1}^{N-1} g_k(1-g_k) \frac{\delta V}{\delta g_k} \quad (3.2.5)$$

一般的にポテンシャルが満たすべき条件は、その積分が有限になることと、微分を含まないことである。したがって、ポテンシャルの選択には大きな自由度がある。しかし、その条件を満たしても模型が必ずしも解を持つわけではない。そこで、 $CP^1$  の場合、つまり  $O(3)$  非線型シグマ模型を参考に、適切なポテンシャルを構築する。

1.4.2 項で議論したように、baby Skyrme 模型は old baby ポテンシャル

$$V_{\text{old}}(\vec{\phi}) = (1 - \vec{\phi}_\infty \cdot \vec{\phi}) \quad (3.2.6)$$

のもと、安定なソリトン解を持つ。ここで、 $\vec{\phi}$  は大きさ 1 のベクトル  $\vec{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  を表し、 $\vec{\phi}_\infty$  は  $\vec{\phi}$  の無限遠での値である。ここで、慣例通りに  $\vec{\phi}_\infty = (0, 0, 1)$  と採ると、 $V = (1 - \phi_3)$  となる。 $CP^1$  多様体の座標  $v$  で模型を記述するため、 $S^2$  から複素平面へのステレオグラフ射影を行うと、 $\vec{n}$  は複素スカラー場  $v$  を用いて

$$\vec{\phi} = \frac{1}{1 + |v|^2} (v + v^*, -i(v - v^*), |v|^2 - 1) \quad (3.2.7)$$

と表せる。よって、ポテンシャル (3.2.6) は複素スカラー場  $v$  を用いて

$$V_{\text{old}}(v) = \left(1 - \frac{|v|^2 - 1}{1 + |v|^2}\right) = \frac{2}{1 + |v|^2} \quad (3.2.8)$$

と書ける。このポテンシャル (3.2.8) は、old baby ポテンシャルの  $CP^1$  表示と呼ばれる。

$N \geq 2$  でも同様の議論が有効であるという推測のもと、ポテンシャル (3.2.8) の  $CP^2$  への拡張を試みる。ターゲット空間  $CP^2$  の座標である 2 つの複素スカラー場  $(u_1, u_2)$  を考える。このとき、 $(u_1, u_2)$  は無限遠において、それぞれ  $(n_1, n_2)$  で特徴付けられる正則関数 (3.1.20) と同様の振る舞いをするを仮定する。したがって、 $n_1, n_2 > 0$  ならば、 $\rho \rightarrow \infty$  に対して  $|u_1|, |u_2| \rightarrow \infty$  である。

$CP^1$  から  $CP^2$  への拡張の 1 つとして、 $|v|^2 \rightarrow |u_1|^2 + |u_2|^2$  というものが考えられる。この拡張をポテンシャル (3.2.8) に適用すると

$$V(v_i) = \left(1 - \frac{|u_1|^2 + |u_2|^2 - 1}{1 + |u_1|^2 + |u_2|^2}\right) = \frac{2}{1 + |u_1|^2 + |u_2|^2} \quad (3.2.9)$$

が得られる。しかし、このポテンシャル (3.2.9) のもとでは、 $n_1 = n_2$  のときしか解が得られなかった。これは、本質的に埋め込み解であり、新たな解ではない。

以上の議論ではうまくいかなかったので、新たな拡張の方法を考えなければならない。場の拡張の方法として、以上で行ったスカラー場の拡張のほかに、模型を記述する行列を拡張する方法が考えられる。ポテンシャル (3.2.6) は  $U := \vec{\tau} \cdot \vec{\phi} \in SU(2)$  を用いて、

$$V_{\text{old}}(U) = \frac{1}{2} \text{Tr}(1 - U_\infty^\dagger U) \quad (3.2.10)$$

と表すこともできる。これは、 $(\vec{\tau} \cdot \vec{\phi}_\infty)(\vec{\tau} \cdot \vec{\phi}) = \vec{\phi}_\infty \cdot \vec{\phi} + i\vec{\tau} \cdot (\vec{\phi}_\infty \times \vec{\phi})$  という恒等式から容易に確かめられる。いま、 $CP^{N-1}$  Skyrme-Faddeev 模型は、principal variable  $X$  で記述されるため、ポテンシャル (3.2.6) も  $SU(2)$  行列  $U$  ではなく principal variable  $X$  を用いて表そう。 $N = 2$  のとき、principal variable  $X$  は複素スカラー場  $v$  を用いて、

$$X^{CP^1} = \frac{1}{1 + |v|^2} \begin{pmatrix} 1 - |v|^2 & 2iv \\ 2iv^* & 1 - |v|^2 \end{pmatrix} \quad (3.2.11)$$

となる。このとき無限遠では、 $(X_\infty^{CP^1})^{-1} = \text{diag}(-1, -1)$  をとる。したがって、ポテンシャル (3.2.10) の  $U$  を (3.2.11) で置き換えると

$$\begin{aligned} V_{\text{old}}(v) &= \frac{1}{2} \text{Tr}(1 - (X_\infty^{CP^1})^{-1} X^{CP^1}) = \frac{1}{2} \text{Tr}(1 + X^{CP^1}) \\ &= \frac{2}{1 + |v|^2} \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

と得られ、ポテンシャル (3.2.8) と等しくなる。さらに、new baby ポテンシャル

$$V_{\text{new}}(\vec{\phi}) = (1 - \vec{\phi}_0 \cdot \vec{\phi})(1 - \vec{\phi}_\infty \cdot \vec{\phi}) = \frac{4|v|^2}{(1 + |v|^2)^2} \quad (3.2.13)$$

も old baby ポテンシャルと同様に principal variable を用いて以下のように表せる：

$$\begin{aligned} V_{\text{new}}(v) &= \frac{1}{4} \text{Tr} \left( 1 - (X_0^{CP^1})^{-1} X^{CP^1} \right) \text{Tr} \left( 1 - (X_\infty^{CP^1})^{-1} X^{CP^1} \right) \\ &= \frac{1}{4} \text{Tr} \left( 1 - X^{CP^1} \right) \text{Tr} \left( 1 + X^{CP^1} \right) \\ &= \frac{4|v|^2}{(1 + |v|^2)^2} \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

さらに、これを一般化して

$$V(X) = \left[ \frac{1}{4} \text{Tr} (1 - X_0^{-1} X) \right]^a \left[ \frac{1}{4} \text{Tr} (1 - X_\infty^{-1} X) \right]^b \quad a \geq 0, b > 0 \quad (3.2.15)$$

というものも考えることができる。以下では、このポテンシャルの構築法を用いて、ポテンシャルを導入し、数値計算によって解を導出する。

### 3.2.1 $N = 3$ の場合

まず、 $CP^2$  の場合を考える。このとき、方程式 (3.2.4) に含まれる関数  $\theta, \omega, \zeta$  は

$$\begin{aligned} \theta(y) &= -\frac{8}{\Theta^2} y^3 (1-y) \left[ \frac{(1+g_2)g_2 g_1'^2}{2g_1(1-g_1)} + \frac{(1+g_1)g_1 g_2'^2}{2g_2(1-g_2)} - g_1' g_2' \right], \\ \omega(y) &= -\frac{8}{\Theta^2} \left[ n_1^2 g_1 (1-g_1) g_2^2 + n_2^2 g_1^2 g_2 (1-g_2) + \frac{1}{2} (n_1 - n_2)^2 g_1 (1-g_1) g_2 (1-g_2) \right], \\ \zeta(y) &= -\frac{8}{\Theta^2} \sqrt{y^3 (1-y)} \left[ n_1 g_2^2 g_1' + n_2 g_1^2 g_2' + \frac{1}{2} (n_1 - n_2) \{ g_2 (1-g_2) g_1' - g_1 (1-g_1) g_2' \} \right] \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

である。ここで、 $\Theta = g_1 + g_2$  である。

ポテンシャル(3.2.15)は、解の漸近的な振る舞いから決まる。ここでは、正則解と同様の漸近的振る舞いをする解を探索する。つまり、ある整数  $(n_1, n_2)$  に対し漸近的な領域では  $(u_1, u_2) \sim (\rho^{n_1}, \rho^{n_2})$  を仮定する。したがって、ポテンシャルは行列形式では整数  $(n_1, n_2)$  の任意な組み合わせについて同じ型(3.2.15)で記述できるが、あらわな表式は整数  $(n_1, n_2)$  の組み合わせで、場合分けが必要である。

### $n_1 > n_2 > 0$ の場合

解の漸近挙動の仮定より、原点と無限遠における principal variable  $X$  の逆行列は、それぞれ

$$X_0^{-1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X_\infty^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.2.17)$$

となる。よって、ポテンシャル(3.2.15)を  $N = 2$  から  $N = 3$  へ拡張すると

$$\begin{aligned} V &= \left[ \frac{1}{4} \text{Tr} (1 - X_0^{-1} X) \right]^a \left[ \frac{1}{4} \text{Tr} (1 - X_\infty^{-1} X) \right]^b \\ &= \frac{(|u_1|^2 + |u_2|^2)^a (1 + |u_2|^2)^b}{(1 + |u_1|^2 + |u_2|^2)^{a+b}} \\ &= \frac{(g_1 + g_2 - 2g_1 g_2)^a g_1^b (1 + g_2)^b}{(g_1 + g_2)^{a+b}} \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

が得られる。ただし、 $a > 0$ ,  $b \geq 0$ 。

### $n_1 > 0 > n_2$ の場合

$n_2 < 0$  のとき、場  $u_2$  は原点で発散する。したがって、このとき原点と無限遠における principal variable  $X$  の逆行列はそれぞれ

$$X_0^{-1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X_\infty^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.2.19)$$

となる。これらを用いて、上と同様に計算すると

$$\begin{aligned} V &= \frac{(1 + |u_1|^2)^a (1 + |u_2|)^b}{(1 + |u_1|^2 + |u_2|^2)^{a+b}} \\ &= \frac{g_1^b g_2^a (1 + g_1)^a (1 + g_2)^b}{(g_1 + g_2)^{a+b}} \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

が得られる。ただし、 $a > 0$ ,  $b \geq 0$  である。

### $0 > n_2 > n_1$ の場合

原点と無限遠における principal variable  $X$  の逆行列はそれぞれ

$$X_0^{-1} := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X_\infty^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.2.21)$$

である。したがって、ポテンシャルは

$$\begin{aligned} V &= \frac{(1 + |u_2|^2)^a (|u_1|^2 + |u_2|^2)^b}{(1 + |u_1|^2 + |u_2|^2)^{a+b}} \\ &= \frac{g_1^a (1 + g_2)^a (g_1 + g_2 - 2g_1 g_2)^b}{(g_1 + g_2)^{a+b}} \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

と得られる。ただし、 $a > 0$ ,  $b \geq 0$  である。

以上のポテンシャルに含まれている定数  $a$ ,  $b$  は、 $a > 0$ ,  $b \geq 0$  を満たす任意の実数である。しかし、ここでは簡単のため、 $(a, b) = (0, 2)$  を考える<sup>1</sup>。このとき、(3.2.18) と (3.2.20) が一致する。式 (3.2.5) より、方程式へのポテンシャルからの寄与  $\delta V_i$  は

$$\delta V_1 = -4 \frac{g_1^2 g_2 (1 + g_2)}{(g_1 + g_2)^2}, \quad \delta V_2 = 0 \quad (3.2.23)$$

となる。

### 漸近解析

解の原点と無限遠の付近での漸近的な振る舞いを調べる。級数展開より、無限遠  $\rho \rightarrow \infty$  ( $y = 0$ ) での漸近解は、 $n_1, n_2 > 0$  のとき

$$\begin{aligned} g_1(y) &= c_1 y^{n_1} + O(y^{n_1+1}) \\ g_2(y) &= c_2 y^{n_2} + O(y^{n_2+1}) \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

となる。一方、 $n_1 > 0, n_2 < 0$  のとき

$$\begin{aligned} g_1(y) &= c_1 y^{n_1} + O(y^{n_1+1}), \\ g_2(y) &= 1 + c_2 y^{n_2} + O(y^{n_2+1}) \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

と得られる。 $c_i$  はシューティングパラメータと呼ばれる定数で、高次の振る舞いがすべて  $c_i$  で決まる。

いま、 $(n_1, n_2)$  のある組み合わせに対して、 $\mathcal{H}_2$  が収束しない可能性があるため、 $\mathcal{H}_2$  の漸近挙動を調べる。例えば  $\psi(w) = w$  のとき、 $(n_1, n_2) = (2, 1)$  に対し  $\mathcal{H}_2$  を  $y \sim 0$  周りで展開すると、

$$\mathcal{H}_2^{(2,1)} = \frac{8c_1(k_1 - k_2)^2}{c_2} y + O(y^2) \quad (3.2.26)$$

<sup>1</sup> $b = 1$  のとき無限遠での漸近解が存在しない。

となる。いま、 $\mathcal{H}_2$  に対応したエネルギー  $E_2$  は

$$E_2 = \int d^2x \mathcal{H}_2 = 2\pi \int_0^1 \frac{dy}{2y^2} \mathcal{H}_2 \quad (3.2.27)$$

と与えられるため、 $k_1 = k_2$  でなければ  $E_2$  が対数発散を起こす。一方で、 $(n_1, n_2) = (3, 1)$  に対して  $\mathcal{H}_2$  を  $y \sim 0$  周りで展開すると

$$\mathcal{H}_2^{(3,1)} = \frac{8c_1(k_1 - k_2)^2}{c_2} y^2 + O(y^3) \quad (3.2.28)$$

と得られる。この場合は、 $k_1, k_2$  の値にかかわらず、 $E_2$  が有限に保たれることがわかる。以下では、 $E_2$  が発散を起こさない場合のみを考えていく。

### 数値計算

方程式を数値的に解いてソリトン解を導出した。得られたソリトン解の動径関数を図 3.1 に示す。数値計算の手法としては Successive Over-Relaxation (SOR) 法を用い、典型的なメッシュ数は  $N_{\text{mesh}} = 1000$  とした。

得られた解のエネルギーを表 3.1 にまとめる。 $E_1$  は非線型シグマ模型からの寄与であり、Bogomol'nyi バウンドの議論から  $E_1 \geq 2\pi Q_{\text{top}}$  である。表 3.1 の  $E_1$  はすべて  $2\pi Q_{\text{top}}$  より 1% ほど大きい値になっている。Derrick の定理から要請されるエネルギーの要素間の関係について確認する。2次元平面上に局在する静的な配位に対する Derrick の定理は、Euler-Lagrange 方程式の解が持つエネルギーへの 4 次微分項からの寄与とポテンシャルからの寄与が釣り合うことを示していた。いまの場合、 $E_4 + E_5 = E_7$  である。得られた解は、最大でも  $\sim 1\%$  の誤差でこの関係を満たしている。また、Derrick の議論より、ポテンシャルは解のスケールを決定する。図 3.2 では、解のサイズとポテンシャルの係数  $\tilde{\mu}^2$  の関係を示している。ポテンシャルの寄与を大きくすると解が中心に集まり、解が小さくなることがわかる。図 3.3 に、ある波数  $(k_1, k_2)$  に対する単位長さ当たりのエネルギー密度  $\tilde{\mathcal{H}}(\rho)$  を示す。 $k_1 = k_2$  のとき、等しいトポロジカルチャージを持つ解のエネルギーは似た形をしているが、 $k_1$  と  $k_2$  を変えると整数  $(n_1, n_2)$  に応じて様々に変化する。また、図 3.4 には  $\beta e^2$  と  $\gamma e^2$  を変数としたときのエネルギーの変化を示す。

### 3.2.2 $N > 3$ の場合

$CP^2$  の場合と同様にして、 $N > 3$  の場合へ拡張をすることができる。ここでは簡単のため、すべての整数  $n_i$  が正の場合を考える。ここで、 $i = 1, \dots, N-1$  である。 $n_1$  が  $n_i$  の中で最大のとき、principal variable  $X$  は

$$X_\infty^{-1} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1, -1) \quad (3.2.29)$$

をなる。このとき、一般化された new baby 型ポテンシャル (3.2.15) は

$$V(u_i) = \frac{(\sum_{i=1}^N |u_i|^2)^a (1 + \sum_{j=2}^N |u_j|^2)^b}{(1 + \sum_{k=1}^N |u_k|^2)^{a+b}} \quad (3.2.30)$$

表 3.1:  $(a, b) = (0, 2)$  のときの, ポテンシャル (3.2.18), (3.2.20) における全エネルギーとその要素。ここで, パラメータは  $(M, \beta e^2, \gamma e^2, \mu^2, k_1, k_2) = (0.5, 2.0, 2.0, 1.0, 1.0, 2.0)$  とした。

$(n_1, n_2)$	$E$	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_5$	$E_6$	$E_7$
(3, 1)	224	18.9	70.0	86.4	22.6	0.23	2.93	22.7
(2, -1)	226	18.9	71.7	86.5	22.6	0.22	2.97	22.8
(4, 2)	321	25.4	84.5	127	34.3	0.60	15.2	34.5
(4, 1)	276	25.3	81.4	112	31.4	0.59	-6.46	31.8
(3, -1)	277	25.3	82.1	112	31.3	0.59	-6.35	31.9
(2, -2)	328	25.3	90.4	127	34.2	0.59	15.5	34.6
(5, 2)	378	31.5	93.4	158	42.7	0.28	9.40	42.5
(5, 1)	325	31.8	89.8	126	41.8	1.53	-8.99	42.9
(4, -1)	324	31.8	89.2	126	41.8	1.51	-8.76	42.9
(3, -2)	379	31.5	94.8	158	42.5	0.28	9.78	42.7

と得られる。ここで,  $a \geq 0, b > 0$  である。

もし, 最大の整数が 2 つあったとき, つまり  $n_1 = n_2$  ならば, ポテンシャルは  $CP^{N-2}$  の場合と一致する。これを  $CP^3$  を例に確認しよう。このとき, principal variable  $X$  の逆行列は

$$X_\infty^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.2.31)$$

となる。したがって, old baby 型ポテンシャルは

$$\begin{aligned} V(u_i) &= \text{Tr}(1 - X_\infty^{-1}X) \\ &= 2 \frac{2 + |u_1 - u_2|^2 + 2|u_3|^2}{1 + |u_1|^2 + |u_2|^2 + |u_3|^2} \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

と得られる。ここで,  $u_1 = u_2 = u/\sqrt{2}$  とすれば, (3.2.32) は  $CP^2$  のポテンシャル (3.2.18) において  $(a, b) = (0, 1)$  としたものに一致する。

次に,  $n_1 > n_2 > n_3 > 0$  の場合を考えよう。このとき (3.2.30) より,  $(a, b) = (0, 2)$  に対応するポテンシャルは

$$V(u_i) = \left( \frac{1 + |u_2|^2 + |u_3|^2}{1 + |u_1|^2 + |u_2|^2 + |u_3|^2} \right)^2 \quad (3.2.33)$$

と得られる。ここに ansatz(3.2.2) を代入すると,

$$V(g_i) = \left( \frac{g_1(g_2 + g_3 + g_2g_3)}{g_1g_2 + g_2g_3 + g_3g_1} \right)^2 \quad (3.2.34)$$

となる。よって、このポテンシャルからの方程式への寄与  $\delta V_i$  は次のように計算できる：

$$\begin{aligned}\delta V_1 &= -6 \frac{g_1^2 g_2 g_3 (g_2 + g_3 + g_2 g_3)}{(g_2 g_3 + g_3 g_1 + g_1 g_2)^2} \\ \delta V_2 &= \delta V_3 = 0\end{aligned}\tag{3.2.35}$$

このポテンシャルのもとでの典型的な数値計算結果を図 3.5 に示す。Derrick の定理から要求されるエネルギーの関係式は  $E_4 + E_5 - E_7 \sim 0.12$  である。

### 3.3 議論

この章では、 $CP^{N-1}$  Skyrme-Faddeev 模型にポテンシャルを加え、その模型においてスケール不変性を持たない解の構築を行った。ポテンシャルは、微分を含まない場の関数で、その積分が発散しないことが必要条件であった。我々は、baby Skyrme 模型におけるポテンシャルを参考にポテンシャルの構成を行った。Baby Skyrme 模型のポテンシャルの一般化は少なくとも 2 つの方法が考えられた。1 つは、複素スカラー場の数を模型の自由度に合わせて増やすというものであった。しかし、この方法では埋め込み解しか得ることができなかった。そのため、我々は、ポテンシャルを principal variable で記述し、その行列を大きくすることで一般化を行った。そのように構成したポテンシャルのもとでは、様々な巻き数の組み合わせに対して、軸対称解が存在することを示した。

なぜ、そのようなポテンシャルが機能したのかを議論する。一般に、ターゲット空間が  $G/H$  で与えられる非線型シグマ模型は、大域的な  $G$  対称性と局所的な  $H$  対称性をもっている。このとき、境界条件を選択することで、大域的な対称性は  $H$  まで自発的に破れる。ポテンシャルは、取りえる境界条件に制限を課し、大域的な対称性を破ることがあるが、局所対称性を破ってしまうと、ターゲット空間の構造を変更してしまう。ターゲット空間が変わると、写像のほとんどポロジカルな性質が変更を受けてしまう場合がある。そのため、ポテンシャルは少なくとも局所的対称性を保持しなくてはならないと考えられる。Principal variable を用いた構成は、局所対称性を常に保障している。また、無限遠での射影演算子  $X_\infty$  を用いたことで、局所対称性を保持したまま、積分を発散しないポテンシャルを構成することができた。このポテンシャルの構成は、とても一般的であり、様々な非線型シグマ模型へ応用することができるだろう。



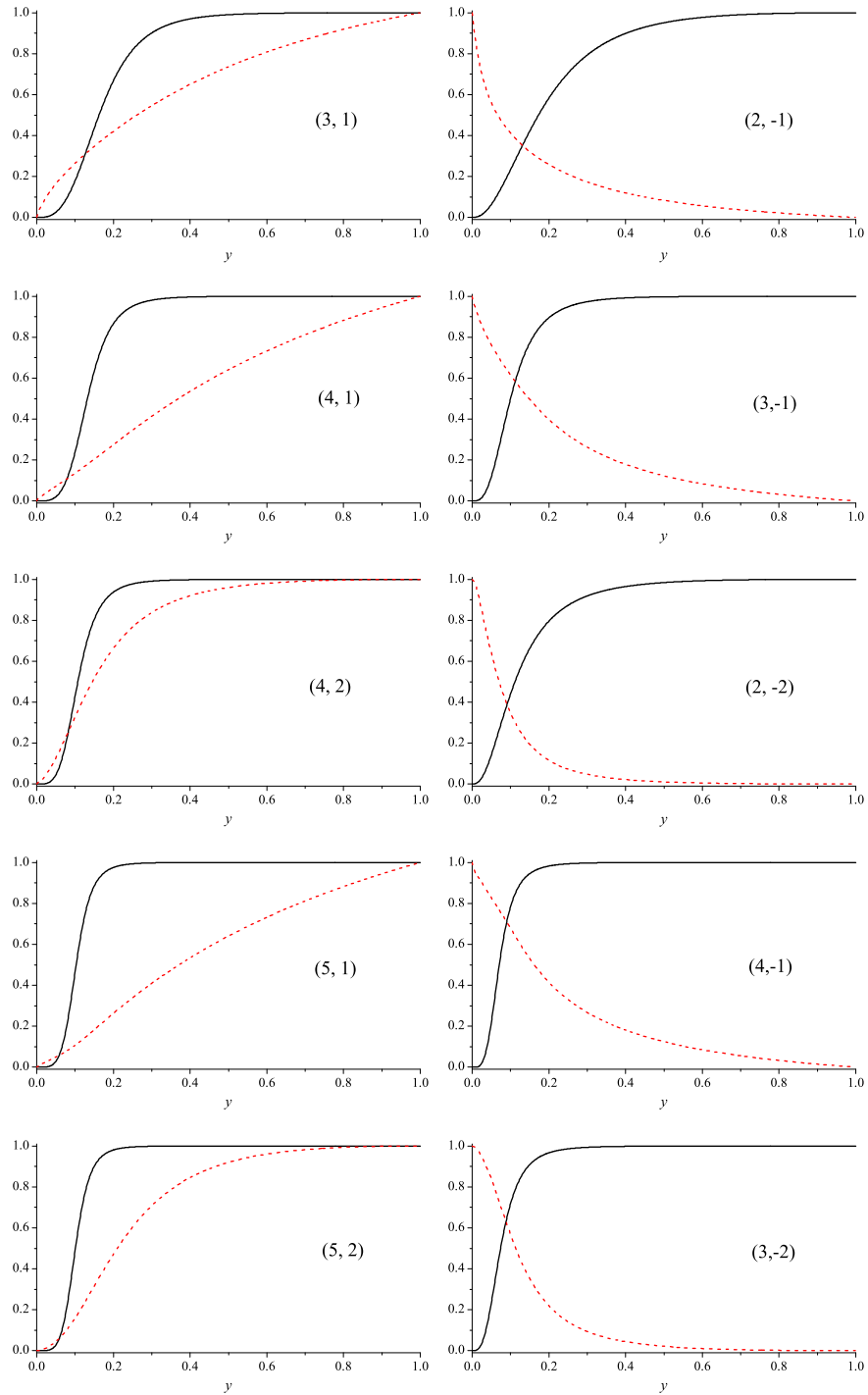


図 3.1: ポテンシャル (3.2.18),(3.2.20) における動径関数  $g_1$  (実線) と  $g_2$  (点線)。ここで、ポテンシャルの次数は  $(a, b) = (0, 2)$  とし、パラメータは  $(\beta e^2, \gamma e^2, \tilde{\mu}^2) = (2.0, 2.0, 1.0)$  に選んだ。

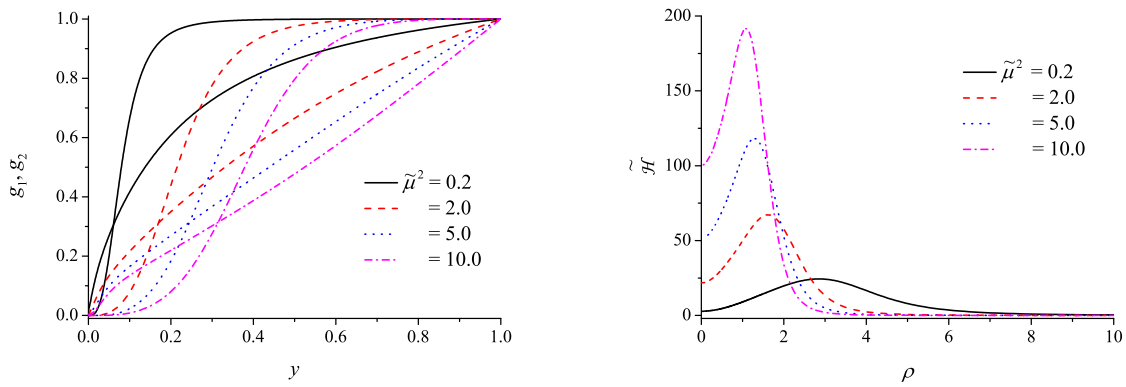


図 3.2: いくつかの  $\tilde{\mu}^2$  に対しての, ポテンシャル (3.2.18), (3.2.20) における, 動径関数 ( $g_1, g_2$ ) とエネルギー密度  $\tilde{\mathcal{H}}$ 。ここで, ポテンシャルの次数は  $(a, b) = (0, 2)$  とし, ほかのパラメータは  $(\beta e^2, \gamma e^2, k_1, k_2) = (2.0, 2.0, 1.0, 2.0)$  に選んだ。

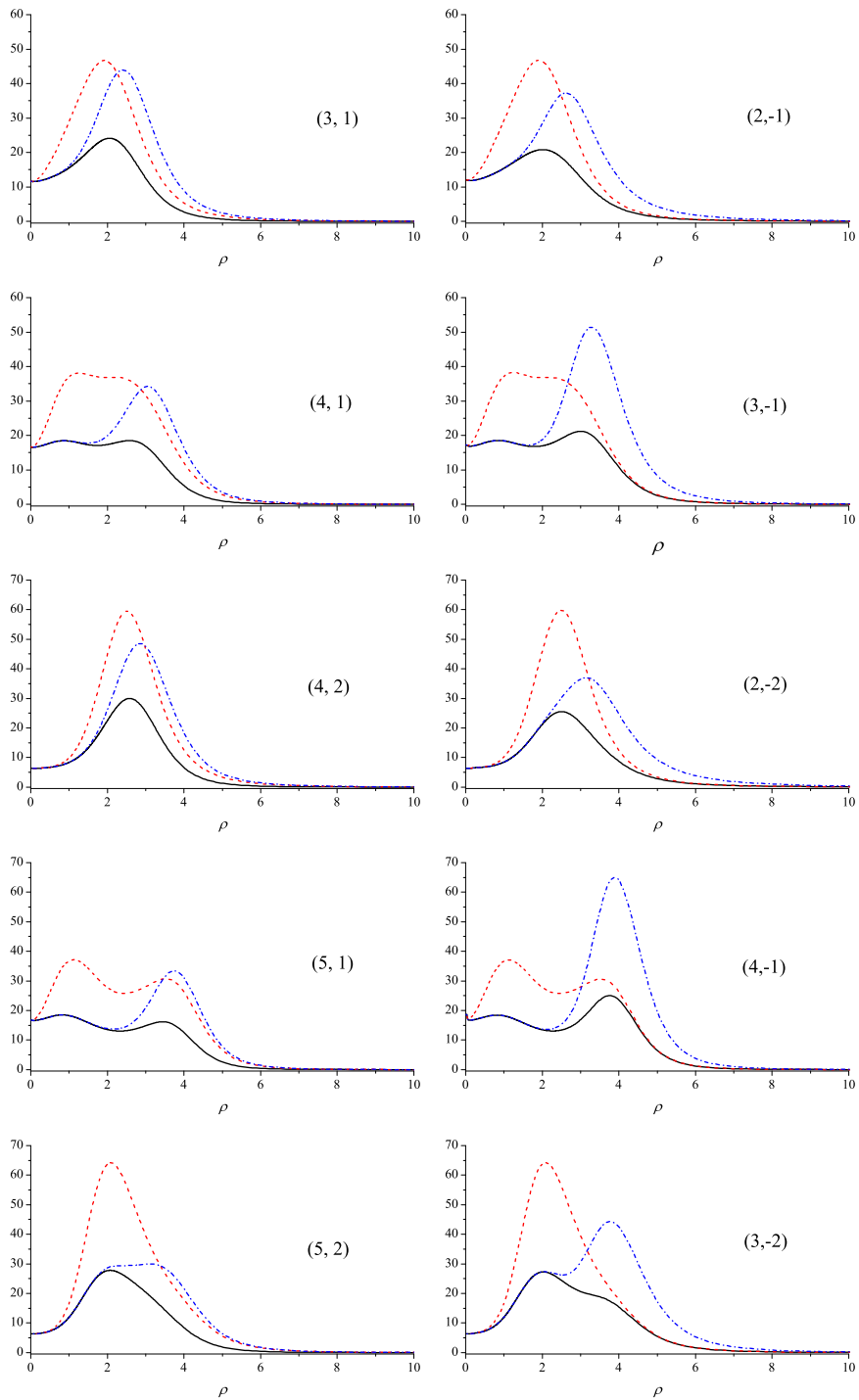


図 3.3: ポテンシャル (3.2.18),(3.2.20) における, エネルギー密度  $\tilde{\mathcal{H}}$ .  $(k_1, k_2) = (1.0, 1.0)$  (黒),  $(k_1, k_2) = (1.0, 2.0)$  (赤),  $(k_1, k_2) = (2.0, 1.0)$  (青)。ここで, ポテンシャルの次数は  $(a, b) = (0, 2)$  とし, ほかのパラメータは  $(M, \beta e^2, \gamma e^2, \tilde{\mu}^2) = (0.5, 2.0, 2.0, 1.0)$  に選んだ。

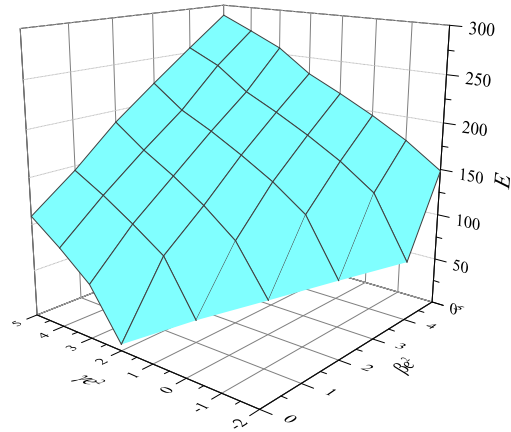


図 3.4: , ポテンシャル (3.2.18),(3.2.20) に対する, パラメータ空間  $(\beta e^2, \gamma e^2)$  における, エネルギー等位面。ここで, ポテンシャルの次数は  $(a, b) = (0, 2)$  とし, パラメータは  $(M, \tilde{\mu}^2, k_1, k_2) = (0.5, 1.0, 1.0, 1.0)$  に選んだ。

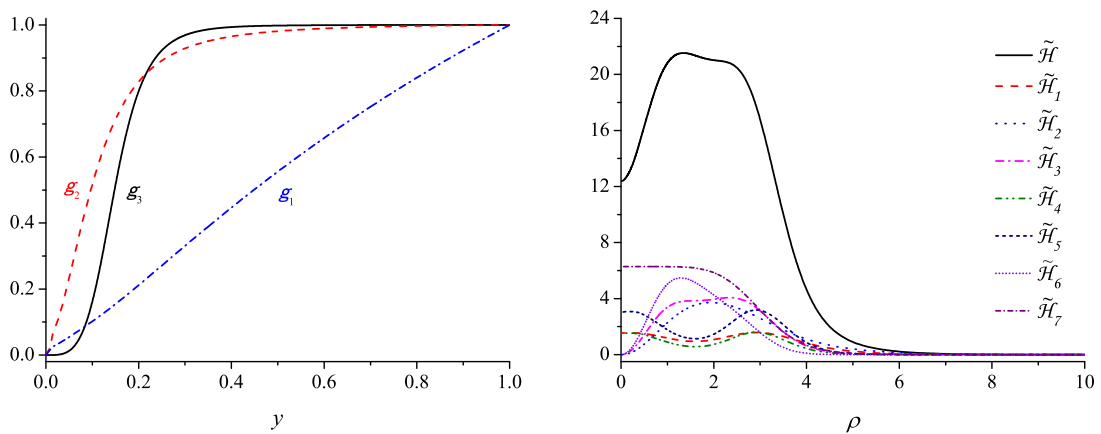


図 3.5:  $(a, b) = (0, 2)$  のときのポテンシャル (3.2.32) に対する, 動径関数  $(g_1, g_2, g_3)$  とエネルギー。ここで,  $(M, \beta e^2, \gamma e^2, \tilde{\mu}^2, k_1, k_2, k_3) = (0.5, 2.0, 2.0, 1.0, 1.0, 2.0, 1.0)$ 。

## 第4章 $F_{N-1}$ 非線型シグマ模型における インスタントン解

ここからの3章は、旗多様体  $F_{N-1} = SU(N)/U(1)^{N-1}$  をターゲット空間とする非線型シグマ模型、すなわち  $F_{N-1}$  非線型シグマ模型におけるソリトンを議論する。この章では、その基礎として、インスタントン解を扱い、一方で、後の2章では相互作用を模型に加えることで模型のスケール不変性を破り、スケール不変性を持たない解の構築を行う。

$F_{N-1}$  非線型シグマ模型は、 $CP^{N-1}$  非線型シグマ模型と同様に、 $SU(N)$  Yang-Mills 理論の低エネルギー有効模型の有力な候補である [9]。さらに、1次元格子や2次元三角格子上の  $SU(N)$  反強磁性 Heisenberg 模型から、その低エネルギーかつ格子の連続極限において、導出される [4, 5]。そのため、豊富な物理的応用の可能性を含んでいる模型である。

しかしながら、主として数学的困難から、 $F_{N-1}$  非線型シグマ模型の研究はあまり行われてこなかった。その数学的困難は、 $F_{N-1}$  の多様体としての性質に起因している。 $N \geq 3$  に対して、旗多様体  $F_{N-1}$  は、Hermite 非対称空間であり、一般には Kähler 多様体ではない。 $(CP^{N-1}$  は、Hermite 対称空間であり、Kähler 多様体でもある。) ターゲット空間が Hermite 対称空間である非線型シグマ模型の Euler-Lagrange 方程式は、ゼロ曲率条件と等価であり、その解が無限個の保存量を持つ [60]。これは、Euler-Lagrange 方程式が可積分であることを示している。しかし、Hermite 非対称空間の場合は、Euler-Lagrange 方程式とゼロ曲率条件が等価ではなくなってしまうため、可積分ではないと考えられていた<sup>1</sup>。さらに、Kähler 多様体ならばトポロジカルチャージを、その多様体を持つ Kähler ポテンシャルから一般的に定義することができるが、 $F_{N-1}$  非線型シグマ模型の場合、一意的にトポロジカルチャージを定義することができない。そのため、特別な場合にしか、従来の BPS の方法が使えない [61]。

近年、 $F_{N-1}$  非線型シグマ模型におけるソリトン解についての研究において、いくつか進展があった。論文 [62] では、 $F_2$  を  $CP^2 \times CP^2 \times CP^2$  に埋め込み、そこで位相不変量を定義すると、その位相不変量で Bogomol'nyi バウンドが与えられることが示された。さらに、その BPS 方程式を解き、解を導出した。ただし、この解は  $F_2$  の単純に埋め込まれた  $F_1 \approx S^2$  部分多様体のみで記述される解であった。すなわち、 $O(3)$  非線型シグマ模型におけるインスタントン解を、対称性を大きくした模型である  $F_2$  非線型シグマ模型に埋め込んだものになっている。論文 [63] では、Kalb-Ramond 場を模型に導入すると、Euler-Lagrange 方程式がゼロ曲率条件と等価となり、可積分性によって、埋め込み解ではなく、一般的な解が構築できることが示された。Kalb-Ramond 場は、1次元格子上の  $SU(N)$  反強磁性 Heisenberg 模型から  $F_{N-1}$  非線型シグマ模型を導出すると、自然と現れる [4, 64, 65]。しかし、高次元の格子上の Heisenberg 模型や Yang-Mills 理論から、Kalb-Ramond 場が  $F_{N-1}$  非線型シグマ模型にともなって現れるかは非自明である。そのた

<sup>1</sup>論文 [60] において、ターゲット空間が Hermite 対称空間ならば可積分であることは示されているが、非対称空間の場合に可積分ではないことは示されていない。

め、我々は Kalb-Ramond 場を模型に導入せずに、単純な埋め込み解ではない解の構築を行う。

この章の構成について述べる。4.1 節では、 $F_2$  非線型シグマ模型のラグランジアンや位相不変量、解を得るために適切な場のパラメトリゼーションなどを導入する。4.2 節では、[62] の簡単なレビューを行う。模型のもつ Bogomol'nyi バウンドなどの数理構造を理解することが目的である。4.3 節では、実際に Euler-Lagrange 方程式を解くことで解の導出を行う。4.4 節では、得られた解の持つエネルギーの構造について議論する。この議論を通して、我々が Euler-Lagrange 方程式を解くことで導出した解も、BPS 解のように、1 階の（連立）微分方程式から導出できることを示す。ただし、このときの連立 1 階微分方程式は、Bogomol'nyi 型のバウンドを満たす条件のほかに、追加の条件が必要になる。さらに、4.5 節で、得られた解の性質について、ターゲット空間  $F_2$  の幾何学的視点から解釈をする。最後に、この章のまとめを 4.6 節で行う。

## 4.1 $F_2$ 非線型シグマ模型

この節では、 $F_2$  非線型シグマ模型におけるインスタントン解の導出や、得られた解の性質をより簡単に解析するための準備を行う。4.1.1 項では、一般的に定義されたラグランジアンを、より扱いやすい場を導入し、その場を用いて書き下す。4.1.2 項では、解を得るために適切な場のパラメトリゼーションを導入する。これは、 $O(3)$  非線型シグマ模型におけるステレオグラフ射影の類似物である。さらに、4.1.3 項において、模型のターゲット空間をなす多様体  $F_2$  の幾何学的性質をもとに、模型や解のもつトポロジカルな性質について議論する。

### 4.1.1 ラグランジアン

$F_2$  非線型シグマ模型のラグランジアンを定義する。多様体  $F_2$  は、Hermite 非対称空間なので、適切な principal variable を定義することができない。その代わりに、模型の自由度は、次に定義される  $su(3)$  に値を取る場で与えられる；

$$\mathbf{n}_a = U h_a U^\dagger, \quad a = 1, 2 \quad (4.1.1)$$

ここで、 $U$  は  $SU(3)$  の要素で、行列  $h_a$  は  $su(3)$  の Cartan 生成子である。この場は、QCD の文脈では、カラー場と呼ばれる。

$F_2$  非線型シグマ模型のラグランジアンは、カラー場 (4.1.1) を用いて、次のように与えられる：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \sum_{a=1}^2 \langle \partial_\mu \mathbf{n}_a, \partial^\mu \mathbf{n}_a \rangle \quad (4.1.2)$$

ここで、ある行列  $A, B \in su(3)$  に対して、 $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^\dagger B)$  とする。また、便宜上、時空のメトリックとして、 $g_{\mu\nu} = (-, +, +, +)$  を採用した。

式 (4.1.2) は非常に抽象的なので、これを扱いやすい形に書き下す。 $SU(3)$  行列  $U$  の各列をベクトル  $Z_a$  ( $a = A, B, C$ ) として、このベクトルを用いてラグランジアンを記述する。すなわち、 $U = (Z_A, Z_B, Z_C)$  と分解して、各列ベクトルを用いてラグランジアンを書き下す。このと

き,  $Z_a$  は3成分の複素ベクトルで完全系を成しているため, それらは次の正規直交条件と完全性関係を満たす:

$$Z_a^\dagger Z_b = \delta_{ab}, \quad (4.1.3)$$

$$Z_A \otimes Z_A^\dagger + Z_B \otimes Z_B^\dagger + Z_C \otimes Z_C^\dagger = \mathbf{1}_3 \quad (4.1.4)$$

ここで,  $\mathbf{1}_3$  は  $3 \times 3$  の単位行列である。これらの恒等式は,  $U$  のユニタリー性と等価である。

Cartan 生成子として,

$$h_1 = \frac{\lambda_3}{\sqrt{2}}, \quad h_2 = \frac{\lambda_8}{\sqrt{2}} \quad (4.1.5)$$

を用いる。さらに, それに付随した昇降演算子

$$e_{\pm 1} = \frac{1}{2}(\lambda_1 \pm i\lambda_2), \quad e_{\pm 2} = \frac{1}{2}(\lambda_4 \mp i\lambda_5), \quad e_{\pm 3} = \frac{1}{2}(\lambda_6 \pm i\lambda_7) \quad (4.1.6)$$

を導入する。ここで, (4.1.5) と (4.1.6) は  $SU(3)$  の Cartan-Weyl 基底を形成する。昇降演算子  $e_p$  に対応するルートベクトル  $\alpha^p$  は, 次のように与えられる:

$$\alpha^{\pm 1} = \pm \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha^{\pm 2} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \alpha^{\pm 3} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad (4.1.7)$$

ここで, ルートベクトルの各成分  $\alpha_a^p$  ( $a = 1, 2$ ) はそれぞれ Cartan 生成子  $h_a$  に対応している。

Cartan-Weyl 基底を用いて, 次のように平坦接続を展開する:

$$U^\dagger \partial_\mu U = iA_\mu^a h_a + iJ_\mu^p e_p \quad (4.1.8)$$

ここで, その基底は正規直交系を成しているため, カレントは

$$A_\mu^a = -i \langle h_a, U^\dagger \partial_\mu U \rangle, \quad J_\mu^p = -i \langle e_p, U^\dagger \partial_\mu U \rangle. \quad (4.1.9)$$

と与えられる。より具体的には,

$$A_\mu^1 = -\frac{i}{\sqrt{2}} \left( Z_A^\dagger \partial_\mu Z_A - Z_B^\dagger \partial_\mu Z_B \right), \quad A_\mu^2 = -\frac{i}{\sqrt{6}} \left( Z_A^\dagger \partial_\mu Z_A + Z_B^\dagger \partial_\mu Z_B - 2Z_C^\dagger \partial_\mu Z_C \right) \quad (4.1.10)$$

$$\begin{aligned} J_\mu^1 &= -iZ_A^\dagger \partial_\mu Z_B, & J_\mu^2 &= -iZ_C^\dagger \partial_\mu Z_A, & J_\mu^3 &= -iZ_B^\dagger \partial_\mu Z_C, \\ J_\mu^{-1} &= -iZ_B^\dagger \partial_\mu Z_A, & J_\mu^{-2} &= -iZ_A^\dagger \partial_\mu Z_C, & J_\mu^{-3} &= -iZ_C^\dagger \partial_\mu Z_B \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

と得られる。ここで, 複素ベクトルの正規直交条件 (4.1.3) より,  $A_\mu^a$  は実であり, 非対角成分は  $J_\mu^{-i} = (J_\mu^i)^*$  を満たすことがわかる。

Cartan 展開 (4.1.8) を用いると,

$$\begin{aligned} \partial_\mu \mathbf{n}_a &= \partial_\mu U h_a U^\dagger + U h_a \partial_\mu U^\dagger = U U^\dagger \partial_\mu U h_a U^\dagger - U h_a U^\dagger \partial_\mu U U^\dagger \\ &= -U [h_a, U^\dagger \partial_\mu U] U^\dagger \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

より,

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^2 \langle \partial_\mu \mathbf{n}_a, \partial^\mu \mathbf{n}_a \rangle &= \sum_{a=1}^2 \text{Tr} \left( [h_a, U^\dagger \partial_\mu U] [h_a, U^\dagger \partial_\mu U] \right) \\ &= -\sum_{a=1}^2 J_\mu^p J^{q\mu} \alpha_a^p \alpha_a^q \text{Tr} (e_p e_q) \\ &= 2J_\mu^{-p} J^{p\mu} \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

が得られる。ここで、昇降演算子の正規直交性と  $\alpha_a^p \alpha_a^{-p} = -|\alpha^p|^2 = -2$  を用いた。これより、(4.1.13) の添え字  $p$  について和を取れば、ラグランジアン (4.1.2) が、複素ベクトル  $Z_a$  を用いて次のように書けることがわかる：

$$\mathcal{L} = - \left( \left| Z_A^\dagger \partial_\mu Z_B \right|^2 + \left| Z_B^\dagger \partial_\mu Z_C \right|^2 + \left| Z_C^\dagger \partial_\mu Z_A \right|^2 \right) \quad (4.1.14)$$

この表示 (4.1.14) は、 $SU(3)$  反強磁性ハイゼンベルグ模型から直接導出されるものである [62, 4]。

次の項では、ベクトル  $Z_a$  を複素スカラー場を用いて記述する。なぜならば、 $Z_a$  を用いて方程式を解くには、場の持つ自由度が明確でなく、正規直交条件と完全性関係をいちいち考慮しなければならないので、計算が困難であるからである。自由度を明確にするために、複素スカラー場を常に正規直交条件と完全性関係を満たすように導入することで、計算を簡略化できる。一方で、その複素スカラー場を用いてラグランジアンを記述すると、式が長くなりすぎてしまうため、ラグランジアンは基本的に  $Z_a$  による表示 (4.1.14) を用いる。

## 4.1.2 場のパラメトリゼーション

複素スカラー場を用いて  $Z_a$  を記述する [66]。その記述は、次の同型を通して行われる：

$$SU(3)/U(1)^2 \cong SL(3, \mathbb{C})/B_+ \quad (4.1.15)$$

ここで、 $B_+$  は行列式が 1 の上三角行列全体である Borel 部分群である。ここでは、同型写像  $SL(3, \mathbb{C})/B_+ \rightarrow SU(3)/U(1)^2$  を考える。すなわち、 $SL(3, \mathbb{C})/B_+$  を記述する適切な  $SL(3, \mathbb{C})$  の元から  $U = (Z_A, Z_B, Z_C)$  を構成する。この写像の存在は、岩沢分解の帰結によって保障されている。

多様体  $SL(3, \mathbb{C})/B_+$  を記述する  $SL(3, \mathbb{C})$  の元である、次の行列を考える；

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u_1 & 1 & 0 \\ u_2 & u_3 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.1.16)$$

ここで、 $u_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) は複素スカラー場である。 $X$  は 3 つの独立な複素スカラー場によって記述されているので、6 自由度を持っている。これは、多様体  $F_2$  の次元と一致している。したがって、この複素スカラー場は多様体  $F_2$  の局所座標を表していると考えることができる。

パラメトライズは次のような手順で実現できる；i)  $X$  の各列をベクトルと見なす。ii) そのベクトルに Gram-Schmit の正規直交化法を適用することで正規直交基底を構成する。iii) その基底を  $Z_a$  に割り当てる。

ではまず、 $X$  を 3 つの列ベクトルを用いて

$$X = (c_1, c_2, c_3) \quad (4.1.17)$$

と表す。ここで、

$$c_1 = (1, u_1, u_2)^T, \quad c_2 = (0, 1, u_3)^T, \quad c_3 = (0, 0, 1)^T \quad (4.1.18)$$



である。そのベクトルから、Gram-Schmitの方法により、互いに直交したベクトル

$$e_A = c_1, \quad e_B = c_2 - \frac{(c_2, e_A)}{(e_A, e_A)} e_A, \quad e_C = c_3 - \frac{(c_3, e_B)}{(e_B, e_B)} e_B - \frac{(c_3, e_A)}{(e_A, e_A)} e_A \quad (4.1.19)$$

を定義する。ここで、 $(c_i, c_j) = c_j^\dagger c_i$  である。(4.1.19)を規格化して、それを  $Z_a$ , ( $a = A, B, C$ ) に割り当てる。つまり、 $Z_a = (e_a, e_a)^{-1/2} e_a$  と定義する。以上の過程により得られたものを、複素スカラー場を用いてあらわに書くと

$$\begin{aligned} Z_A &= \frac{1}{\sqrt{\Delta_1}} \begin{pmatrix} 1 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \\ Z_B &= \frac{1}{\sqrt{\Delta_1 \Delta_2}} \begin{pmatrix} -u_1^* - u_2^* u_3 \\ 1 - u_1 u_2^* u_3 + |u_2|^2 \\ -u_1^* u_2 + u_3 + u_3 |u_1|^2 \end{pmatrix}, \\ Z_C &= \frac{1}{\sqrt{\Delta_2}} \begin{pmatrix} u_1^* u_3^* - u_2^* \\ -u_3^* \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

となる。ここで、

$$\Delta_1 = 1 + |u_1|^2 + |u_2|^2, \quad \Delta_2 = 1 + |u_3|^2 + |u_1 u_3 - u_2|^2 \quad (4.1.21)$$

である。パラメトリゼーション(4.1.20)は、正規直交基底であるので、複素スカラー場の取る値によらず、明らかに正規直交条件と完全性関係を満たしている。

後の便利のため、1形式  $Z_a^\dagger dZ_b$  の非対角成分を次のように表しておく：

$$\begin{aligned} Z_B^\dagger dZ_A &= \frac{1}{\Delta_1 \sqrt{\Delta_2}} (P_{11} du_1 + P_{12} du_2 + P_{13} du_3), \\ Z_C^\dagger dZ_A &= \frac{1}{\sqrt{\Delta_1 \Delta_2}} (P_{21} du_1 + P_{22} du_2 + P_{23} du_3), \\ Z_C^\dagger dZ_B &= \frac{1}{\sqrt{\Delta_1 \Delta_2}} (P_{31} du_1 + P_{32} du_2 + P_{33} du_3) \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

ここで、

$$\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - u_1^* u_2 u_3^* + |u_2|^2 & -u_1 u_2^* + u_3^* + u_3^* |u_1|^2 & 0 \\ -u_3 & 1 & 0 \\ -u_3 (u_1^* + u_2^* u_3) & u_1^* + u_2^* u_3 & -\Delta_1 \end{pmatrix} \quad (4.1.23)$$

である。

### 4.1.3 位相不変量

この項では、場の配位を特徴付ける位相不変量について議論する。まず、この章で考えている配位ホモトピー分類を議論する。その後、ターゲット空間の性質を基に、配位を特徴付ける位相不変量を導入する。

この章で我々は、2次元平面  $(x^1, x^2)$  に広がる2種類の配位—静的な配位と  $x^3$  軸に沿って光速で伝播する平面波の成分を持つ配位—を考えている。したがって、場は平面  $\mathbb{R}^2$  (または  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ ) からターゲット空間  $F_2$  への写像になっている。ただし、静的な配位も平面波の成分を持った配位も、局在しているのは  $x^1 x^2$  平面上のみであることを注意する。また、解の持つ (単位長さあたりの) エネルギーの有限性は、ベクトル  $Z_a$  が  $x^1 x^2$  平面の無限遠において定ベクトルになることを要求する。したがって、有限エネルギーを持つ配位に対しては、平面の無限遠を同一視することができるため、平面  $\mathbb{R}^2$  は球面  $S^2$  へとコンパクト化できる。ゆえに、局在した場の配位は写像  $S^2 \rightarrow F_2$  のホモトピー群、つまり  $\pi_2(F_2)$  で分類される。

ホモトピー群  $\pi_2(F_2)$  は、 $\pi_2(SU(3)) = \pi_1(SU(3)) = 0$  より、公式  $\pi_2(G/H) = \pi_1(H)$  を適用すると

$$\pi_2(F_2) = \pi_2(SU(3)/U(1)^2) = \pi_1(U(1)^2) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \quad (4.1.24)$$

と得られる。ここで、 $\pi_1(U(1)^2) = \pi_1(U(1)) \times \pi_1(U(1))$  を用いた。したがって、配位は2つの独立な整数で特徴付けられることがわかる。

位相不変量として、まずベクトル  $Z_a$ , ( $a = A, B, C$ ) のもつ巻き数について議論する [62, 67]。  $Z_a$  は、それぞれ3成分の複素単位ベクトルであるので、写像  $S^2 \rightarrow CP^2$  と見なすことができる<sup>2</sup>。したがって、 $CP^2$  非線型シグマ模型のトポロジカルチャージと同様の定義で、 $Z_a$  のもつ位相不変量を定義することができる。すなわち、 $Z_a$  の巻き数は次のように与えられる：

$$N_a = -\frac{i}{2\pi} \int d^2x \varepsilon^{jk} \left( D_j^{(a)} Z_a \right)^\dagger D_k^{(a)} Z_a \quad j, k = 1, 2, \quad \forall a = A, B, C \quad (4.1.25)$$

ここで、共変微分は

$$D_\mu^{(a)} \equiv \partial_\mu - Z_a^\dagger \partial_\mu Z_a \quad (4.1.26)$$

と定義した。

いま、各ベクトルについて巻き数が定義できるので、3つの整数が定義されたことになる。しかし、これから示すようにそれらの間には制限

$$N_A + N_B + N_C = 0. \quad (4.1.27)$$

が存在するため、独立なものは2つのみである。これは、ホモトピー分類の議論と整合している。(4.1.27)を示すために、巻き数(4.1.25)を  $N_a = \int dx^2 \mathcal{N}_a$  と書く。そのとき、巻き数の密度は

$$\begin{aligned} 2\pi i \mathcal{N}_a &= \varepsilon^{ij} \left[ \partial_i Z_a^\dagger - (\partial_i Z_a^\dagger Z_a) Z_a^\dagger \right] \left[ \partial_j Z_a - (Z_a^\dagger \partial_j Z_a) Z_a \right] \\ &= \varepsilon^{ij} \left[ \partial_i Z_a^\dagger \partial_j Z_a - (\partial_i Z_a^\dagger Z_a) (Z_a^\dagger \partial_j Z_a) \right] \\ &= \varepsilon^{ij} \left[ \partial_i Z_a^\dagger \left( \sum_b Z_b \otimes Z_b^\dagger \right) \partial_j Z_a - (\partial_i Z_a^\dagger Z_a) (Z_a^\dagger \partial_j Z_a) \right] \\ &= \varepsilon^{ij} \left[ \partial_i Z_a^\dagger \left( \sum_{b \neq a} Z_b \otimes Z_b^\dagger \right) \partial_j Z_a \right] \end{aligned} \quad (4.1.28)$$

<sup>2</sup>この見方は埋め込み  $F_2 \hookrightarrow CP^2 \times CP^2 \times CP^2$  に対応している。

と書くことができる。ここで、ベクトル  $Z_a$  の完全性関係 (4.1.4) を用いた。3つの巻き数の密度の和を取ると、

$$\begin{aligned}
& 2\pi i (\mathcal{N}_A + \mathcal{N}_B + \mathcal{N}_C) \\
&= \varepsilon^{ij} \left[ \partial_i Z_A^\dagger \left( Z_B Z_B^\dagger + Z_C Z_C^\dagger \right) \partial_j Z_A + \partial_i Z_B^\dagger \left( Z_C Z_C^\dagger + Z_A Z_A^\dagger \right) \partial_j Z_B + \partial_i Z_C^\dagger \left( Z_A Z_A^\dagger + Z_B Z_B^\dagger \right) \partial_j Z_C \right] \\
&= \varepsilon^{ij} \left[ \left( \partial_i Z_A^\dagger Z_B \right) \left( Z_B^\dagger \partial_j Z_A \right) + \left( \partial_i Z_B^\dagger Z_C \right) \left( Z_C^\dagger \partial_j Z_B \right) + \left( \partial_i Z_C^\dagger Z_A \right) \left( Z_A^\dagger \partial_j Z_C \right) \right. \\
&\quad \left. + \left( \partial_i Z_B^\dagger Z_A \right) \left( Z_A^\dagger \partial_j Z_B \right) + \left( \partial_i Z_C^\dagger Z_B \right) \left( Z_B^\dagger \partial_j Z_C \right) + \left( \partial_i Z_A^\dagger Z_C \right) \left( Z_C^\dagger \partial_j Z_A \right) \right] \\
&= \varepsilon^{ij} \left[ \left( \partial_i Z_A^\dagger Z_B \right) \left( Z_B^\dagger \partial_j Z_A \right) + \left( \partial_i Z_B^\dagger Z_C \right) \left( Z_C^\dagger \partial_j Z_B \right) + \left( \partial_i Z_C^\dagger Z_A \right) \left( Z_A^\dagger \partial_j Z_C \right) \right. \\
&\quad \left. + \left( Z_B^\dagger \partial_i Z_A \right) \left( \partial_j Z_A^\dagger Z_B \right) + \left( Z_C^\dagger \partial_i Z_B \right) \left( \partial_j Z_B^\dagger Z_C \right) + \left( Z_A^\dagger \partial_i Z_C \right) \left( \partial_j Z_C^\dagger Z_A \right) \right] \\
&= \varepsilon^{ij} \left[ \left( \partial_i Z_A^\dagger Z_B \right) \left( Z_B^\dagger \partial_j Z_A \right) + \left( \partial_i Z_B^\dagger Z_C \right) \left( Z_C^\dagger \partial_j Z_B \right) + \left( \partial_i Z_C^\dagger Z_A \right) \left( Z_A^\dagger \partial_j Z_C \right) \right. \\
&\quad \left. + \left( \partial_j Z_A^\dagger Z_B \right) \left( Z_B^\dagger \partial_i Z_A \right) + \left( \partial_j Z_B^\dagger Z_C \right) \left( Z_C^\dagger \partial_i Z_B \right) + \left( \partial_j Z_C^\dagger Z_A \right) \left( Z_A^\dagger \partial_i Z_C \right) \right] \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.1.29}$$

ここで、 $Z_a^\dagger \partial_\mu Z_b = -\partial_\mu Z_a^\dagger Z_b$  を使った。したがって、(4.1.29) の積分を行えば、(4.1.27) が得られる。この制限の導出には、 $Z_a$  の正規直交条件と関係を用いたが、パラメトリゼーション (4.1.20) の形は仮定していないことに注意する。すなわち、この制限はパラメトリゼーションによらず成り立っている。

この巻き数  $N_a$  を用いて配位を分類することは可能である。しかし、これまでに知られているソリトンが持つトポロジカルチャージと異なり、巻き数の間に制限があるため、 $N_a$  によってどのようにソリトン数を定義できるかは非自明である。そこで、多様体の持つ Kähler 形式の引き戻しによって、ソリトン数を記述する位相不変量を導入する。

多様体  $F_2$  のメトリックは、次のように与えられる [67] :

$$ds_{F_2}^2 = \sum_{a \neq b} C_{ab} |Z_a^\dagger dZ_b|^2 \tag{4.1.30}$$

ここで、係数  $C_{ab}$  は任意の正の実数である。メトリックの対称性より、一般性を失うことなく  $C_{ab} = C_{ba}$  とすることができる。したがって、メトリック (4.1.30) は3つの正の実数 ( $C_{AB}, C_{AC}, C_{BC}$ ) を含んでいる。多様体  $F_2$  は、*nearly Kähler* 多様体と呼ばれ、 $C_{AB} - C_{AC} + C_{BC} = 0$  のときには Kähler 多様体になるが、一般には Kähler 多様体ではない [67]。ターゲット空間が Kähler 多様体ならば、その Kähler 形式の引き戻しでトポロジカルチャージ、つまりソリトン数を表す量を定義できる。一方で、Kähler 多様体でなければ、Kähler 形式の引き戻しは位相不変量にはならないことに注意する。そのため、便宜上  $F_2$  が Kähler 多様体である場合を考え、そこで位相不変量を定義する。

多様体  $F_2$  が Kähler 多様体であり、 $Z_a$  が (4.1.20) と記述されているとき、Kähler ポテンシャルを次のように定義することができる :

$$K = K_1 + K_2 \quad K_j = m_j \log \Delta_j \tag{4.1.31}$$

ここで、便宜上  $C_{AB} = m_1$ ,  $C_{BC} = m_2$  と書いた。この Kähler ポテンシャルを用いて、Kähler 形式は次のように与えられる :

$$\Omega = i\partial\bar{\partial}K \tag{4.1.32}$$

ここで、 $\partial$ と $\bar{\partial}$ は Dolbeault 作用素と呼ばれ、 $\partial = du_\alpha \frac{\partial}{\partial u_\alpha}$ と定義される。(4.1.32)が閉形式、すなわち $d\Omega = 0$ であることは容易に示すことができる。

Kähler 形式 (4.1.32) を  $\Omega_j = i\partial\bar{\partial}K_j$  と二つに分けると、それらは次のように複素スカラー場を用いて記述することができる：

$$\Omega_1 = \frac{im_1}{\Delta_1^2} \left\{ (1 + |u_2|^2) du_1 \wedge du_1^* - u_2 u_1^* du_1 \wedge du_2^* - u_1 u_2^* du_2 \wedge du_1^* + (1 + |u_1|^2) du_2 \wedge du_2^* \right\}, \quad (4.1.33)$$

$$\Omega_2 = \frac{im_2}{\Delta_2^2} \left\{ (1 + |u_3|^2) d(u_1 u_3 - u_2) \wedge d(u_1^* u_3^* - u_2^*) - u_3 (u_1^* u_3^* - u_2^*) d(u_1 u_3 - u_2) \wedge du_3^* - u_3^* (u_1 u_3 - u_2) du_3 \wedge d(u_1^* u_3^* - u_2^*) + (1 + |u_1 u_3 - u_2|^2) du_3 \wedge du_3^* \right\} \quad (4.1.34)$$

Kähler 形式を積分することで、位相不変量  $Q$  を定義する：

$$Q \equiv Q_1 + Q_2, \quad Q_j = \int \Omega_j \quad (4.1.35)$$

この位相不変量は巻き数  $N_a$  を用いて、

$$Q_1 = -im_1 \int d^2x \varepsilon^{ij} \left( D_i^{(A)} Z_A \right)^\dagger \left( D_j^{(A)} Z_A \right) = 2\pi m_1 N_A, \quad (4.1.36)$$

$$Q_2 = im_2 \int d^2x \varepsilon^{ij} \left( D_i^{(C)} Z_C \right)^\dagger \left( D_j^{(C)} Z_C \right) = -2\pi m_2 N_C$$

と表すことができる。係数を  $m_1 = m_2 = \frac{1}{2\pi}$  と取り規格化することで、2つの整数  $N_A$  と  $N_C$  を用いて、位相不変量を

$$Q = N_A - N_C \in \mathbb{R} \quad (4.1.37)$$

と定義することができる。2つの整数によって位相不変量を定義することは、ホモトピーの議論 (4.1.24) と合致している。4.4 節で見ると、この位相不変量と静的な解のエネルギーが比例する。そのため、 $Q$  はソリトン数を表していると考えられる。

## 4.2 BPS の方法による埋め込み解

上で述べたように、論文 [62] において、 $F_2$  非線型シグマ模型の BPS 解が見つっている。ただし、この解は本質的に  $F_1 (= CP^1)$  非線型シグマ模型の解を、 $F_2$  非線型シグマ模型へと埋め込んだものであることに注意する。この節では、その解の導出を行うとともに、BPS セクターには埋め込み解しか存在しないことを示す。

この節では、 $x^3$  軸方向に並進対称性をもつ静的な配位を考える。このとき、単位長さ当たりのエネルギー汎関数は

$$E = \int d^2x \left( \left| Z_A^\dagger \partial_i Z_B \right|^2 + \left| Z_B^\dagger \partial_i Z_C \right|^2 + \left| Z_C^\dagger \partial_i Z_A \right|^2 \right) \quad i = 1, 2 \quad (4.2.1)$$

となる。

このエネルギー汎関数のもつ Bogomol'nyi バウンドを求めたい。Bogomol'nyi バウンドを求めるためには、共変微分 (4.1.26) を用いて、エネルギー汎関数を記述すると便利である。複素ベクトル  $Z_a$  の完全性に注意すると、たとえば

$$\begin{aligned} \left| Z_B^\dagger \partial_i Z_A \right|^2 + \left| Z_C^\dagger \partial_i Z_A \right|^2 &= \partial_i Z_A^\dagger Z_B Z_B^\dagger \partial_i Z_A + \partial_i Z_A^\dagger Z_C Z_C^\dagger \partial_i Z_A \\ &= \partial_i Z_A^\dagger \left( Z_B Z_B^\dagger + Z_C Z_C^\dagger \right) \partial_i Z_A \\ &= \partial_i Z_A^\dagger \partial_i Z_A - \partial_i Z_A^\dagger Z_A Z_A^\dagger \partial_i Z_A \\ &= \left| D_i^{(A)} Z_A \right|^2 \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

と書ける。同様にして、

$$\begin{aligned} \left| Z_A^\dagger \partial_i Z_B \right|^2 + \left| Z_C^\dagger \partial_i Z_B \right|^2 &= \left| D_i^{(B)} Z_B \right|^2 \\ \left| Z_A^\dagger \partial_i Z_C \right|^2 + \left| Z_B^\dagger \partial_i Z_C \right|^2 &= \left| D_i^{(C)} Z_C \right|^2 \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

となる。したがって、 $Z_a^\dagger \partial_i Z_b = -\partial_i Z_a^\dagger Z_b$  より  $|Z_a^\dagger \partial_i Z_b|^2 = |Z_b^\dagger \partial_i Z_a|^2$  であることに注意すれば、エネルギー汎関数 (4.2.1) は共変微分を用いて

$$E = \frac{1}{2} \int d^2x \left( \left| D_i^{(A)} Z_A \right|^2 + \left| D_i^{(B)} Z_B \right|^2 + \left| D_i^{(C)} Z_C \right|^2 \right) \quad (4.2.4)$$

と書くことができる。式 (4.2.4) の各項は、 $CP^2$  非線型シグマ模型の静的なエネルギーと見なすことができる。なぜならば、 $Z_a$  が3成分の単位複素ベクトルで、 $CP^2$  非線型シグマ模型を記述する場と同じ性質を持っているからである。ただし、 $Z_a$  には正規直交条件 (4.1.3) と完全性関係 (4.1.4) が課されていることに注意する。

$CP^2$  非線型シグマ模型の Bogomol'nyi バウンドの議論

$$\begin{aligned} \int d^2x \left| D_i^{(a)} Z_a \right|^2 &= \frac{1}{2} \int d^2x \left| D_i^{(a)} Z_a \pm i \varepsilon_{ij} D_j^{(a)} Z_a \right|^2 \mp i \int d^2x \varepsilon_{ij} \left( D_i^{(a)} Z_a \right)^\dagger D_j Z \\ &\geq 2\pi |N_a| \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

を (4.2.4) の各項に適用すると、(4.2.4) の Bogomol'nyi バウンドが

$$E \geq \pi (|N_A| + |N_B| + |N_C|) \quad (4.2.6)$$

と得られる。この不等式の等号成立条件は、すべての複素ベクトル  $Z_a$ , ( $a = A, B, C$ ) に対して、

$$D_i^{(a)} Z_a = \pm i \varepsilon^{ij} D_j^{(a)} Z_a \quad \forall a = A, B, C. \quad (4.2.7)$$

が成り立つことである。この方程式 (4.2.7) は、 $CP^2$  非線型シグマ模型の BPS 方程式と同じ形をしているが、 $Z_a$  は正規直交条件 (4.1.3) を満たさなければならないので、 $CP^2$  非線型シグマ模型の BPS 解をそのまま  $Z_a$  に割り当てることはできないことに注意する。

この BPS 方程式 (4.2.7) は、非常に制限されたクラスに属する解しか持たない。そのクラスとは、 $CP^1$  非線型シグマ模型の BPS 解を  $F_2$  非線型シグマ模型に単純に埋め込んだものである。これを今から示す。

論文 [62] で議論されているように、つぎの配位は (4.2.7) の解である：

$$Z_A = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ p(z_+)/q(z_+) \end{pmatrix} \quad Z_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Z_C = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{pmatrix} -p(z_-)/q(z_-) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.2.8)$$

ここで、 $\Delta \equiv 1 + |p(z_+)|^2/|q(z_+)|^2$ 、 $z_{\pm} = x^1 \pm ix^2$  である。ただし、 $p(z_+)$  と  $q(z_+)$  は互いに素な  $z_+$  の多項式とする。このベクトルは、(4.1.20) において、3つの複素スカラー場のうち2つを定数に取り、残りを正則関数としたものと等価である。たとえば、 $(u_1, u_2, u_3) = (0, p(z_+)/q(z_+), 0)$  のとき、(4.1.20) は (4.2.8) を再現する。(4.2.8) で与えられているベクトルは、明らかに正規直交条件と完全性関係を満たしている。さらに、それぞれが  $CP^2$  非線型シグマ模型の BPS 解であることから、(4.2.8) が (4.2.7) の解であることがわかる。

解 (4.2.8) において、 $Z_B$  は定ベクトルなので、明らかに  $N_B = 0$  である。さらに、そのとき巻き数の制限 (4.1.27) より、 $N_A = -N_C$  である。(4.2.8) に対して、 $N_A$  は  $p(z_+)$  と  $q(z_+)$  のもつ最大次数つまり  $N_A = \max\{\deg(p), \deg(q)\}$  で与えられる正の整数である。したがって、解 (4.2.8) のもつエネルギーは

$$E = \pi(|N_A| + |N_C|) = \pi(N_A - N_C) = \pi Q \quad (4.2.9)$$

と与えられ、位相不変量  $Q$  に比例している。

次に、BPS 方程式 (4.2.7) が埋め込み解 (4.2.8) と等価な解しか持たないことを示す。 $CP^2$  非線型シグマ模型の BPS 方程式の解は (反) 正則ベクトルであることから、(4.2.7) は、 $Z_a$  ( $a = A, B, C$ ) が正則または反正則であることを要求する。もしすべての  $Z_a$  が正則ならば、すべての  $N_a$  が正となり制限 (4.1.27) を満たさない。同様にして、すべての  $Z_a$  が反正則の場合も排除される。したがって、考えうる可能性は、「3つのうち2つが正則であり、1つが反正則の場合」と、「3つのうち2つが反正則であり、1つが正則の場合」の2通りである。

まず、「3つのうち2つが正則であり、1つが反正則の場合」を考える。ラグランジアンのもつ大域的な  $SU(3)$  対称性により、一般性を失うことなく、2つの正則ベクトルを  $Z_A$  と  $Z_B$  と取ることができる。いま、その正則ベクトルを

$$Z_A = \frac{1}{\sqrt{\Delta_A}} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \quad Z_B = \frac{1}{\sqrt{\Delta_B}} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (4.2.10)$$

と書く。ここで、 $\Delta_A = \sum |w_i|^2$ 、 $\Delta_B = \sum |v_i|^2$  であり、 $w_i, v_i$  は  $z_+$  の関数とする。この2つのベクトルの直交性  $Z_A^\dagger Z_B = 0$  を考える。すなわち、

$$\sum_{i=1}^3 w_i^* v_i = 0 \quad (4.2.11)$$

である。ここで、 $w_1$  と  $v_2$  が恒等的に0である場合を排除できる。なぜならば、ラグランジアンのもつ対称性を考慮すると、一般性を欠くことなく、空間の無限遠において  $U = (Z_A, Z_B, Z_C) \rightarrow \text{diag}(1, 1, 1)$  という境界条件を課すことができるからである。この2つの関数が0でない点において、その積  $w_1^* v_2$  で (4.2.11) を割ると、

$$\frac{v_1}{v_2} + \frac{w_2^*}{w_1^*} + \left(\frac{v_3}{v_2}\right) \left(\frac{w_3^*}{w_1^*}\right) = 0 \quad (4.2.12)$$

を得る。ここで、(4.2.12)の1項目は正則関数、2項目は反正則関数、3項目は正則関数と反正則関数の積になっていることに注意する。したがって、(4.2.12)が満たされるには、少なくとも3項目が正則関数または反正則関数でなければいけない。すなわち、 $v_3 = av_2$  または  $w_3^* = aw_1^*$  である。ここで、 $a$ は任意の複素定数である。 $v_3 = av_2$ のとき、(4.2.12)の2項目と3項目が反正則関数であるので、1項目も反正則関数でなければいけない。正則かつ反正則である関数は定数のみなので、 $v_1/v_2$ が定数である必要がある。同様にして、 $w_3^* = aw_1^*$ のときは  $w_2^*/w_1^*$ が定数であることが要求される。以上をまとめると、(4.2.12)が満たされるのは次の2つのときである：

$$\{v_3 = av_2 \cap v_1 = bv_2 \cap bw_1^* + w_2^* + aw_3^* = 0\} \quad (4.2.13)$$

$$\{w_3^* = aw_1^* \cap w_2^* = bw_1^* \cap v_1 + bv_2 + av_3 = 0\} \quad (4.2.14)$$

ここで、 $a, b$ は任意の複素定数である。さらに、境界条件より、 $a = b = 0$ を得る。ゆえに、 $w_1$  または  $v_2$ が0でないとき、 $Z_A, Z_B$ は次の2つ場合のどちらかでなければならない：

$$\left\{ Z_A = \frac{1}{\sqrt{|w_1|^2 + |w_3|^2}} \begin{pmatrix} w_1 \\ 0 \\ w_3 \end{pmatrix}, Z_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (4.2.15)$$

$$\left\{ Z_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, Z_B = \frac{1}{\sqrt{|v_2|^2 + |v_3|^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right\} \quad (4.2.16)$$

さらに、 $w_1$  または  $v_2$ が0である点においても、関数の連続性から  $Z_A, Z_B$ は(4.2.15)か(4.2.16)のどちらかでなければならない。(4.2.15)と(4.2.16)は、規格化を取り直し、適切なゲージ変換を課すと(4.2.8)と等価なものに帰着する。3つのベクトル  $Z_a$ のうち2つが反正則であり1つが正則な場合も、 $w_i, v_i$ を反正則関数として同様の議論を行うことで、埋め込み解しか存在しないことを示すことができる。

以上で見てきたように、埋め込み解ではない、 $F_2$ 非線型シグマ模型に特有の解を得るためには、BPSの方法ではない別の方法が必要である。したがって、我々はEuler-Lagrange方程式を直接解くことにする。もちろん、それらの解はBogomol'nyiバウンド(4.2.6)を満たさず、同じホモトピークラスに属する埋め込み解(4.2.8)よりも大きなエネルギーをもつ。

### 4.3 Euler-Lagrange 方程式の解

$F_2$ 非線型シグマ模型に特有の解を得るため、Euler-Lagrange方程式を考える。ターゲット空間  $F_2$ が等質空間であるため、Euler-Lagrange方程式は、大域的な  $SU(3)$ 対称性に対応するNoetherカレントの保存則と等価である[60]。そのため、まず大域的な対称性をもっとも見やすい、カラー場で記述されたラグランジアン(4.1.2)に対する作用

$$S = \frac{1}{4} \int d^4x \sum_{a=1}^2 \langle \partial_\mu \mathbf{n}_a, \partial^\mu \mathbf{n}_a \rangle \quad (4.3.1)$$

		$(N_A, N_C)$	
		$n_1 < 0$	$n_1 > 0$
$n_3 > 0$	$v.$	$vi. (n_3, -n_3)$	$i. (n_2, -n_2)$
	$( n_1 , - n_1 )$	$n_2 > 0$ ↗	
$n_3 < 0$	$iv.$	$iii. (n_1, -n_1)$	$ii. (n_1, -n_1)$
	$( n_2 , - n_2 )$	$n_2 < 0$ ↙	
		$( n_3 , - n_3 )$	$( n_3 , - n_3 )$

表 4.1:  $(N_A, N_C)$  と複素スカラー場の巻き数  $n_1, n_2, n_3$  の関係。ここで、トポロジカルチャージは  $Q = N_A - N_C$  で与えられている。

を考える。Noether カレントを導出するために、次の  $SU(3)$  無限小変換を考える：

$$U \rightarrow gU, \quad g = \exp(i\epsilon\phi) \quad (4.3.2)$$

ここで、 $\epsilon$  は無限小の定数で、 $\phi$  は任意の座標依存する  $su(3)$  の要素とする。このとき、カラー場は随伴表現の様に、つまり  $\mathbf{n}_a \rightarrow \mathbf{n}'_a = g\mathbf{n}_a g^\dagger$  と変換されるため、その微分は

$$\begin{aligned} \partial_\mu \mathbf{n} &\rightarrow \partial_\mu \mathbf{n}' = g (\partial_\mu \mathbf{n} + [g^\dagger \partial_\mu g, \mathbf{n}_a]) g^\dagger \\ &= g (\partial_\mu \mathbf{n} + i\epsilon [\partial_\mu \phi, \mathbf{n}_a]) g^\dagger \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

と変換される。したがって、作用の変化分は

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{4} \int d^4x \sum_{a=1}^2 \{ \langle \partial_\mu \mathbf{n}'_a, \partial^\mu \mathbf{n}'_a \rangle - \langle \partial_\mu \mathbf{n}_a, \partial^\mu \mathbf{n}_a \rangle \} \\ &= \frac{i\epsilon}{2} \int d^4x \sum_{a=1}^2 \text{Tr} (\partial_\mu \mathbf{n} [\partial^\mu \phi, \mathbf{n}_a]) \\ &= \frac{i\epsilon}{2} \int d^4x \sum_{a=1}^2 \text{Tr} (\partial_\mu \phi [\mathbf{n}_a, \partial^\mu \mathbf{n}_a]) \\ &= -\frac{i\epsilon}{2} \int d^4x \sum_{a=1}^2 \text{Tr} (\phi \partial_\mu [\mathbf{n}_a, \partial^\mu \mathbf{n}_a]) \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

となる。ここで、 $\phi$  は任意の  $su(3)$  の要素であることに注意すると、Euler-Lagrange 方程式  $\delta S = 0$  は次のように得られることがわかる：

$$\partial^\mu \mathcal{K}_\mu = 0, \quad \mathcal{K}_\mu = \sum_{a=1}^2 [\mathbf{n}_a, \partial_\mu \mathbf{n}] \quad (4.3.5)$$



この方程式を解くには、複素スカラー場を用いて記述することが便利である。そのために、まず複素ベクトル  $Z_a$  を用いて方程式を表す。Noether カレントを  $\mathcal{K}_\mu = -U\mathcal{B}_\mu U^\dagger$  と分解しよう。そのとき、(4.3.5) は次の方程式と等価であることがわかる：

$$\partial^\mu \mathcal{B}_\mu + [U^\dagger \partial^\mu U, \mathcal{B}_\mu] = 0 \quad (4.3.6)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\mu &= \sum_{a=1}^2 [h_a, [h_a, U^\dagger \partial_\mu U]] \\ &= i \sum_{a=1}^2 |\alpha_a^p|^2 J_\mu^p e_p \\ &= 2 \begin{pmatrix} 0 & Z_A^\dagger \partial_\mu Z_B & Z_A^\dagger \partial_\mu Z_C \\ Z_B^\dagger \partial_\mu Z_A & 0 & Z_B^\dagger \partial_\mu Z_C \\ Z_C^\dagger \partial_\mu Z_A & Z_C^\dagger \partial_\mu Z_B & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

と表せる。また、

$$\begin{aligned} [U^\dagger \partial_\mu U, \mathcal{B}^\mu] &= [iA_\mu^a h_a + iJ_\mu^p e_p, 2iJ^{q\mu} e_q] \\ &= -2 \sum_{a=1}^2 \alpha_a^q A_\mu^a J^{q\mu} e_q \\ &= 2i \begin{pmatrix} 0 & R_\mu^1 Z_A^\dagger \partial^\mu Z_B & R_\mu^{-2} Z_A^\dagger \partial^\mu Z_C \\ R_\mu^{-1} Z_B^\dagger \partial^\mu Z_A & 0 & R_\mu^3 Z_B^\dagger \partial^\mu Z_C \\ R_\mu^2 Z_C^\dagger \partial^\mu Z_A & R_\mu^{-3} Z_C^\dagger \partial^\mu Z_B & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

となる。ここで、 $R_\mu^p \equiv \sum_{a=1}^2 \alpha_a^q A_\mu^a$  と定義した。具体的に書くと、

$$\begin{aligned} R_\mu^{\pm 1} &= \pm \sqrt{2} A_\mu^1 = \mp i \left( Z_A^\dagger \partial_\mu Z_A - Z_B^\dagger \partial_\mu Z_B \right), \\ R_\mu^{\pm 2} &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \left( A_\mu^1 + \sqrt{3} A_\mu^2 \right) = \mp i \left( Z_C^\dagger \partial_\mu Z_C - Z_A^\dagger \partial_\mu Z_A \right), \\ R_\mu^{\pm 3} &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -A_\mu^1 + \sqrt{3} A_\mu^2 \right) = \mp i \left( Z_B^\dagger \partial_\mu Z_B - Z_C^\dagger \partial_\mu Z_C \right), \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

である。したがって、(4.3.7) と (4.3.8) より、(4.3.6) から方程式

$$\begin{aligned} \partial^\mu \left( Z_B^\dagger \partial_\mu Z_A \right) + \left( Z_B^\dagger \partial^\mu Z_B - Z_A^\dagger \partial^\mu Z_A \right) Z_B^\dagger \partial_\mu Z_A &= 0, \\ \partial^\mu \left( Z_C^\dagger \partial_\mu Z_A \right) + \left( Z_C^\dagger \partial^\mu Z_C - Z_A^\dagger \partial^\mu Z_A \right) Z_C^\dagger \partial_\mu Z_A &= 0, \\ \partial^\mu \left( Z_C^\dagger \partial_\mu Z_B \right) + \left( Z_C^\dagger \partial^\mu Z_C - Z_B^\dagger \partial^\mu Z_B \right) Z_C^\dagger \partial_\mu Z_B &= 0, \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

とそれらの複素共役を得る。これらの方程式に (4.1.20) と 1 形式 (4.1.22) を代入し、整理すると

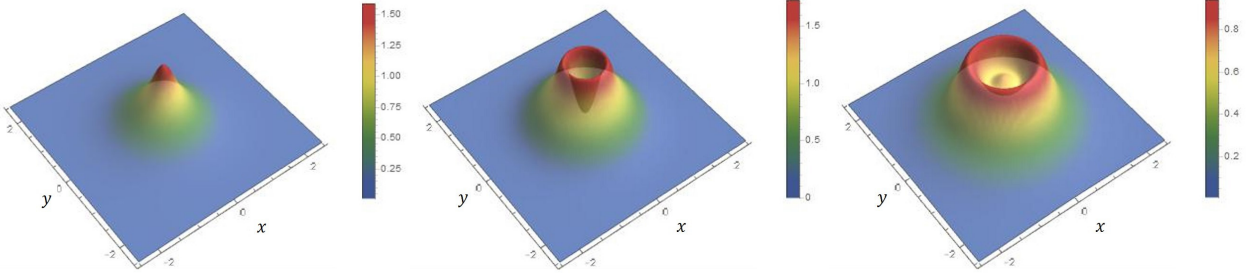


図 4.1: 解  $(u_1, u_2, u_3) = (z^{n_1}, z^{n_2}, \frac{n_2}{n_1} z^{n_2-n_1})$  のもつトポロジカルチャージ密度。左から  $(n_1, n_2) = (1, 2), (1, 3), (2, 3)$  に対応している。

複素スカラー場で記述された方程式

$$\begin{aligned} \Delta_1 \Delta_2 (P_{11} \partial^\mu \partial_\mu u_1 + P_{12} \partial^\mu \partial_\mu u_2) - 2\Delta_2 (P_{11} \partial_\mu u_1 + P_{12} \partial_\mu u_2) (u_1^* \partial^\mu u_1 + u_2^* \partial^\mu u_2) \\ - \Delta_1 [P_{32}^* (u_3^* \partial^\mu u_1^* - \partial^\mu u_2^*) - P_{33}^* \partial^\mu u_3^*] (u_3 \partial^\mu u_1 - \partial^\mu u_2) = 0, \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 \Delta_2 (P_{21} \partial^\mu \partial_\mu u_1 + P_{22} \partial^\mu \partial_\mu u_2 - \partial^\mu u_3 \partial_\mu u_1) \\ - (P_{21} \partial_\mu u_1 + P_{22} \partial_\mu u_2) [\Delta_2 \{u_1^* \partial^\mu u_1 + u_2^* \partial^\mu u_2\} \\ + \Delta_1 \{(u_1^* u_3^* - u_2^*) \partial^\mu (u_1 u_3 - u_2) + u_3^* \partial^\mu u_3\}] = 0, \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 \Delta_2 \{P_{31} \partial^\mu \partial_\mu u_1 + P_{32} \partial^\mu \partial_\mu u_2 + P_{33} \partial^\mu \partial_\mu u_3 - 2P_{32} \partial_\mu u_1 \partial^\mu u_3\} \\ - 2\Delta_1 (P_{31} \partial_\mu u_1 + P_{32} \partial_\mu u_2 + P_{33} \partial_\mu u_3) \{(u_1^* u_3^* - u_2^*) \partial^\mu (u_1 u_3 - u_2) + u_3^* \partial^\mu u_3\} \\ - \Delta_2 [P_{11}^* \partial_\mu u_1^* + P_{12}^* \partial_\mu u_2^*] (u_3 \partial^\mu u_1 - \partial^\mu u_2) = 0, \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

が得られる。ここで、 $\Delta_1, \Delta_2$  と  $P_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) のあらわな形はそれぞれ (4.1.21) と (4.1.23) で与えられている。

これらの方程式は、非常に複雑であるため、 $u_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) に対する ansatz を導入する。ここでは、すべての複素スカラー場が  $z_+$  と  $y_+$  の関数であると仮定する。すなわち、

$$u_i = u_i(z_+, y_+), \quad u_i^* = u_i^*(z_-, y_+). \quad (4.3.14)$$

を考える。ここで、 $z_\pm = x^1 \pm ix^2$ ,  $y_\pm = x^3 \pm x^0$  である。この ansatz は

$$\partial^\mu \partial_\mu u_i = 0, \quad \partial^\mu u_i \partial_\mu u_j = 0 \quad (4.3.15)$$

を満たしている。この関係式 (4.3.15) より、(4.3.14) が (4.3.12) を自動的に満たしていることがわかる。さらに、(4.3.11) と (4.3.13) は、それぞれ

$$[P_{32}^* (u_3^* \partial^\mu u_1^* - \partial^\mu u_2^*) + \Delta_1 \partial^\mu u_3^*] (u_3 \partial_\mu u_1 - \partial_\mu u_2) = 0, \quad (4.3.16)$$

$$[P_{11}^* \partial^\mu u_1^* + P_{12}^* \partial^\mu u_2^*] (u_3 \partial_\mu u_1 - \partial_\mu u_2) = 0. \quad (4.3.17)$$

と簡略化される。ゆえに、もし複素スカラー場 (4.3.14) が

$$u_3 \partial_\mu u_1 - \partial_\mu u_2 = 0, \quad (4.3.18)$$

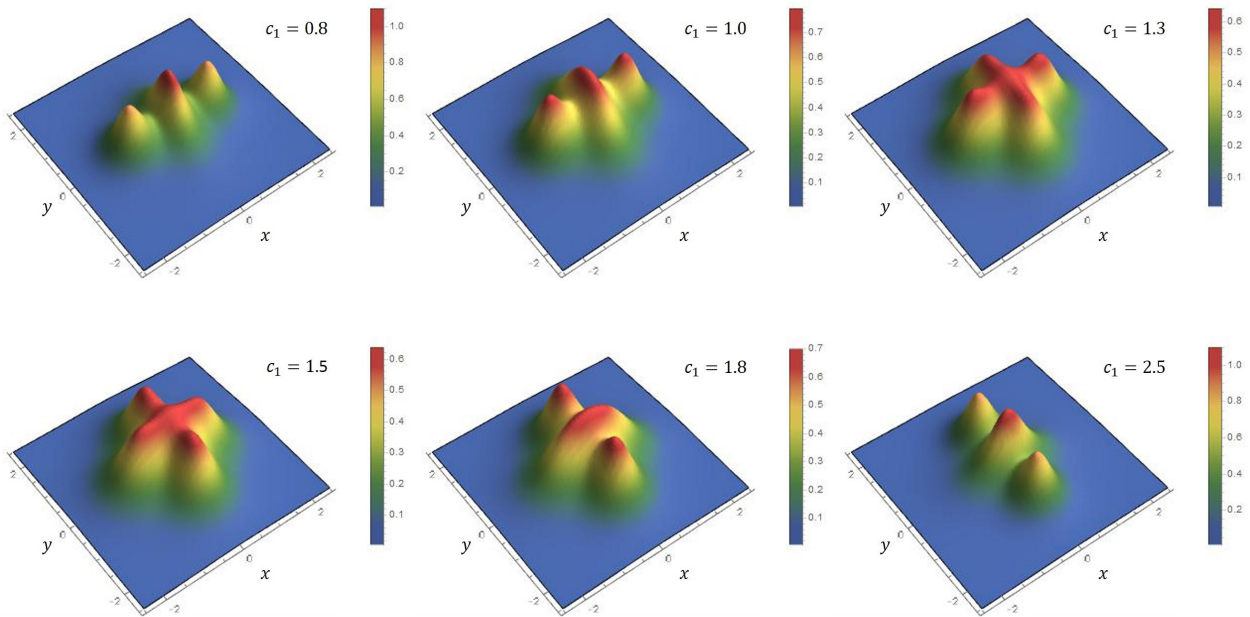


図 4.2: 解  $(u_1, u_2, u_3) = (c_1 z, z^2 - 1, 2z/c_1)$  のもつトポロジカルチャージ密度。左上から右下へ  $c_1 = 0.8, 1.0, 1.3, 1.5, 1.8, 2.5$  のようにパラメータを変化させた。

を満たせば、Euler-Lagrange 方程式 (4.3.11) - (4.3.13) が厳密に解けることになる。

まず、静的な場合から考えていく。すなわち、複素スカラー場がすべて  $z_+$  の関数である場合である。ただし、もし3つの複素スカラー場のうち1つでも定数であると、真空解が単純な埋め込み解になってしまうので、ここではそのような配位は考えないことにする。そのとき、場の1価性を考慮すると、(4.3.18) の解は次のように得られる：

$$u_1 = \frac{p_1(z_+)}{q_1(z_+)}, \quad u_2 = \frac{p_2(z_+)}{q_2(z_+)}, \quad u_3 = \frac{\partial_+ u_2}{\partial_+ u_1} \quad (4.3.19)$$

ここで、 $p_i(z_+)$  と  $q_i(z_+)$  は互いに素な  $z_+$  の多項式であり、 $u_1$  と  $u_2$  は比例しないものとする。また、 $\partial_{\pm} = \frac{1}{2}(\partial_1 \pm i\partial_2)$  である。

複素スカラー場  $u_i$  の巻き数は、無限遠を含む極の数に一致するので、

$$n_i = \max\{\deg(p_i), \deg(q_i)\}, \quad i = 1, 2 \quad (4.3.20)$$

$$n_3 = n_2 - n_1.$$

と与えられる。さらに、複素ベクトルの巻き数  $N_A$  と  $N_C$  は、 $CP^2$  非線型シグマ模型におけるトポロジカルチャージの導出法 [56] により、次のように得られる：

$$N_A = \max(0, n_1, n_2) - \min(0, n_1, n_2), \quad (4.3.21)$$

$$N_C = \max(-n_2, -n_3, 0) - \min(-n_2, -n_3, 0). \quad (4.3.22)$$

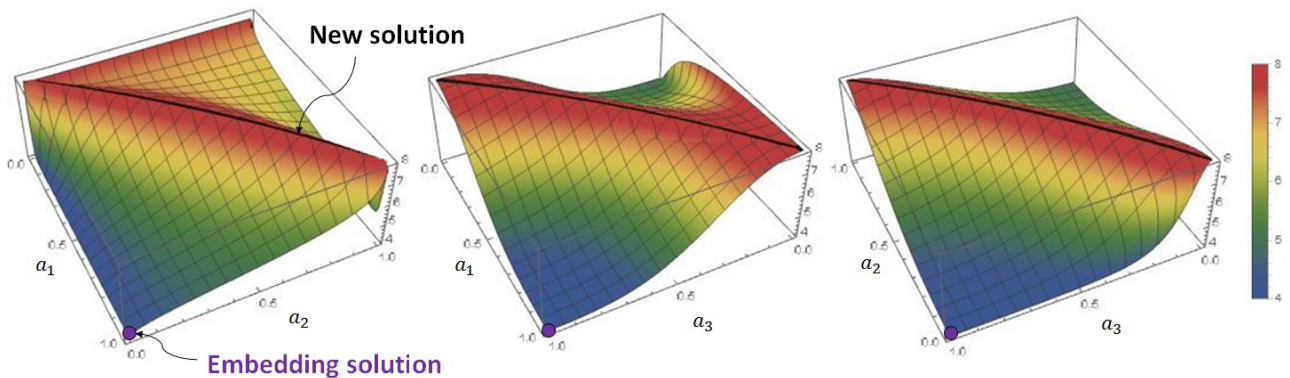


図 4.3: 配位  $u_1 = \frac{1-a_1}{a_1}z^3, u_2 = \frac{1-a_2}{a_2}z^4, u_3 = \frac{1-a_3}{a_3}z$  のエネルギー変化。左から順に  $a_3 = 0.5, a_2 = 0.5, a_1 = 0.5$  と固定してある。

巻き数  $(N_A, N_C)$  の取りうる組み合わせを表 4.1 にまとめる。表からわかるように、 $(N_A, N_C)$  は逆符号で、同じ複素スカラー場の巻き数で与えられる。

静的な解 (4.3.19) の最も単純なものは

$$u_1 = c_1 z^{n_1}, \quad u_2 = c_2 z^{n_2}, \quad u_3 = \frac{c_2 n_2}{c_1 n_1} z^{n_2 - n_1} \quad (4.3.23)$$

だろう。ここで、 $c_i$  はゼロでない複素定数である。この解がもつ位相不変量の密度を図 4.1 に表す。巻き数が  $(n_1, n_2) = (1, 2)$  のとき、原点にピークを持っていることがわかる。一方で、巻き数が大きくなると、クレーター (crater) のような構造を持つようになる。他にも、軸対称性を持たない解も存在する。たとえば、

$$u_1 = c_1 z, \quad u_2 = z^2 - 1, \quad u_3 = \frac{2}{c_1} z \quad (4.3.24)$$

である。この解の位相不変量の密度は、図 4.2 に表されている。モジュライパラメータ  $c_1$  を連続的に変化させることで、解を構成する塊の衝突と直角方向への散乱が観察できる。

次に、時間依存する解について考える。解の ansatz として、 $CP^N$  非線型シグマ模型の時間発展する解の構成法 [36, 24, 68] にしたがって、次のような変数分離された関数を考える：

$$u_i = f_i(z_+) w_i(y_+), \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.3.25)$$

ここで、 $f_i(z_+)$  は  $x^1 x^2$  平面に局在する要素を、 $w_i(y_+)$  は  $x^3$  軸に沿って光速で伝播する波を記述している。ここで、 $f_i$  や  $w_i$  が定数のときには、すでに得られている解になってしまうことに再度注意しておく。すべての  $f_i$  と  $w_i$  が定数でないとき、時間依存する ansatz を (4.3.18) に代入すると、次の条件を得る：

$$f_2 = \alpha f_1^C, \quad f_3 = \alpha A f_1^{C-1}, \quad (4.3.26)$$

$$w_2 = \beta w_1^C, \quad w_3 = \beta B w_1^{C-1} \quad (4.3.27)$$

ここで、 $\alpha, \beta$  はゼロでない複素定数、 $A, B$  はゼロでない実定数で、便宜上  $C = A/B$  と書いた。 $w_1$  を平面波  $e^{in_1 k y_+}$  とすれば、単位長さ当たりのエネルギーを有限に保たれる。ここで、 $k$  は波

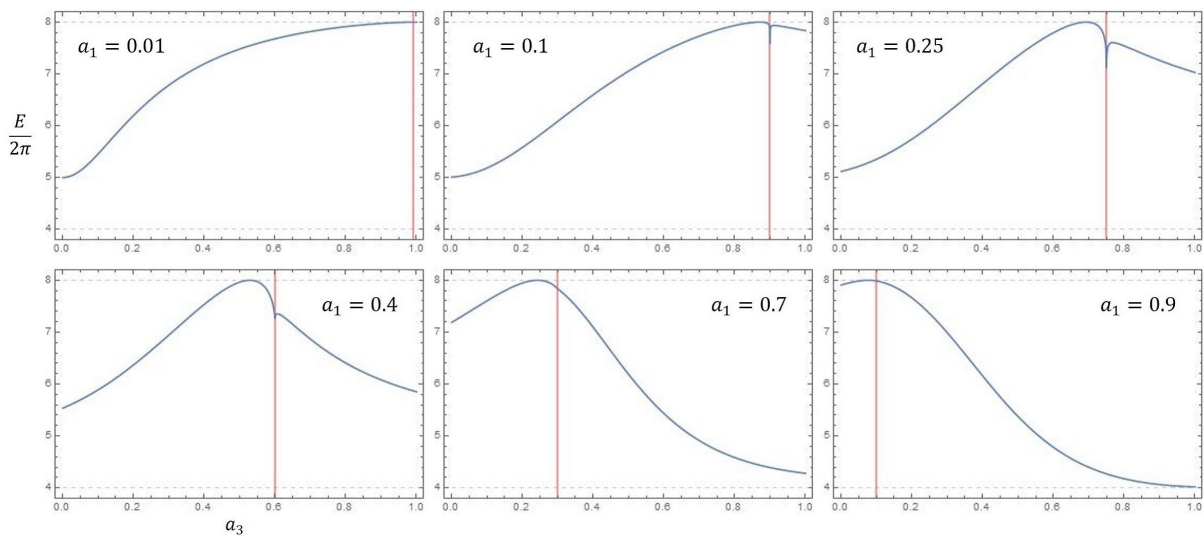


図 4.4: 図 4.3 ( $a_2 = 0.5$ ) の断面図。赤い線は、トポロジカルな理由により、禁止されている  $u_1 u_3 = u_2$  が満たされる場所を表している。この禁止される場所の付近に極大値が現れているように見えるが、それは実際には停留点ではないことに注意する。

数の逆数に比例する定数である。したがって、場の 1 価性と単位長さ当たりのエネルギーの有限性を保つ解は、たとえば

$$\begin{aligned}
 u_1 &= c_1 z^{n_1} e^{in_1 k y_+}, \\
 u_2 &= c_2 z^{n_2} e^{in_2 k y_+}, \\
 u_3 &= \frac{c_2 n_2}{c_1 n_1} z^{n_2 - n_1} e^{i(n_2 - n_1) k y_+}
 \end{aligned} \tag{4.3.28}$$

と得られる。

解の構造について特筆すべきことは、 $Z_A, Z_B, Z_C$  がそれぞれ、 $CP^2$  非線型シグマ模型の Din-Zakrzewski 解 [23, 69] に対応していることである。方程式 (4.3.18) の下で、複素スカラー場で記述された複素ベクトル (4.1.20) の間に関係がつく。その関係とは、 $D_\mu^{(A)} Z_A$  が  $Z_B$  に比例し、同様に  $D_\mu^{(B)} Z_B$  が  $Z_C$  に比例する。もし、 $Z_A$  が正則ベクトルならば、それらの複素ベクトルは Bäcklund 変換によって構成された  $CP^2$  非線型シグマ模型の Din-Zakrzewski タワーになっている。この対応関係より、解 (4.3.19) や (4.3.28) に対して、 $Z_A$  はインスタントン、 $Z_C$  は反インスタントン、そして  $Z_B$  はインスタントン-反インスタントンの結合状態と解釈することができる。したがって、これらの解 (4.3.19) や (4.3.28) はソリトンと反ソリトンを両方含んでいることがわかる。

同様の種類の解は、すでに [63] において議論されている。しかし、その論文で用いられている模型は、Kalb-Ramond 場を含んでいる。Kalb-Ramond 場は一般に運動方程式に寄与し、その筆者は Kalb-Ramond 場の存在のおかげで解が得られたと主張している。我々は、Kalb-Ramond 場を考慮しなくとも、解が存在することを示した。さらに、 $F_2$  非線型シグマ模型における時間発展する解を初めて導出することができた。

## 4.4 解の持つエネルギーの特性

この節では、静的な解 (4.3.19) と時間依存する解 (4.3.28) のエネルギーがもつ特性について議論する。静的な解に対しては、解が Bogomol'nyi バウンド (4.2.6) とは異なるエネルギーの下限を満たすことを示す。そして、解がそのバウンドを満たす条件である連立1階微分方程式から得られることを導く。一方で、時間依存する解に対しては、そのエネルギーが位相不変量と、ある  $U(1)$  対称性に起因する Noether チャージで与えられることを示す。

まず、静的な解の議論を行う。新たなエネルギーバウンドを得るために、共変微分を用いてエネルギー汎関数を書き換える。4.2節では、3つの共変微分を用いてエネルギーを記述したが、ここでは2つの共変微分を用いて記述する。すなわち、次の表式を考える：

$$E = \int d^2x \left( \left| D_i^{(A)} Z_A \right|^2 + \left| D_i^{(C)} Z_C \right|^2 - \left| Z_C^\dagger \partial_i Z_A \right|^2 \right). \quad (4.4.1)$$

これは、(4.2.2) と (4.2.3) より、(4.2.1) から得られる。ここで、(4.4.1) の1項目と2項目はそれぞれ、 $CP^2$  非線型シグマ模型の静的なエネルギーと一致しているので、この2項に  $CP^2$  非線型シグマ模型の BPS の議論を適用する。つまり、平方完成をすることで、

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \int d^2x \left| D_i^{(A)} Z_A \mp i\varepsilon^{ij} D_j^{(A)} Z_A \right|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \int d^2x \left| D_i^{(C)} Z_C \mp i\varepsilon^{ij} D_j^{(C)} Z_C \right|^2 \\ &\quad \pm i \int d^2x \varepsilon^{ij} \left\{ \left( D_i^{(A)} Z_A \right)^\dagger D_j^{(A)} Z_A + \left( D_i^{(C)} Z_C \right)^\dagger D_j^{(C)} Z_C \right\} \\ &\quad - \int d^2x \left| Z_C^\dagger \partial_i Z_A \right|^2 \\ &\geq 2\pi (|N_A| + |N_C|) - \int d^2x \left| Z_C^\dagger \partial_i Z_A \right|^2 \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

とエネルギーの下限が得られる。 $CP^2$  非線型シグマ模型の議論より、(4.4.2) の等号はすべての複素スカラー場  $u_i$  が  $z_+$  (もしくは  $z_-$ ) の関数、つまり  $u_i = u_i(z_+)$  のときに満たされる。静的な解 (4.3.19) は正則関数なので、明らかに新たなバウンド (4.4.2) を満たしている。さらに、(4.3.18) の解は、 $Z_C^\dagger \partial_i Z_A \propto u_3 \partial_i u_1 - \partial_i u_2 = 0$  を満たしているので、下限に含まれている積分項の被積分関数をゼロにする。ゆえに、静的な解 (4.3.19) のエネルギーは

$$E = 2\pi (|N_A| + |N_C|) = 2\pi Q \quad (4.4.3)$$

と得られる。これは、同じホモトピークラスに属する埋め込み解のちょうど2倍になっている。それは、静的な解 (4.3.19) がインスタントンだけでなく、インスタントン-反インスタントンの結合状態を含んでいるためである。実際、 $CP^2$  非線型シグマ模型においても、1インスタントン-1反インスタントンの結合状態はインスタントン解の2倍のエネルギーを持っていることが知られている [70]。

静的な解 (4.3.19) が1階の連立微分方程式で得られることを議論する。実際、静的な解 (4.3.19) は BPS 方程式

$$\begin{aligned} D_i^{(A)} Z_A &= -i\varepsilon^{ij} D_j^{(A)} Z_A, \\ D_i^{(C)} Z_C &= i\varepsilon^{ij} D_j^{(C)} Z_C \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

を満たしている。これは、複素スカラー場に対する Cauchy-Riemann 方程式に対応する。したがって、新たなバウンド (4.4.2) を満たす。ただし、(4.4.2) は、通常 Bogomol'nyi バウンドと異なりトポロジカルな量で与えられていないことに注意する。なぜならば、(4.4.2) の最後の項はトポロジカルではないからである。ゆえに、バウンドを満たしても運動方程式の解であるとは、一般に言うことができない。しかし、静的な解 (4.3.19) は (4.4.4) だけでなく、

$$Z_C^\dagger \partial_i Z_A = 0 \quad (4.4.5)$$

も満たしている。ここで、(4.4.5) は (4.3.18) と同値であることに注意する。これは、下限の中の積分項が最小値をとる条件である。なぜならば、積分項の被積分関数は半正定値であるからである。バウンドを満たしつつ、積分項が最小値を取るとき、エネルギーはマクシミン (maxmin) つまり極小値の中の最大になり、鞍点に対応する。したがって、その配位は Euler-Lagrange 方程式の解になる。ゆえに、(4.4.2) は 1 階の微分方程式 (4.4.4) と (4.4.5) から得られると結論付けられる。

静的な解 (4.3.19) が、実際にエネルギー汎関数の鞍点に対応することを示す。そこで、配位の持つパラメータを変化させて、エネルギーの値がどのように変化するかを観察し、解の安定性を議論する。次のような配位を考える：

$$u_1 = \frac{1 - a_1}{a_1} z^3, \quad u_2 = \frac{1 - a_2}{a_2} z^4, \quad u_3 = \frac{1 - a_3}{a_3} z \quad (4.4.6)$$

ここで、 $a_i \in [0, 1]$  はパラメータである。この配位のエネルギーを図 4.3 に描く。我々が新たに得た解は、曲面の稜線に対応する。一方で、埋め込み解は各図の左前の角に対応する。この図 4.3 から、解は稜線に沿ったゼロモードが存在するが、本質的には鞍点であり、不安定であることがわかる。

我々の得た鞍点解は埋め込み解に崩壊してしまうのかという疑問を持つことは自然だろう。これを理解するために、図 4.3 の曲面の断面を、 $a_2 = 0.5$  と固定して、いくつかの  $a_1$  の値について図 4.4 に表す。図 4.4 より、 $u_1 u_3 = u_2$  が満たされる場所でエネルギーが不連続になっていることがわかる。この不連続性は境界条件が変化してしまっていることに起因している。 $u_1 u_3 = u_2$  または  $u_2 = 0$  でないとき、複素スカラー場が (4.4.6) で与えられるベクトル  $Z_a$  は  $x^1 x^2$  平面の無限遠において、(位相部分を除いて) 次の境界条件に従う：

$$Z_A \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Z_B \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Z_C \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.4.7)$$

しかし、 $u_1 u_3 = u_2$  または  $u_2 = 0$  の場合、境界条件 (4.4.7) を満たさない。そして、その配位は鞍点解や埋め込み解と異なったホモトピークラスに属する。そのことは、それらの解から  $u_1 u_3 = u_2$  や  $u_2 = 0$  を満たす配位へ、エネルギーを有限に保ちながら連続的に変形することができないことを示唆している。このトポロジカルな障壁は、鞍点解と埋め込み解の間に存在していることに注意する。

表 4.1 におけるすべての領域の配位に対して、そのような障壁が鞍点解と埋め込み解の間に存在する。上で行った議論は、表の領域  $i$  と  $ii$  に対応している。領域  $iv$  と  $v$  に対しては、 $u_1 u_3 = u_2$  を満たす配位は解が満たす原点での境界条件を破る。この場合は、同様にして

$u_1 u_3 = u_2$  で表される障壁が、鞍点解と埋め込み解の間に存在することが容易に示すことができる。領域 *iii.* と *vi.* はより複雑である。簡単のため、 $u_i = c_i z_+^{n_i}$  という配位を考える。ただし、領域 *iii.* と *vi.* に属するために、 $n_1 n_3 < 0$  を満たし、 $n_2 = n_1 + n_3$  とする。その領域において、鞍点解は  $c_1 c_2 c_3 < 0$  の範囲に存在する。一方で、埋め込み解は  $c_1 = c_2 c_3$  を満たしながら、 $c_1, c_2 \rightarrow \infty$  とすると得られる。したがって、 $c_1 c_2 c_3 > 0$  である。それゆえに、鞍点解から埋め込み解へ変形する間に、少なくとも係数  $c_i$  のどれかはゼロを跨がなければならない。しかしながら、1つでも  $c_i = 0$  が満たされると解の境界条件が破れてしまう。したがって、障壁がこれらの解の間に存在する。トポロジカル障壁の存在は、少なくとも配位 (4.4.6) の持つパラメータの変化によって記述される連続変形の枠組みでは、鞍点解が埋め込み解へ崩壊しないと示唆しているだろう。

また、図 4.3 において、鞍点解に対応する稜の奥側へ崩壊する可能性があると考えられるかもしれない。しかし、それは偽りの極小である。つまり、1つのパラメータを固定しているために極小に見えているだけであり、3つのパラメータをすべて変化させれば、バリアを除いて埋め込み解へとつながっている。したがって、鞍点解は不安定であるが、どこへ崩壊するのか理解するには、数値計算によるエネルギー極小化など別の枠組みを考える必要があるだろう。

次に、伝播する波の成分を持つ解 (4.3.28) を考える。(4.3.28) のもつエネルギーは

$$E_{\text{wave}} = 2\pi Q + 8\pi k^2 \left\{ \mathcal{I}(n_1, n_2, c_1, c_2) + \mathcal{I}(n_2 - n_1, n_2, \frac{c_2 n_2}{c_1 n_1}, \frac{c_2(n_2 - n_1)}{c_1 n_1}) \right\} \quad (4.4.8)$$

と書ける。ここで、

$$\mathcal{I}(n, m, a, b) = \int_0^\infty r dr \frac{n^2 |ar^n|^2 + m^2 |br^m|^2 + (n - m)^2 |abr^{n+m}|^2}{(1 + |ar^n|^2 + |br^m|^2)^2} \quad (4.4.9)$$

である。ただし、 $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}$  であり、 $n \neq m$ ,  $a, b \neq 0$  とする。 $r$  の次数を数えることで、積分 (4.4.9) が収束するのは次の場合であることがわかる：

$$\begin{aligned} n > 1 + m > 1, & \quad n > 1, m < 0, & \quad -1 > n > m, \\ m > 1 + n > 1, & \quad m > 1, n < 0, & \quad -1 > m > n. \end{aligned}$$

エネルギー (4.4.8) が発散/収束する巻き数の組み合わせを図 4.5 に示す。

エネルギー (4.4.8) は、複素スカラー場に関する対称性による Noether チャージを用いて記述できる。ラグランジアン (4.1.14) は、次のような複素スカラーの変換に対応する  $U(1)^2$  対称性を持っている：

$$(u_1, u_2, u_3) \rightarrow (e^{i\alpha_1} u_1, u_2, e^{-i\alpha_1} u_3), \quad (4.4.10)$$

$$(u_1, u_2, u_3) \rightarrow (u_1, e^{i\alpha_2} u_2, e^{i\alpha_2} u_3) \quad (4.4.11)$$



ここで,  $\alpha_i, i = 1, 2$  は定数とする。この対称性に対応する Noether カレントは

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{(1)}^\mu &= \frac{4i}{\Delta_1^2} [(1 + |u_2|^2)u_1\partial^\mu u_1^* - |u_1|^2u_2\partial^\mu u_2^*] \\ &\quad - \frac{4i}{\Delta_2^2} [(1 + |u_1u_3 - u_2|^2)u_3\partial^\mu u_3^* - |u_3|^2(u_1u_3 - u_2)\partial^\mu(u_1^*u_3^* - u_2^*)] \\ &\quad - \frac{i}{\Delta_1\Delta_2} u_1u_3(u_3^*\partial^\mu u_1^* - \partial u_2^*) \\ &\quad - \{u_i \leftrightarrow u_i^*\}, \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{(2)}^\mu &= \frac{4i}{\Delta_1^2} [(1 + |u_1|^2)u_2\partial^\mu u_2^* - |u_2|^2u_1\partial^\mu u_1^*] \\ &\quad + \frac{4i}{\Delta_2^2} [(1 + |u_3|^2)(u_1u_3 - u_2)\partial^\mu(u_1^*u_3^* - u_2^*) - |u_1u_3 - u_2|^2u_3\partial^\mu u_3^*] \\ &\quad + \frac{i}{\Delta_1\Delta_2} u_2(u_3^*\partial^\mu u_1^* - \partial u_2^*) \\ &\quad - \{u_i \leftrightarrow u_i^*\}. \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

と与えられる。単位長さあたりの Noether チャージを

$$Q_{(i)} = \int dx^2 \mathcal{J}_{(i)}^0. \quad (4.4.14)$$

と定義する。そのとき, 時間依存する解 (4.3.28) のエネルギー (4.4.8) は

$$E = 2\pi Q + k(n_1Q_{(1)} + n_2Q_{(2)}). \quad (4.4.15)$$

と書くことができる。

## 4.5 幾何学的解釈

我々の得た解について, ターゲット空間  $F_2$  の幾何学的視点から解釈をする。

一般に,  $S^2$  からある多様体  $\mathcal{M}$  への写像は,  $\mathcal{M}$  内の 2次元閉曲面を定義する。この写像のホモトピー群  $\pi_2(\mathcal{M})$  が非自明であることは,  $\mathcal{M}$  の中に  $S^2$  に homotopic であり, 可縮ではない部分多様体が存在することを示している [61]。したがって,  $F_2$  非線型シグマ模型の場が表す写像  $S^2 \rightarrow F_2$  は,  $F_2$  内の 2次元閉曲面を定義しており,  $\pi_2(F_2)$  が非自明なので,  $F_2$  に  $S^2$  とトポロジカルに等価であり, 可縮でない部分多様体が存在する。場が空間から可縮ではない (部分) 多様体への写像に対応しているとき, トポロジカルに安定な配位が現れる可能性があるので,  $F_2$  非線型シグマ模型におけるソリトンを表す場は, 空間からその部分多様体への写像になっているはずである。実際, 単純な埋め込み解 (4.2.8) は, 位相不変量で与えられるエネルギーの下限を持っているので, 真空解へ崩壊してしまふことはない。さらに, 鞍点解 (4.3.19) は, 不安定であったが, トポロジカルな障壁があり, 真空解だけでなく単純な埋め込み解へも崩壊することはない。これは, 写像の非可縮性によるものだと理解できる。

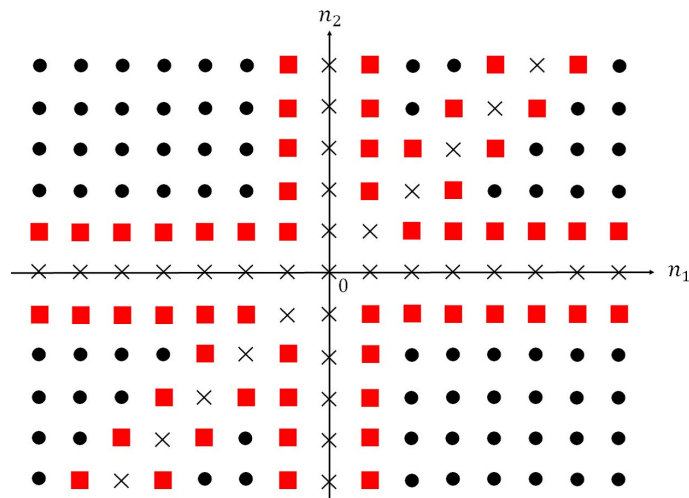


図 4.5: 巻き数  $(n_1, n_2)$  の組み合わせと式 (4.3.28) で与えられる解のエネルギーの関係性。赤い四角は単位長さあたりのエネルギーが発散する組み合わせを示しており、黒い丸は有限なエネルギーを持つ解が存在する組み合わせである。また、 $\times$  は埋め込み解しか存在しない組み合わせを示している。

さらに、以下で見るように、ソリトン解はその部分多様体が Kähler 多様体であるときに得られたことがわかる。多様体  $F_2$  の持つ Kähler 形式は、一般に次のように与えられる [64, 67]:

$$\lambda = \frac{i}{2} (B_1 J^1 \wedge J^{-1} + B_2 J^2 \wedge J^{-2} + B_3 J^3 \wedge J^{-3}) \quad (4.5.1)$$

ここで、 $B_p$  は任意の実数である。1 形式  $J^p$  は式 (4.1.11) で与えられている。Kähler 形式 (4.5.1) が閉形式、すなわち  $d\lambda = 0$  ならば、多様体は Kähler 多様体になる。Kähler 形式 (4.5.1) の外微分は、

$$d\lambda = \frac{1}{2\pi} (B_1 + B_2 + B_3) (J^1 \wedge J^2 \wedge J^3 + J^{-1} \wedge J^{-2} \wedge J^{-3}) \quad (4.5.2)$$

と書ける。任意の係数  $B_p$  に対して、 $d\lambda = 0$  が成り立つには、

$$\text{Re} (J^1 \wedge J^2 \wedge J^3) = 0 \quad (4.5.3)$$

である必要がある。  $T = d\lambda$  は、skew torsion と呼ばれる [67] ため、本論文では (4.5.3) を torsion free 条件と呼ぶ。以上の議論から、torsion free 条件を満たす場合は、空間から  $F_2$  の Kähler 部分多様体への写像を定義している。単純な埋め込み解 (4.2.8) は、 $dZ_B = 0$  より、

$$J^1 = -iZ_A^\dagger dZ_B = 0 \quad (4.5.4)$$

を満たすため、明らかに torsion free 条件を満たしている。一方で、鞍点解 (4.3.19) は、

$$J^2 = -iZ_C dZ_A \propto u_3 du_1 - du_2 = 0 \quad (4.5.5)$$

を満たしているため、こちらも torsion free 条件を満たしている。したがって、Euler-Lagrange 方程式を満たす場の配位は、空間  $S^2$  から、 $S^2$  とトポロジカルに等価である Kähler 多様体への写像を定義している。この写像の巻き数は、Kähler 形式の引き戻しによって自然に定義できる。

Torsion free 条件は、ダイナミカルな条件ではなく、幾何学的な条件であることに注意する。すなわち、模型の詳細にはよらず、ターゲット空間  $F_2$  の性質から得られる条件である。したがって、模型にポテンシャルや Skyrme 項などの相互作用項を加えても、ソリトン解は torsion free 条件を満たす配位によって得られると予想される。後の 2 章では、この仮説に基づき、 $F_2$  非線型シグマ模型に相互作用を加えた模型において、torsion free 条件のもとで解の構築を行う。

## 4.6 4章のまとめ

この章では、 $F_2$  非線型シグマ模型における静的なインスタントン解および時間発展する解を、Euler-Lagrange 方程式を解析的に解くことで導出した。これまで、純粋な  $F_2$  非線型シグマ模型には、単純な埋め込み解しか知られていなかった。この単純な埋め込み解は、BPS の方法を用いて得られている。従来の BPS の方法では、単純な埋め込み解しか得ることができないため、我々は Euler-Lagrange 方程式を解くことでより一般的な解の導出を行った。Euler-Lagrange 方程式は、模型を記述する複素スカラー場すべてが（反）正則関数で、かつ 1 つの関係式 (4.3.18) を満たせば得ることができた。

静的な配位のエネルギーには下限が存在し、静的な解は、その下限を満たす条件と関係式 (4.3.18) の 1 階の連立微分方程式を解くことでも得られることがわかった。ここで、このエネルギーの下限はトポロジカルな項で与えられていないため、従来の Bogomol'nyi バウンドとは性質が異なり、その下限を満たす配位すべてが、Euler-Lagrange 方程式を満たすわけではないことに注意する。さらに、解はエネルギーの鞍点に対応しており、不安定であった。したがって、この解はエネルギーの下限を満たしている点では BPS 解であるが、鞍点解である。我々の知る限りでは、このようなソリトン解はこれまで知られていない。時間発展する解は、静的なインスタントン解の配位と  $x^3$  方向に光速で伝播する平面波の成分の変数分離形で与えられる。この解のエネルギーは、ソリトン数を表す位相不変量と 2 つの  $U(1)$  変換に関する Noether チャージで与えられる。以上の 2 つの解は、共に  $CP^2$  非線型シグマ模型における Din-Zakrzewski 解と関係があり、インスタントン-反インスタントの結合状態であることがわかった。

ターゲット空間  $F_2$  のもつ幾何学的な性質を通して、得られた解のもつ特性の理解をした。鞍点解を得るための関係式 (4.3.18) を満たした配位は、空間  $S^2$  から、ターゲット空間  $F_2$  内の  $S^2$  とトポロジカルに等価である Kähler 多様体への写像を定義していることがわかった。このことより、条件 (4.3.18) は、写像のもつ幾何学的な条件であり、模型に含まれる相互作用の性質とは関係のないと言える。そのため、 $F_2$  非線型シグマ模型に相互作用を加えた模型においても、ソリトン解は (4.3.18) のもとで得ることができると考えられる。

# 第5章 $F_{N-1}$ baby Skyrme 模型における baby skyrmion

前章では、 $F_2$  非線型シグマ模型にインスタントン解が存在することを示した。ここでは、 $F_2$  baby Skyrme 模型すなわち、2+1 次元時空上で定義された  $F_2$  非線型シグマ模型にポテンシャルと Skyrme 項を加えた模型を考える。ポテンシャルと Skyrme 項は、Derrick の非存在定理を避けつつ、非線型シグマ模型がもつスケール不変性を破るために導入する。また、Skyrme 項は、基礎理論から非線型シグマ模型を導出する際、高次補正項として現れると考えられるので、主要項の非線型シグマ模型だけでなく、次のオーダーまで取り入れることで、有効模型としてより良い近似を与えることになるはずである。

前章で、 $F_2$  非線型シグマ模型のインスタントン解は、場が定義する写像に対する幾何学的な条、すなわち torsion free 条件を満たしていた。torsion free 条件は、ダイナミカルな条件ではないため、模型にポテンシャルや Skyrme 項が加わっても、その解は torsion free 条件を満たすと予想できる。その仮説のもと、我々は torsion free 条件を満たす配位を考え、その配位に対する Euler-Lagrange 方程式を解くことにする。

## 5.1 ラグランジアンと静的なエネルギー

まず模型のラグランジアンを定義する。 $F_2$  baby Skyrme 模型は、三角格子上の  $SU(3)$  反強磁性ハイゼンベルグ模型の連続極限において導出できると考えられる。しかし、 $SU(3)$  ハイゼンベルグ模型の連続極限からは、主要項である  $F_2$  非線型シグマ模型しか導出されていない [5]。そのため、適切な高次微分項を ( $CP^1$ ) baby Skyrme 模型の高次微分項から予測・拡張して導入する。Baby Skyrme 模型のもつ 4 次微分項は

$$\mathcal{L}_4^{(CP^1)} \propto (\partial_\mu \vec{n} \times \partial_\nu \vec{n})^2 \quad (5.1.1)$$

であった。この項を、拡張するため、カラー場を用いて記述する。なぜならば、一般化のためには、模型の対称性を適切に取り扱うことが大切であり、カラー場を用いた記述が、最も対称性が明確だからである。 $CP^1$  空間上に値をとるカラー場は、 $\mathbf{n}^{(CP^1)} = \vec{n} \cdot \vec{\tau}$  と定義できる。ここで、 $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$  は Pauli 行列である。カラー場はリー代数  $su(2)$  に値をとるので、 $\mathbf{n}^{(CP^1)} = W\tau_3W^\dagger$  となる  $W \in SU(2)$  が存在する。このカラー場を用いると、

$$(\partial_\mu \vec{n} \times \partial_\nu \vec{n})^2 = 4F_{\mu\nu}^2 \quad F_{\mu\nu} = -\frac{i}{2} \text{Tr} \left( \mathbf{n}^{(CP^1)} \left[ \partial_\mu \mathbf{n}^{(CP^1)}, \partial_\nu \mathbf{n}^{(CP^1)} \right] \right) \quad (5.1.2)$$

と書ける。ここで、2 形式  $F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$  は、軌道  $SU(2)/U(1)$  上の Kirillov-Kostant 形式と呼ばれている。

関係式 (5.1.2) からの類推により, Kirillov-Kostant 形式の係数である 2 階のテンソルを 2 乗したものを,  $F_2$  baby Skyrme 模型の高次微分項として導入する。 $F_2$  非線型シグマ模型を記述するカラー場は,

$$\mathbf{n}_a = U h_a U^\dagger \quad U \in SU(3), \quad a = 1, 2 \quad (5.1.3)$$

と定義される。ここで,  $h_a$  は  $SU(3)$  の Cartan 生成子である。軌道  $SU(3)/U(1)^2$  上の Kirillov-Kostant 形式は,

$$F^a = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a dx^\mu \wedge dx^\nu \quad F_{\mu\nu}^a = -\frac{i}{2} \sum_{b=1}^2 \text{Tr}(\mathbf{n}_a [\partial_\mu \mathbf{n}_b, \partial_\nu \mathbf{n}_b]) \quad (5.1.4)$$

と与えられる。したがって,  $F_2$  baby Skyrme 模型を, 2+1 次元 Minkowski 時空における次のラグランジアンで定義する:

$$\mathcal{L} = \sum_{a=1}^2 \left\{ M^2 \langle \partial_\mu \mathbf{n}_a, \partial^\mu \mathbf{n}_a \rangle - \frac{1}{e^2} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \mu^2 V_a \right\} \quad (5.1.5)$$

ここで, 括弧  $\langle, \rangle$  はリー代数  $su(3)$  に対する内積とする。つまり, あるリー代数  $A, B \in su(3)$  に対して,  $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^\dagger B)$  である。また,  $V_a$  はポテンシャルで, 微分を含まないものとし, 結合定数  $M, e, \mu$  は正の実定数とする。この章では, メトリックとして  $g_{\mu\nu} = (+, -, -)$  を採用することに注意する。このラグランジアン (5.1.5) のポテンシャル項を除いた部分は,  $SU(N)$  Yang-Mills 理論の低エネルギー有効模型としても提案されている [9]。ターゲット空間が  $CP^1$  であるとき, (5.1.1) が Lorentz 不変性をもち, 時間微分について高々 2 次である唯一の 4 次微分項である。しかし,  $F_2$  多様体の場合には, たとえば  $F_{\mu\nu}^1 F^{2\mu\nu}$  など, より多くの可能性が考えられるだろう。ただし, ここでは Skyrme 型の拡張された模型の本質的な部分を理解するため, もっともシンプルなラグランジアン (5.1.5) を考えていくことにする。

ポテンシャルとして, 第 3 章の議論を基に, 模型の局所対称性を明示的に破ることがなく無限遠で値を持たないものを導入する。また, 模型の大域的対称性を明示的に破るポテンシャルを用いると, 点群対称性などの複雑な幾何学的対称性を持った解が作れることが baby Skyrme 模型において示されている [71, 72, 73, 74] が, ここではこの模型における解探索の初めての試みとして, 軸対称性を持つ配位が安定な状態として存在するように大域的対称性も保ったポテンシャルを考えることにする。

新たに加えた 4 次微分項も  $F_2$  非線型シグマ模型, すなわち 2 次微分項と同様に, 以下の変換の下で不変に保たれる:

$$\text{大域的 } SU(3) \text{ 変換:} \quad U \rightarrow gU \quad g \in SU(3) \quad (5.1.6)$$

$$\text{局所的 } U(1)^2 \text{ 変換:} \quad U \rightarrow Uk \quad k \in U(1)^2 \quad (5.1.7)$$

この 2 つの対称性を保ち, 微分を含まずに無限遠でゼロとなる項として, 最も簡単なものは

$$V_a = \langle \mathbf{n}_{a\infty}, \mathbf{n}_{a\infty} - \mathbf{n}_a \rangle \quad (5.1.8)$$

だろう<sup>1</sup>。ここで,  $\mathbf{n}_{a\infty}$  は  $\mathbf{n}_a$  無限遠における値である。したがって, 無限遠で (5.1.8) がゼロになることは明らかである。さらに, (5.1.8) は,  $\langle \mathbf{n}_{a\infty}, \mathbf{n}_{a\infty} \rangle \geq \langle \mathbf{n}_a, \mathbf{n}_{a\infty} \rangle$  より, 半正定値であることに注意する。

<sup>1</sup>(5.1.8) に類似のものがいくつか考えられる。たとえば,  $\langle \mathbf{n}_a, \mathbf{n}_{a\infty} - \mathbf{n}_a \rangle$  である。しかし, これは (5.1.8) と等価

(5.1.8) が, 上の2つの変換の下で不変に保たれるのは, 次のようにわかる。\$SU(3)\$ 行列 \$U\$ の無限遠での値を \$U\_\infty\$ として, \$\mathbf{n}\_{a\infty} = U\_\infty h\_a U\_\infty^\dagger\$ と書く。そのとき, 大局的変換 (5.1.6) の下で,

$$U_\infty \rightarrow gU_\infty \quad \mathbf{n}_{a\infty} \rightarrow g\mathbf{n}_{a\infty}g^\dagger \quad (5.1.9)$$

より,

$$\langle \mathbf{n}_{a\infty}, \mathbf{n}_{a\infty} - \mathbf{n}_a \rangle \rightarrow \langle g\mathbf{n}_{a\infty}g^\dagger, g\mathbf{n}_{a\infty}g^\dagger - g\mathbf{n}_a g^\dagger \rangle = \langle \mathbf{n}_{a\infty}, \mathbf{n}_{a\infty} - \mathbf{n}_a \rangle \quad (5.1.10)$$

となり, 不変である。ここで, トレースの循環性を用いた。また, 局所的変換 (5.1.7) の下で, 明らかに \$\mathbf{n}\_a \rightarrow \mathbf{n}\_a\$, \$\mathbf{n}\_{a\infty} \rightarrow \mathbf{n}\_{a\infty}\$ であるので, 不変に保たれることがわかる。より一般には, (5.1.8) を拡張して,

$$V_a = \langle \mathbf{n}_{a\infty}, \mathbf{n}_{a\infty} - \mathbf{n}_a \rangle^\alpha \langle \mathbf{n}_{a0}, \mathbf{n}_{a0} - \mathbf{n}_a \rangle^\beta \quad (5.1.11)$$

を考えることができる。ここで, \$\alpha > 0, \beta \ge 0\$ である。ただし, ここでは最も単純な old baby 形のポテンシャル (\$\alpha = 1, \beta = 0\$) を考えることにする。そのとき, \$F\_2\$ baby Skyrme 模型の静的なエネルギーは,

$$E = \sum_{a=1}^2 \left\{ M^2 \langle \partial_i \mathbf{n}_a, \partial_i \mathbf{n}_a \rangle + \frac{1}{e^2} F_{ij}^a F_{ij}^a + \mu^2 \langle \mathbf{n}_{a\infty}, \mathbf{n}_{a\infty} - \mathbf{n}_a \rangle \right\} \quad (5.1.12)$$

と書ける。

この静的なエネルギーを前章と同様に, \$SU(3)\$ 行列 \$U\$ の各列を用いて記述する。ここでも, \$U \in SU(3)\$ を \$U = (Z\_A, Z\_B, Z\_C)\$ と書き, \$SU(3)\$ の Cartan-Weyl 基底として

$$h_1 = \frac{\lambda_3}{\sqrt{2}}, \quad h_2 = \frac{\lambda_8}{\sqrt{2}} \\ e_{\pm 1} = \frac{1}{2}(\lambda_1 \pm i\lambda_2), \quad e_{\pm 2} = \frac{1}{2}(\lambda_4 \mp i\lambda_5), \quad e_{\pm 3} = \frac{1}{2}(\lambda_6 \pm i\lambda_7)$$

を用いる。この基底を用いて, 平坦接続を

$$U^\dagger \partial_\mu U = iA_\mu^a h_a + iJ_\mu^p e_p \quad (5.1.13)$$

と分解する。ここで, カレントは次のように与えられる:

$$A_\mu^a = -i \langle h_a, U^\dagger \partial_\mu U \rangle, \quad J_\mu^p = -i \langle e_p, U^\dagger \partial_\mu U \rangle \quad (5.1.14)$$

Cartan 分解を用いると, カラー場の微分は

$$\partial_i \mathbf{n}_a = -U [h_a, U^\dagger \partial_i U] U^\dagger = -i\alpha_a^p J_i^p U^\dagger e_p U \quad (5.1.15)$$

である。なぜならば,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}_a, \mathbf{n}_{a\infty} - \mathbf{n}_a \rangle &= \langle \mathbf{n}_a, \mathbf{n}_{a\infty} \rangle - \langle \mathbf{n}_a, \mathbf{n}_a \rangle \\ &= \langle \mathbf{n}_a, \mathbf{n}_{a\infty} \rangle - \langle \mathbf{n}_{a\infty}, \mathbf{n}_{a\infty} \rangle \\ &= -\langle \mathbf{n}_{a\infty}, \mathbf{n}_{a\infty} - \mathbf{n}_a \rangle \end{aligned}$$

だからである。ここで, \$\langle \mathbf{n}\_a, \mathbf{n}\_a \rangle = \langle h\_a, h\_a \rangle = \langle \mathbf{n}\_{a\infty}, \mathbf{n}\_{a\infty} \rangle\$ を用いた。

と得られる。ここで、 $\alpha_a^p = \langle e_p, [h_a, e_p] \rangle$  であり、Cartan-Weyl 基底のルートベクトルを表している。式 (5.1.15) を用いると、エネルギー (5.1.12) の 1 項目、すなわち  $F_2$  非線型シグマ模型は

$$\sum_{a=1}^2 \langle \partial_i \mathbf{n}_a, \partial_i \mathbf{n}_a \rangle = 2J_i^p J_i^{-p} = 4 (J_i^1 J_i^{-1} + J_i^2 J_i^{-2} + J_i^3 J_i^{-3}) \quad (5.1.16)$$

と書ける。ここで、 $\alpha_a^{-p} = -\alpha_a^p$  と  $\sum_{a=1}^2 (\alpha_a^p)^2 = 2$  を用いた。同様にして、2 階のテンソル  $F_{ij}^a$  は

$$\begin{aligned} F_{ij}^a &= \frac{i}{2} \sum_{b=1}^2 J_i^p J_j^q \alpha_b^p \alpha_b^q \text{Tr} (h_a [e_p, e_q]) \\ &= i J_i^{-p} J_j^p \alpha_a^p \\ &= -i J_i^p J_j^{-p} \alpha_a^p \end{aligned} \quad (5.1.17)$$

と書ける。したがって、より具体的に書くと

$$\begin{aligned} F_{ij}^1 &= -\frac{i}{\sqrt{2}} \left( 2J_{[i}^1 J_{j]}^{-1} - J_{[i}^2 J_{j]}^{-2} - J_{[i}^3 J_{j]}^{-3} \right) \\ F_{ij}^2 &= \sqrt{\frac{3}{2}} i \left( J_{[i}^2 J_{j]}^{-2} - J_{[i}^3 J_{j]}^{-3} \right) \end{aligned} \quad (5.1.18)$$

と得られる。ここで、 $J_{[i}^p J_{j]}^{-p} \equiv J_i^p J_j^{-p} - J_j^p J_i^{-p}$  である。 $J_i^{-p} = (J_i^p)^*$  より、 $J_{[i}^p J_{j]}^{-p}$  は純虚数である。式 (5.1.18) と恒等式  $(2a - b - c)^2 + 3(b - c)^2 = 2\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$  より、4 次微分項は

$$\sum_{a=1}^2 F_{ij}^a F_{ij}^a = - \left( J_{[i}^1 J_{j]}^{-1} - J_{[i}^2 J_{j]}^{-2} \right)^2 - \left( J_{[i}^2 J_{j]}^{-2} - J_{[i}^3 J_{j]}^{-3} \right)^2 - \left( J_{[i}^3 J_{j]}^{-3} - J_{[i}^1 J_{j]}^{-1} \right)^2 \quad (5.1.19)$$

と得られる。ここで、 $J_{[i}^p J_{j]}^{-p}$  が純虚数であるので、(5.1.19) はゼロ以上であることに注意する。ポテンシャルをベクトル  $Z_a$  で書くため、境界条件を決める。ポテンシャル (5.1.8) は大域的な  $SU(3)$  対称性を持っているので、一般性を失うことなく、境界条件として  $U_\infty$  を

$$U_\infty = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.1.20)$$

と取ることができる。このとき、

$$\begin{aligned} V_1 &= \langle \mathbf{n}_{1\infty}, \mathbf{n}_{1\infty} - \mathbf{n}_1 \rangle = 1 + |Z_{A2}|^2 - |Z_{A3}|^2 + \frac{1}{2} (|Z_{C2}|^2 - |Z_{C3}|^2) \\ V_2 &= \langle \mathbf{n}_{a\infty}, \mathbf{n}_{a\infty} - \mathbf{n}_a \rangle = \frac{3}{2} (1 - |Z_{C1}|^2) \end{aligned} \quad (5.1.21)$$

と得られる。ここで、 $Z_{ai}$  は  $Z_a$  の  $i$  成分を表している。以上より、静的なエネルギー (5.1.12) を

$$E = \int d^2x \left\{ 4M^2 \mathcal{H}_2 + \frac{4}{e^2} \mathcal{H}_4 + \mu^2 \mathcal{H}_0 \right\} \quad (5.1.22)$$

と書くと,

$$\mathcal{H}_2 = (J_i^1 J_i^{-1} + J_i^2 J_i^{-2} + J_i^3 J_i^{-3}) \quad (5.1.23)$$

$$\mathcal{H}_4 = -\frac{1}{4} \left\{ \left( J_{[i}^1 J_{j]}^{-1} - J_{[i}^2 J_{j]}^{-2} \right)^2 + \left( J_{[i}^2 J_{j]}^{-2} - J_{[i}^3 J_{j]}^{-3} \right)^2 + \left( J_{[i}^3 J_{j]}^{-3} - J_{[i}^1 J_{j]}^{-1} \right)^2 \right\} \quad (5.1.24)$$

$$\mathcal{H}_0 = 2 + |Z_{A2}|^2 - |Z_{A3}|^2 - |Z_{C1}|^2 + |Z_{C2}|^2 \quad (5.1.25)$$

と得られる。ここで,  $Z_C^\dagger Z_C = 1$  を用いて,  $\mathcal{H}_0$  を整理した。さらに,  $r_0 = (Me)^{-1}$  として, 座標を  $\vec{x} \rightarrow r_0 \vec{x}$  とスケール変換すると, (5.1.22) は

$$E = 4M^2 \int d^2x \{ \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_4 + \tilde{\mu}^2 \mathcal{H}_0 \} \quad (5.1.26)$$

と書くことができる。ここで,  $\tilde{\mu}^2 = \frac{\mu^2}{4M^4 e^2}$  である。

## 5.2 Euler-Lagrange 方程式と数値解

この節では, まず Euler-Lagrange 方程式を導出する。その方程式は解析的には解くことができないので, 数値的解法を用いて解くことにする。また数値的に方程式を解く前に, 原点と無限遠での漸近解析を行い, 少なくとも漸近的な領域では, 方程式を満たす配位が存在することを解析的に確認する。

$F_2$  baby Skyrme 模型の作用積分を次のように書く :

$$S = S_2 + S_4 + S_0 \quad (5.2.1)$$

$$S_2 = -M^2 \int d^3x \sum_{a=1}^2 \langle \partial_\mu \mathbf{n}_a, \partial^\mu \mathbf{n}_a \rangle \quad (5.2.2)$$

$$S_4 = \frac{1}{e^2} \int d^3x \sum_{a=1}^2 F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \quad (5.2.3)$$

$$S_0 = \mu^2 \int d^3x \sum_{a=1}^2 \langle \mathbf{n}_{a\infty}, \mathbf{n}_{a\infty} - \mathbf{n}_a \rangle \quad (5.2.4)$$

Euler-Lagrange 方程式を得るために, 次の微小変換を考える :

$$U \rightarrow gU, \quad g = \exp(i\epsilon\phi) \in SU(3) \quad (5.2.5)$$

ここで,  $\epsilon$  は無限小の定数で,  $\phi$  は任意の座標依存する  $su(3)$  に値をとる行列とする。ただし, 無限遠では  $g$  は単位行列になるとする。すなわち,  $U_\infty \rightarrow U_\infty$  と変換する。このとき, カラー場とその微分はそれぞれ

$$\mathbf{n}_a \rightarrow \mathbf{n}'_a = g \mathbf{n}_a g^\dagger \approx \mathbf{n}_a + i\epsilon [\phi, \mathbf{n}_a] \quad (5.2.6)$$

$$\partial_\mu \mathbf{n} \rightarrow \partial_\mu \mathbf{n}' = g (\partial_\mu \mathbf{n} + [g^\dagger \partial_\mu g, \mathbf{n}_a]) g^\dagger \approx g (\partial_\mu \mathbf{n} + i\epsilon [\partial_\mu \phi, \mathbf{n}_a]) g^\dagger \quad (5.2.7)$$



と変換される。したがって、前章で得たように

$$\begin{aligned}\delta S_2 &= M^2 \int d^4x \sum_{a=1}^2 \{ \langle \partial_\mu \mathbf{n}'_a, \partial^\mu \mathbf{n}'_a \rangle - \langle \partial_\mu \mathbf{n}_a, \partial^\mu \mathbf{n}_a \rangle \} \\ &= -2i\epsilon M^2 \int d^4x \sum_{a=1}^2 \text{Tr} (\phi \partial_\mu [\mathbf{n}_a, \partial^\mu \mathbf{n}_a])\end{aligned}\quad (5.2.8)$$

となる。また、

$$\begin{aligned}\delta F_{\mu\nu}^a &= -\frac{i}{2} \left\{ \left\langle \mathbf{n}'_a, \sum_{b=1}^2 [\partial_\mu \mathbf{n}'_b, \partial_\nu \mathbf{n}'_b] \right\rangle - \left\langle \mathbf{n}_a, \sum_{b=1}^2 [\partial_\mu \mathbf{n}_b, \partial_\nu \mathbf{n}_b] \right\rangle \right\} \\ &= -\frac{\epsilon}{2} \sum_{b=1}^2 \{ \text{Tr} (\partial_\mu \phi [\mathbf{n}_a, [\mathbf{n}_b, \partial_\nu \mathbf{n}_b]]) - \text{Tr} (\partial_\nu \phi [\mathbf{n}_a, [\mathbf{n}_b, \partial_\mu \mathbf{n}_b]]) \}\end{aligned}\quad (5.2.9)$$

と得られる。ここで、

$$\text{Tr} (\mathbf{n}_a [[\partial_\mu \phi, \mathbf{n}_b], \partial_\nu \mathbf{n}_b]) = -\text{Tr} (\partial_\mu \phi [\mathbf{n}_a, [\mathbf{n}_b, \partial_\nu \mathbf{n}_b]])\quad (5.2.10)$$

を用いた。よって、4次微分項の微小変化は

$$\begin{aligned}\delta S_4 &= \frac{2}{e^2} \int d^3x \sum_{a=1}^2 F_{\mu\nu}^a \delta F^{a\mu\nu} \\ &= -\frac{2\epsilon}{e^2} \int d^3x \sum_{a=1}^2 \sum_{b=1}^2 F_{\mu\nu}^a \text{Tr} (\partial^\mu \phi [\mathbf{n}_a, [\mathbf{n}_b, \partial^\nu \mathbf{n}_b]]) \\ &= \frac{2\epsilon}{e^2} \int d^3x \sum_{a=1}^2 \sum_{b=1}^2 \{ F_{\mu\nu}^a \text{Tr} (\phi \partial^\mu [\mathbf{n}_a, [\mathbf{n}_b, \partial^\nu \mathbf{n}_b]]) + \partial^\mu F_{\mu\nu}^a \text{Tr} (\phi [\mathbf{n}_a, [\mathbf{n}_b, \partial^\nu \mathbf{n}_b]]) \}\end{aligned}\quad (5.2.11)$$

と求まる。さらに、 $\mathbf{n}'_{a\infty} = \mathbf{n}_{a\infty}$  に注意すると、ポテンシャル項の変化分は

$$\begin{aligned}\delta S_0 &= \mu^2 \int d^3x \sum_{b=1}^2 \{ \langle \mathbf{n}_{a\infty}, \mathbf{n}_{a\infty} - \mathbf{n}'_a \rangle - \langle \mathbf{n}_{a\infty}, \mathbf{n}_{a\infty} - \mathbf{n}_a \rangle \} \\ &= i\epsilon \mu^2 \int d^3x \sum_{b=1}^2 \text{Tr} (\phi [\mathbf{n}_{a\infty}, \mathbf{n}_a])\end{aligned}\quad (5.2.12)$$

となる。したがって、任意の  $\phi$  に対して  $\delta S = 0$  が成り立つ条件は、

$$\sum_{a=1}^2 \left\{ \partial^\mu \left( M^2 [\mathbf{n}_a, \partial_\mu \mathbf{n}_a] - \frac{i}{e^2} F_{\mu\nu}^a \left[ \mathbf{n}_a, \sum_{b=1}^2 [\mathbf{n}_b, \partial^\nu \mathbf{n}_b] \right] \right) + \frac{\mu^2}{2} [\mathbf{n}_{a\infty}, \mathbf{n}_a] \right\} = 0\quad (5.2.13)$$

と得られる。この Euler-Lagrange 方程式に、左から  $U^\dagger$ 、右から  $U$  を掛けると、次のように書ける：

$$\partial_\mu \mathcal{B}^\mu + [U^\dagger \partial_\mu U, \mathcal{B}^\mu] = \frac{\mu^2}{2} \sum_{a=1}^2 U^\dagger [\mathbf{n}_{a\infty}, \mathbf{n}_a] U\quad (5.2.14)$$

ここで、カレント  $\mathcal{B}_\mu$  は

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_\mu &= \sum_{a=1}^2 \left\{ M^2 [h_a, [h_a, U^\dagger \partial_\mu U]] - \frac{i}{e^2} \sum_{b=1}^2 F_{\mu\nu}^a [h_a, [h_b, [h_b, U^\dagger \partial^\nu U]]] \right\} \\ &= 2i \left( M^2 J_\mu^p - \frac{i}{e^2} \sum_{a=1}^2 F_{\mu\nu}^a \alpha_a^p J^{p\nu} \right) e_p\end{aligned}\quad (5.2.15)$$

と書ける。ここで、Cartan 分解 (5.1.13) を用いた。さらに、(時間を含んだ) 座標のスケール変換  $(t, \vec{x}) \rightarrow r_0(t, \vec{x})$  を行うと (5.2.14) は

$$\partial_\mu \tilde{\mathcal{B}}^\mu + [U^\dagger \partial_\mu U, \tilde{\mathcal{B}}^\mu] = \tilde{\mu}^2 \sum_{a=1}^2 U^\dagger [\mathbf{n}_{a\infty}, \mathbf{n}_a] U \quad (5.2.16)$$

と書ける。ただし、

$$\tilde{\mathcal{B}}_\mu = i (J_\mu^p - i G_{\mu\nu}^p J^{p\nu}) e_p \quad (5.2.17)$$

である。ここで、後の便利のため  $G_{\mu\nu}^p = \sum_{a=1}^2 F_{\mu\nu}^a \alpha_a^p$  を導入した。具体的には、

$$\begin{aligned}G_{\mu\nu}^{\pm 1} &= \pm \sqrt{2} F_{\mu\nu}^1 = \mp i (2J_{[i}^1 J_{j]}^{-1} - J_{[i}^2 J_{j]}^{-2} - J_{[i}^3 J_{j]}^{-3}) \\ G_{\mu\nu}^{\pm 2} &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (F_{\mu\nu}^1 + \sqrt{3} F_{\mu\nu}^2) = \mp i (-J_{[i}^1 J_{j]}^{-1} + 2J_{[i}^2 J_{j]}^{-2} - J_{[i}^3 J_{j]}^{-3}) \\ G_{\mu\nu}^{\pm 3} &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} (-F_{\mu\nu}^1 + \sqrt{3} F_{\mu\nu}^2) = \mp i (-J_{[i}^1 J_{j]}^{-1} - J_{[i}^2 J_{j]}^{-2} + 2J_{[i}^3 J_{j]}^{-3})\end{aligned}\quad (5.2.18)$$

である。

式 (5.2.16) の左辺第二項は、 $R_\mu^p \equiv \sum_{a=1}^2 \alpha_a^p A_\mu^a$  を用いて、

$$[U^\dagger \partial_\mu U, \tilde{\mathcal{B}}^\mu] = \{-R_\mu^p J^{p\mu} + i (G^{p\mu\nu} R_\mu^p J_\nu^p + G^{r\mu\nu} J_\nu^q J_\mu^q N_{r,q}^{-p})\} e_p \quad (5.2.19)$$

と書ける。ただし、 $N_{q,r}^{-p} = \langle e_p, [e_q, e_r] \rangle$  である。ここで、次の関係を用いた：

$$\begin{aligned}\sum_{p=\pm 1, \pm 2, \pm 3} G^{p\mu\nu} J_\nu^p J_\mu^{-p} \alpha_a^p &= \sum_{p=\pm 1, \pm 2, \pm 3} G^{-p\mu\nu} J_\nu^{-p} J_\mu^p \alpha_a^{-p} \\ &= \sum_{p=\pm 1, \pm 2, \pm 3} G^{p\mu\nu} J_\nu^{-p} J_\mu^p \alpha_a^p \\ &= - \sum_{p=\pm 1, \pm 2, \pm 3} G^{p\mu\nu} J_\nu^p J_\mu^{-p} \alpha_a^p \\ &= 0\end{aligned}\quad (5.2.20)$$

$N_{r,q}^{-p}$  が有限になるのは、 $p = -m$  とすると、

$$N_{m-1, m+1}^m = 1, \quad N_{m+1, m-1}^m = -1 \quad (5.2.21)$$

のみである。ただし、便宜上  $m \in \mathbf{Z}_+ = \{1, 2, 3\}$  ならば  $m \pm 1 \in \mathbf{Z}_+$ 、 $m \in \mathbf{Z}_- = \{-1, -2, -3\}$  ならば  $m \pm 1 \in \mathbf{Z}_-$  とする。例えば、 $m = 3$  のとき  $m + 1 = 1$  とする。したがって、式 (5.2.19)

の右辺第三項は

$$\begin{aligned}
G^{r\mu\nu} J_\nu^r J_\mu^q N_{r,q}^{-p} &= F^{a\mu\nu} (\alpha_a^{p-1} J_\nu^{p-1} J_\mu^{p+1} - \alpha_a^{p+1} J_\nu^{p+1} J_\mu^{p-1}) \\
&= F^{a\mu\nu} (\alpha_a^{p-1} + \alpha_a^{p+1}) J_\nu^{p-1} J_\mu^{p+1} \\
&= -F^{a\mu\nu} \alpha_a^p J_\nu^{p-1} J_\mu^{p+1} \\
&= -G^{p\mu\nu} J_\nu^{p-1} J_\mu^{p+1}
\end{aligned} \tag{5.2.22}$$

と変形できる。また、式(5.2.16)の右辺は、 $U = (Z_A, Z_B, Z_C)$ と書くと、

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mu}^2 \sum_{a=1}^2 U^\dagger [\mathbf{n}_{a\infty}, \mathbf{n}_a] U \\
&= \tilde{\mu}^2 \begin{pmatrix} 0 & Z_{A_2}^* Z_{B_2} - Z_{A_3}^* Z_{B_3} & Z_{A_1}^* Z_{C_1} - Z_{A_3}^* Z_{C_3} \\ -Z_{B_2}^* Z_{A_2} + Z_{B_3}^* Z_{A_3} & 0 & Z_{B_1}^* Z_{C_1} - Z_{B_2}^* Z_{C_2} \\ -Z_{C_1}^* Z_{A_1} + Z_{C_3}^* Z_{A_3} & -Z_{C_1}^* Z_{B_1} + Z_{C_2}^* Z_{B_2} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5.2.23}$$

となる。ここで、 $Z_{ai}$ は $Z_a$ の $i$ 成分である。以上より、Euler-Lagrange方程式(5.2.16)は

$$\partial^\mu (J_\mu^1 - iG_{\mu\nu}^1 J^{1\nu}) + iR_\mu^1 J^{1\mu} + G^{1\mu\nu} (R_\mu^1 J_\nu^1 + J_\mu^2 J_\nu^3) = -i\tilde{\mu}^2 (Z_{A_2}^* Z_{B_2} - Z_{A_3}^* Z_{B_3}) \tag{5.2.24}$$

$$\partial^\mu (J_\mu^2 - iG_{\mu\nu}^2 J^{2\nu}) + iR_\mu^2 J^{2\mu} + G^{2\mu\nu} (R_\mu^2 J_\nu^2 + J_\mu^3 J_\nu^1) = -i\tilde{\mu}^2 (Z_{C_3}^* Z_{A_3} - Z_{C_1}^* Z_{A_1}) \tag{5.2.25}$$

$$\partial^\mu (J_\mu^3 - iG_{\mu\nu}^3 J^{3\nu}) + iR_\mu^3 J^{3\mu} + G^{3\mu\nu} (R_\mu^3 J_\nu^3 + J_\mu^1 J_\nu^2) = -i\tilde{\mu}^2 (Z_{B_1}^* Z_{C_1} - Z_{B_2}^* Z_{C_2}) \tag{5.2.26}$$

とそれらの複素共役で与えられる。

この連立方程式(5.2.24)–(5.2.26)を解くために、前章のように複素ベクトル $Z_a$ 、( $a = A, B, C$ )を複素スカラー場を用いて次のように記述する：

$$\begin{aligned}
Z_A &= \frac{1}{\sqrt{\Delta_1}} \begin{pmatrix} 1 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \\
Z_B &= \frac{1}{\sqrt{\Delta_1 \Delta_2}} \begin{pmatrix} -u_1^* - u_2^* u_3 \\ 1 - u_1 u_2^* u_3 + |u_2|^2 \\ -u_1^* u_2 + u_3 + u_3 |u_1|^2 \end{pmatrix}, \\
Z_C &= \frac{1}{\sqrt{\Delta_2}} \begin{pmatrix} u_1^* u_3^* - u_2^* \\ -u_3^* \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5.2.27}$$

となる。ここで、

$$\Delta_1 = 1 + |u_1|^2 + |u_2|^2, \quad \Delta_2 = 1 + |u_3|^2 + |u_1 u_3 - u_2|^2 \tag{5.2.28}$$

である。

方程式を解くもっとも単純な方法は、複素スカラー場に軸対称性などの空間的対称性をもつ ansatz を仮定し、そのうえで数値計算を行うことである。しかし、方程式(5.2.24)–(5.2.26)は、

パラメトリゼーション (5.2.27) を導入してもなお、非常に複雑なので、ここでは異なるアプローチを行う。それは、スカラー場に空間的対称性を課すのではなく、torsion free 条件

$$\operatorname{Re}(J^1 \wedge J^2 \wedge J^3) = 0 \quad (5.2.29)$$

を満たす配位を考え、この制限の下で方程式を解くというものである。4.5 節で見たように、 $F_2$  非線型シグマ模型におけるインスタントン解は、すべて torsion free 条件を満たしていた。この torsion free 条件は、模型のダイナミカルな性質から現れるものではなく、ターゲット空間の幾何学的性質から現れる条件であることに注意する。したがって、 $F_2$  非線型シグマ模型に相互作用項を加えた  $F_2$  baby Skyrme 模型においても、Euler-Lagrange 方程式の解は torsion free 条件を満たすであろう。その仮説により、我々は torsion free 条件 (5.2.29) を満たす 2 種類の配位を考える。1 つ目は、 $SU(3)$  行列  $U$  が  $SU(2)$  行列の単純な埋め込みになっているもの。これは一般に、対称性を考慮すると、2 つのスカラー場がゼロ、すなわち  $u_1 = u_3 = 0$  であるものと等価である。このとき、 $J_k^1 = J_k^3 = 0$  が成り立つので、torsion free 条件が満たされている。2 つ目は、 $F_2$  非線型シグマ模型における鞍点解が満たしていた、 $J_k^2 = 0$  を満たす配位である。

まず、単純な埋め込みの場合から考える。ここでは、 $u_1 = u_3 = 0$  とし、便宜上  $u_2 = u$  と書くことにする。そのとき、 $SU(3)$  行列  $U$  は次のように書ける：

$$U = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -u^* \\ 0 & 1 & 0 \\ u & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta = 1 + |u|^2 \quad (5.2.30)$$

よって、式 (5.1.14) を用いて

$$J_\mu^{\pm 1} = J_\mu^{\pm 3} = 0, \quad J_\mu^2 = -\frac{i}{\Delta} \partial_\mu u, \quad J_\mu^{-2} = \frac{i}{\Delta} \partial_\mu u^* \quad (5.2.31)$$

と得られる。式 (5.2.30) と (5.2.31) を Euler-Lagrange 方程式 (5.2.24) と (5.2.26) に代入すると、それらは自動的に満たされることがわかる。したがって、(5.2.25) だけを考えればよい。

式 (5.2.30) より、 $A_\mu^a$  と  $F_{\mu\nu}^a$  は

$$A_\mu^1 = \frac{1}{\sqrt{3}} A_\mu^2 = -\frac{i}{2\sqrt{2}} \frac{u^* \partial_\mu u - u \partial_\mu u^*}{\Delta} \quad (5.2.32)$$

$$F_{\mu\nu}^1 = \frac{1}{\sqrt{3}} F_{\mu\nu}^2 = \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{\partial_\mu u \partial_\nu u^* - \partial_\mu u^* \partial_\nu u}{\Delta^2} \quad (5.2.33)$$

と得られる。したがって、 $R_\mu^2$  と  $G_{\mu\nu}^2$  は

$$R_\mu^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left( A_\mu^1 + \sqrt{3} A_\mu^2 \right) = \frac{i(u^* \partial_\mu u - u \partial_\mu u^*)}{\Delta} \equiv R_\mu \quad (5.2.34)$$

$$G_{\mu\nu}^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left( F_{\mu\nu}^1 + \sqrt{3} F_{\mu\nu}^2 \right) = -\frac{2i(\partial_\mu u \partial_\nu u^* - \partial_\mu u^* \partial_\nu u)}{\Delta^2} \equiv G_{\mu\nu} \quad (5.2.35)$$

となる。また、ポテンシャルからの寄与は

$$Z_{C_3^*} Z_{A_3} - Z_{C_1^*} Z_{A_1} = \frac{2u}{\Delta} \quad (5.2.36)$$

と得られる。したがって、方程式 (5.2.25) は、両辺に  $\Delta$  を掛けると、

$$\partial^\mu (\partial_\mu u - iG_{\mu\nu}\partial^\nu u) + (iR_\mu - \partial_\mu \log \Delta) (\partial_\mu u - iG_{\mu\nu}\partial^\nu u) = 2\tilde{\mu}^2 u \quad (5.2.37)$$

と書ける。また、同時にエネルギーは

$$E = 4M^2 \int d^2x \left\{ \frac{\partial_i u \partial_i u^*}{\Delta^2} - \frac{(\partial_i u \partial_j u^* - \partial_i u^* \partial_j u)}{2\Delta^4} + \frac{2\tilde{\mu}^2}{\Delta} \right\} \quad (5.2.38)$$

と書ける。この方程式 (5.2.37) とエネルギー (5.2.38) は、ポテンシャル項が old baby ポテンシャルである baby Skyrme 模型の Euler-Lagrange 方程式とエネルギーにそれぞれ一致する。すなわち、(5.2.37) と (5.2.38) は、ラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = M^2 \partial_\mu \vec{n} \cdot \partial^\mu \vec{n} - \frac{1}{2e^2} (\partial_\mu \vec{n} \times \partial_\nu \vec{n})^2 - \mu^2 (1 - n_3) \quad (5.2.39)$$

から得られる Euler-Lagrange 方程式とエネルギー汎関数を、ステレオグラフ射影

$$\vec{n} = \frac{1}{\Delta} (u + u^*, -i(u - u^*), |u|^2 - 1) \quad (5.2.40)$$

を用いて書き下したものと完全に一致する。この系の解はすでに知られている [12, 13] ので、我々は  $F_2$  baby Skyrme 模型に解が存在することを確認することができた。ただし、この結果は配位 (5.1.13) が単純な埋め込みであることの帰結であるので、新たな解を得たとはいえないだろう。そこで、単純な埋め込みとは違うクラスの解をこれから探索していく。

次に、 $J_k^2 = 0$  を満たす配位を考える。この条件は、

$$J_k^2 \propto u_3 \partial_k u_1 - \partial_k u_2 = 0 \quad (5.2.41)$$

と等価である。前章の  $F_2$  非線型シグマ模型の場合には、複素スカラー場が  $z_\pm = x \pm iy$  の有理関数だとすれば、この条件を満たすことが簡単にできた。しかし、ポテンシャルと 4 次微分項を考慮すると、 $z_\pm$  の有理関数が Euler-Lagrange 方程式の解になっていることはないだろう。そのため、(5.2.41) を場の座標依存性を仮定せずに解く必要がある。場の座標依存性を仮定せず、一般的に (5.2.41) を解くことは難しいが、 $u_2$  が  $u_1$  の関数であるとするれば簡単に解くことができる。すなわち、 $u_2 = g(u_1)$  と置くと、(5.2.41) より  $u_3 = g'(u_1)$  と得られる。ここで、' は  $u_1$  での微分を表している。以下では、この配位を考えていく。ただし、場の一価性を満たすため、 $g(u_1)$  を  $u_1$  の多項式とする<sup>2</sup>。

いま、未知関数は  $u_1$  と  $g$  の 2 つとなった。一方で、Euler-Lagrange 方程式は 3 本の連立方程式であるため、過剰決定系となってしまふ。これを解消するために、(5.2.24) と (5.2.26) が比例する条件を考え、独立な方程式の本数を減らす。ここで、(5.2.25) は  $J_k^2 = 0$  により多くの項が消えるため、特別視する。(5.2.24) と (5.2.26) が比例するには、少なくとも  $\Delta_1/\Delta_2$  が定数でなければならない。 $\Delta_1 = \Delta_2$  の場合を考える。このとき、 $g(u_1) = \sum_n a_n u_1^n$  として、 $\Delta_1$  と  $\Delta_2$  の中にある  $u_1$  の次数を比較すると、

$$g(u_1) = \frac{1}{2} u_1^2 e^{i\varphi} \quad (5.2.42)$$

<sup>2</sup>一般には、有理関数とすることができるが、ここでは簡単のため多項式とする

と得られる。ただし、 $\varphi$  は任意の実数である。便宜上  $u_1 = \sqrt{2}u$ ,  $\varphi = \pi$  と選ぶと、

$$u_2 = -u^2, \quad u_3 = -u_1 = -\sqrt{2}u \quad (5.2.43)$$

と得られる。このとき、 $SU(3)$  行列  $U$  は

$$U = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2}u^* & -u^{*2} \\ \sqrt{2}u & 1 - |u|^2 & \sqrt{2}u^* \\ -u^2 & -\sqrt{2}u & 1 \end{pmatrix} \quad (5.2.44)$$

と書ける。

式 (5.2.44) を用いて、Euler-Lagrange 方程式 (5.2.24)–(5.2.26) に含まれているテンソルを具体的に計算する。カレント  $J_\mu^p$  は、

$$J_\mu^1 = \frac{\sqrt{2}i}{\Delta} \partial_\mu u^*, \quad J_\mu^2 = 0, \quad J_\mu^3 = -\frac{\sqrt{2}i}{\Delta} \partial_\mu u^* \quad (5.2.45)$$

と得られる。これらを用いると

$$G_{\mu\nu}^{\pm 1} = G_{\mu\nu}^{\pm 3} = \pm G_{\mu\nu}, \quad G_{\mu\nu}^{\pm 2} = \mp 2G_{\mu\nu}, \quad (5.2.46)$$

と得られる。ここで、

$$G_{\mu\nu} \equiv -\frac{2i(\partial_\mu u \partial_\nu u^* - \partial_\mu u^* \partial_\nu u)}{\Delta^2} \quad (5.2.47)$$

である。また、

$$Z_A^\dagger \partial_\mu Z_A = -Z_C^\dagger \partial_\mu Z_C = \frac{(u^* \partial_\mu u - u \partial_\mu u^*)}{\Delta} \equiv -iR_\mu \quad (5.2.48)$$

より、

$$R_\mu^{\pm 1} = R_\mu^{\pm 3} = \pm R_\mu, \quad R_\mu^{\pm 2} = \mp 2R_\mu \quad (5.2.49)$$

が得られる。さらに、ポテンシャルからの寄与は、

$$Z_{A2}^* Z_{B2} - Z_{A3}^* Z_{B3} = \frac{\sqrt{2}}{\Delta^2} (1 - 2|u|^2) u^* \quad (5.2.50)$$

$$Z_{C3}^* Z_{A3} - Z_{C1}^* Z_{A1} = 0 \quad (5.2.51)$$

$$Z_{B1}^* Z_{C1} - Z_{B2}^* Z_{C2} = -\frac{\sqrt{2}}{\Delta^2} (1 - 2|u|^2) u^* \quad (5.2.52)$$

となる。

以上を Euler-Lagrange 方程式に代入する。式 (5.2.45) より  $J_\mu^1 J_\nu^3 - J_\mu^3 J_\nu^1 = 0$  であるので、(5.2.51) とから、 $J_\mu^2$  に対する Euler-Lagrange 方程式 (5.2.25) が自動的に満たされていることがわかる。さらに、Euler-Lagrange 方程式 (5.2.24) と (5.2.26) は互いに比例し、次の方程式と等価となる：

$$\partial^\mu (\partial_\mu u - iG_{\mu\nu} \partial^\nu u) + (iR_\mu - \partial_\mu \log \Delta) (\partial_\mu u - iG_{\mu\nu} \partial^\nu u) = -\tilde{\mu}^2 (1 - 2|u|^2) \frac{u}{\Delta} \quad (5.2.53)$$

ここで、(5.2.53) を得るため (5.2.24) の複素共役を取った。また、このときエネルギーは

$$E = 16M^2 \int d^2x \left\{ \frac{\partial_i u \partial_i u^*}{\Delta^2} - \frac{(\partial_i u \partial_j u^* - \partial_i u^* \partial_j u)}{2\Delta^4} + \frac{\tilde{\mu}^2}{2} \frac{1 + 4|u|^2}{\Delta^2} \right\} \quad (5.2.54)$$

と書ける。この Euler-Lagrange 方程式 (5.2.53) とエネルギー (5.2.54) は、次のラグランジアンで定義される baby Skyrme 模型の Euler-Lagrange 方程式とエネルギーに等しい：

$$\mathcal{L} = 4 \left[ M^2 \partial_\mu \vec{n} \cdot \partial^\mu \vec{n} - \frac{1}{2e^2} (\partial_\mu \vec{n} \times \partial_\nu \vec{n})^2 - \frac{\mu^2}{8} \{2(1 - n_3) + 3(1 - n_3^2)\} \right] \quad (5.2.55)$$

ここで、 $\vec{n}$  は (5.2.40) で定義される 3 成分の単位ベクトルである。式 (5.2.55) のポテンシャルは、old baby ポテンシャル  $(1 - n_3)$  と new baby ポテンシャル  $(1 - n_3^2)$  の和になっている。ここでも問題は baby Skyrme 模型に帰着したが、そのようなポテンシャルの下での baby skyrmion はこれまで議論されていない。したがって、Euler-Lagrange 方程式 (5.2.53) を実際に解いて解を構築する必要がある。

解を構築するために、次の軸対称 ansatz を導入する：

$$u = \cot \frac{F(r)}{2} e^{in\theta} \quad (5.2.56)$$

ここで、 $(r, \theta)$  は 2 次元極座標である。また、 $F(r)$  は、境界条件  $F(0) = 0$ ,  $\lim_{r \rightarrow \infty} F(r) = \pi$  を満たす滑らかな関数で、 $n$  は場の巻き数を表す整数である。このとき、トポロジカルチャージを前章のように

$$Q = N_A - N_C \quad (5.2.57)$$

$$N_a = -\frac{i}{2\pi} \int d^2x \varepsilon^{ij} \partial_i Z_a^\dagger \partial_j Z_a$$

と定義すると、 $Q = 4n$  と得られる。

ポテンシャルが new baby ポテンシャルである baby Skyrme 模型では、すべての整数  $n$  に対して、軸対称性を持った配位が属するホモトピークラスの中での最小エネルギーを与える。一方で、ポテンシャルが old baby ポテンシャルのときには、 $n = 1, 2$  のときのみ、軸対称性を持った配位が最小エネルギーを与える [13]。いま考えている系は、ポテンシャルが old baby ポテンシャルと new baby ポテンシャルの和で与えられる baby Skyrme 模型と等価であるので、少なくとも  $n = 1, 2$  に対して軸対称 ansatz を用いて得られた解は、属するホモトピークラスの中での最小エネルギーを与えると考えられる。

軸対称 ansatz (5.2.56) を Euler-Lagrange 方程式 (5.2.53) に代入すると、

$$F'' \left( 1 + \frac{n^2 \sin^2 F}{r^2} \right) + F' \left( \frac{1}{r} - \frac{n^2 \sin^2 F}{r^3} + \frac{n^2 F' \sin F \cos F}{r^2} \right) - \frac{n^2 \sin F \cos F}{r^2} - \frac{\tilde{\mu}^2}{2} \sin F (1 + 3 \cos F) = 0 \quad (5.2.58)$$

が得られる。

この方程式は解析的に解くことはできないが、原点と無限遠での漸近解は解析的に得ることができる。原点近傍では、

$$F(r) = \pi + Cr^n \quad (5.2.59)$$

が方程式の解になっている。ここで、 $C$  はある定数である。一方で、無限遠では (5.2.58) が変形 Bessel 方程式

$$F'' + \frac{F'}{r} - \left( \frac{n^2}{r^2} + 2\tilde{\mu}^2 \right) F = 0 \quad (5.2.60)$$

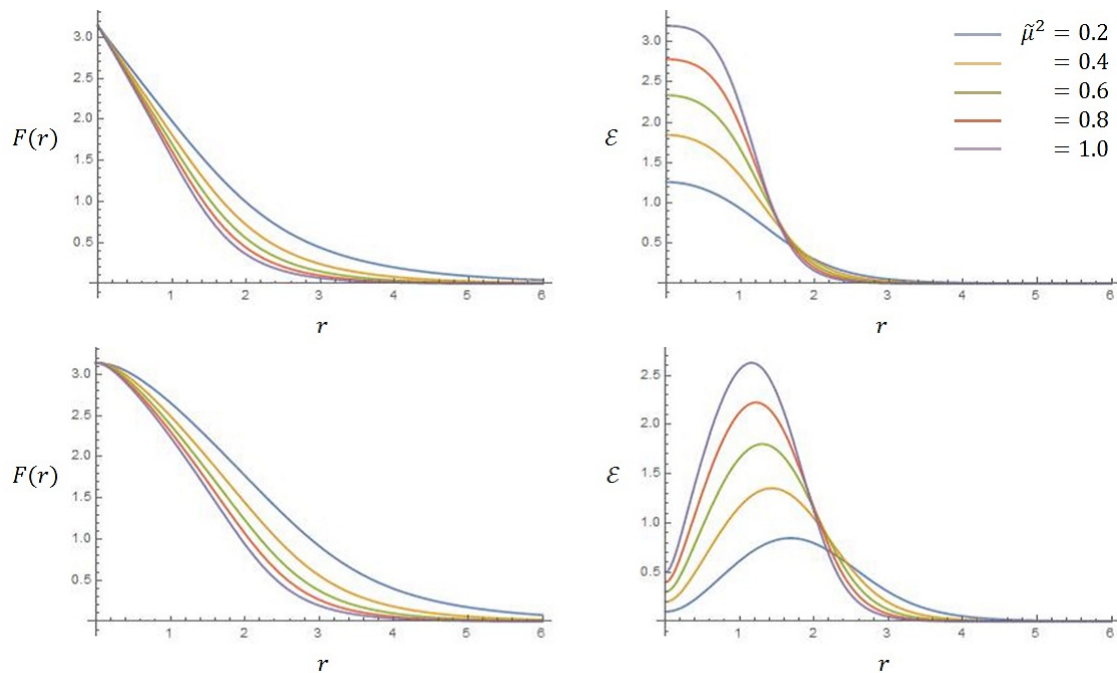


図 5.1: いくつかの  $\tilde{\mu}^2$  に対しての、動径関数  $F(r)$  とエネルギー密度  $\mathcal{E}$ 。上段は  $n = 1$ 、下段は  $n = 2$  である。また、ほかのパラメータは  $M = 0.5$  に選んだ。

と簡略化される。したがって、 $F(r)$  は無限遠で変形 Bessel 関数  $K_n(\sqrt{2}\tilde{\mu}r)$  に比例する。ゆえに、無限遠では

$$F(r) \propto K_n(\sqrt{2}\tilde{\mu}r) \sim \frac{e^{-\sqrt{2}\tilde{\mu}r}}{\sqrt{\sqrt{2}\tilde{\mu}r}} \quad (5.2.61)$$

と振舞うことがわかる。これらの性質は、基本的に old baby ポテンシャルや new baby ポテンシャルの下での baby skyrmion の性質とほとんど同じである [12]。

方程式 (5.2.58) を数値的に解くことで、解の構築を行った。数値計算は SOR 法を用いた。ここで、数値計算のために、座標を

$$r = \frac{x}{1-x}, \quad x \in [0, 1] \quad (5.2.62)$$

と変数変換し、その上でメッシュ数を  $N_{\text{MESH}} = 1000$  として計算を行った。

得られた解の動径関数  $F(r)$  とエネルギー密度を図 5.1 に示す。結合定数  $\tilde{\mu}^2$  を大きくすると、動径関数は早くゼロへと収束していく。これは、 $\tilde{\mu}^2$  を大きくすると、エネルギー密度が原点付近に集まり、解が小さくなっていくことを示している。エネルギー密度は、 $n = 1$  のとき原点で最大値を取るのに対して、 $n = 2$  のときには原点から離れたところで最大値をとる。図 5.2 では、同じパラメータセットのもとで得られる単純な埋め込み解との比較を行う。定性的には、2 種類の解は非常に似ていることがわかる。定量的には、トポロジカルチャージあたりのエネルギー密度が、我々が新しく構築した解の方が大きいことがわかる。表 5.1 に  $n = 1$  の解、表 5.2 に  $n = 2$  の解のエネルギーを記す。Derrick の定理より、Euler-Lagrange 方程式の解は、 $E_4 = E_0$  を満たす。実際に我々の得た配位は、 $E_4/E_0 \approx 0.99$  程度である。同じ巻き数  $n$  で与えられる、 $F_2$  非線型シグマ模型における鞍点解は、埋め込み解のちょうど 4 倍のエネルギーを持っていたが、 $F_2$  baby Skyrme 模型の場合には、新たな解がもつエネルギーの方が、単純な埋め込み解が



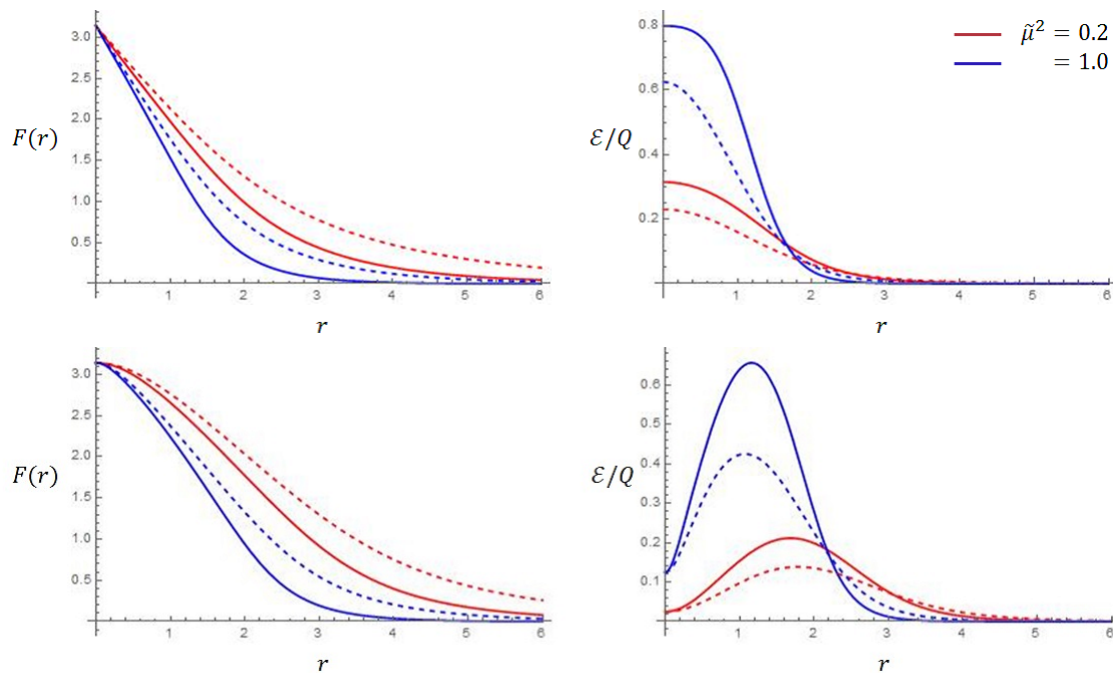


図 5.2: 同じ  $n$  における新たに得られた解と埋め込み解の比較。実線が新たに得られた解で、点線が埋め込み解である。上段は  $n = 1$ , 下段は  $n = 2$  であり, 赤は  $\tilde{\mu}^2 = 0.2$ , 青は  $\tilde{\mu}^2 = 1.0$  を示している。また, ほかのパラメータは  $M = 0.5$  に選んだ。

持つエネルギーよりも 4 倍以上大きくなっている。さらに,  $\tilde{\mu}^2$  を大きくすると, その比が増加していくため, より不安定になっていくと考えられる。

### 5.3 5章のまとめ

本章では,  $F_2$  baby Skyrme 模型, すなわち  $F_2$  非線型シグマ模型にポテンシャルと Skyrme 項を加えた模型におけるソリトン解について議論した。 $F_2$  非線型シグマ模型におけるソリトン, スケール不変性を持っていたが, ポテンシャルと Skyrme 項を加えたことでスケール不変性を持たない解の構築に成功した。

Skyrme 項は, baby Skyrme 模型からの一般化により導入した。ポテンシャルは, 第 3 章で議論したポテンシャルの構成法をもとに, 模型の対称性を破らないポテンシャルを構成し, 導入した。我々は, 第 4 章での議論から, Euler-Lagrange 方程式の解は, ターゲット空間の幾何学的な性質から現れる torsion free 条件を満たしていると予想し, その条件を満たす配位を ansatz として採用した。すなわち,  $F_2$  非線型シグマ模型の単純な埋め込み解と鞍点解に対応する 2 種類の配位を考えた。単純な埋め込み解に対応する配位では, Euler-Lagrange 方程式とエネルギー汎関数が, 完全に baby Skyrme 模型のものと一致した。一方で, 鞍点解に対応する配位において, それらはポテンシャルが old baby ポテンシャルと new baby ポテンシャルの和で与えられた baby Skyrme 模型と一致していた。このようなポテンシャルのもとでは, ソリトン解が知られていなかったため, Euler-Lagrange 方程式を数値的に解くことで解の構築を行った。

今回は, 軸対称性を持つ配位がそのホモトピークラスにおいて最小のエネルギーを与えると予想できる, 低いトポロジカルチャージを持った配位のみを考えた。軸対称性を持たないと予

表 5.1:  $n = 1$  のときの新たな解のエネルギー。ここで、パラメータは  $M = 0.5$  とした。Ratio は同じパラメータのもとの埋め込み解の持つエネルギーとの比を表している。

$\tilde{\mu}^2$	$E_2$	$E_4$	$E_0$	$E$	$E_4/E_0$	Ratio
0.2	7.090	2.292	2.309	11.691	0.993	4.76
0.4	7.300	3.123	3.132	13.555	0.997	4.89
0.6	7.437	3.751	3.758	14.946	0.998	4.96
0.8	7.540	4.278	4.283	16.101	0.999	5.02
1.0	7.623	4.740	4.744	17.107	0.999	5.06

表 5.2:  $n = 2$  のときの新たな解のエネルギー。ここで、パラメータは  $M = 0.5$  とした。Ratio は同じパラメータのもとの埋め込み解の持つエネルギーとの比を表している。

$\tilde{\mu}^2$	$E_2$	$E_4$	$E_0$	$E$	$E_4/E_0$	Ratio
0.2	12.959	4.144	4.177	21.280	0.992	4.61
0.4	13.113	5.783	5.792	24.688	0.998	4.75
0.6	13.217	7.023	7.038	27.279	0.998	4.83
0.8	13.299	8.068	8.081	29.448	0.998	4.89
1.0	13.366	8.986	8.998	31.350	0.999	4.94

想される、より高次のトポロジカルチャージを持った解の構築を行うことが今後の課題になるだろう。軸対称性を課さずに Euler-Lagrange 方程式を解くのは容易ではないため、モンテカルロシミュレーションなどによってエネルギーの最小化を行うことが現実的な方法として考えられる。

また、 $F_2$  非線型シグマ模型や  $F_2$  baby Skyrme 模型におけるソリトンは、アルカリ土類金属の冷却原子系において現れることが予想される [62]。そのような物性現象への応用のため、本研究で得られたソリトンの安定性や動力的な性質を詳しく解析することが特に重要な今後の課題である。

# 第6章 $F_{N-1}$ Skyrme-Faddeev 模型における Hopfion

本章では、 $F_2$  非線型シグマ模型における結び目ソリトン、すなわち Hopfion を議論する。この Hopfion は、前章で得た baby skyrmion の閉じたループと解釈できるだろう。前章で我々は、 $F_2$  非線型シグマ模型における baby skyrmion が、ターゲット空間の幾何学的な条件である torsion free 条件のもとで得られることを確認した。このことから、baby skyrmion の閉じたループである Hopfion も、torsion free 条件のもとで、解が得られると予想できる。その仮説に基づき、我々はここでも torsion free 条件を満たす配位を考える。これは、ターゲット空間  $F_2$  の、2次元球面  $S^2$  とトポロジカルに等価な Kähler 部分多様体への写像を考えることに等しい。その torsion free 条件を満たす配位として、単純に埋め込まれた  $CP^1$  部分多様体への写像と、非自明な Kähler 部分多様体への写像の2種類を考える。

6.1 節では、 $F_2$  非線型シグマ模型における Hopfion を考える背景について述べる。6.2 節では、ラグランジアンやソリトンを特徴付ける位相不変量の定義や、扱いやすい場のパラメトリゼーションを与える。6.3 節では、まず一般的に Euler-Lagrange 方程式を導出する。その後、torsion free 条件を満たす2種類の配位を考え、その配位を用いて Euler-Lagrange 方程式に Hopfion 解が存在することを示す。6.4 節で、torsion free 条件を満たす2つの配位によって得られた解の差異を明確にするため、得られた解の量子的な性質を解析する。6.5 節で、この章のまとめと今後の展望について述べる。

## 6.1 研究背景

1.4.3 項で議論したように、Hopfion とは、結び目の構造を持つトポロジカルソリトンである。そのような結び目の構造は、物理学の様々な領域で現れると考えられている。たとえば、QCD [15, 7, 9] や Bose-Einstein 凝縮体 [75, 76]、超伝導体 [77]、ネマティック液晶 [78] の中に存在すると予言されている。

Hopfion を解としてもつ典型的な場の理論は、Skyrme-Faddeev 模型である。すなわち、 $(3+1)$  次元 Minkowski 時空上の  $O(3)$  非線型シグマ模型に高次微分項、すなわち Skyrme 項を加えた模型である [46, 7]。Skyrme 項は、Faddeev によって Derrick の非存在定理を回避するために導入された。具体的には、Skyrme-Faddeev 模型は次のラグランジアンで定義される：

$$\mathcal{L} = M^2 \partial_\mu \vec{n} \cdot \partial^\mu \vec{n} - \frac{1}{2e^2} (\partial_\mu \vec{n} \times \partial_\nu \vec{n})^2 \quad (6.1.1)$$

ここで、 $M$  は質量の次元をもち、 $e$  は次元をもたない定数である。場  $\vec{n}$  は、3成分の単位ベクトルである。すなわち、 $\vec{n} \cdot \vec{n} = 1$  を満たす。この模型は、 $CP^1$  Skyrme-Faddeev 模型とも呼ばれ

る。それは、ステレオグラフ射影  $S^2 \rightarrow CP^1$

$$\vec{n} = \frac{1}{\Delta} (u + u^*, -i(u - u^*), |u|^2 - 1), \quad \Delta = 1 + |u|^2 \quad (6.1.2)$$

を通して、複素スカラー場  $u$  でラグランジアンを記述できるからである。

式 (6.1.1) から得られる静的なエネルギーが有限になるためには、空間の無限遠において、 $\vec{n}$  が定数になることが要求される。したがって、有限エネルギーを持つ配位に対して、空間の無限遠を同一視することができるため、空間  $\mathbb{R}^3$  は  $S^3$  へと 1 点コンパクト化される。また、 $\vec{n}$  は 2 次元球面  $S^2$  上に値を取る。したがって、 $\vec{n}$  は  $S^3 \rightarrow S^2$  の写像を定義する。この写像のホモトピー群は、非自明、すなわち  $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$  である。そのため、場の配位は整数で分類される。その整数のことを Hopf 不変量と呼ぶ。Hopf 不変量は、 $\vec{n}$  や  $u$  などの場だけでは記述できない、nonlocal に定義される量である。Hopf 不変量をうまく定義するためには、複素ベクトル  $\vec{z} = (z_0, z_1)^T$  を導入することが便利である。ここで、 $|\vec{z}|^2 = 1$  を満たし、 $u \equiv z_1/z_0$  と定義する。ただし、 $z_1$  と  $z_0$  は両方とも複素数とする。このとき、Hopf 不変量を次のように定義することができる：

$$H_{CP^1} = \frac{1}{4\pi^2} \int \mathcal{A} \wedge d\mathcal{A}, \quad \mathcal{A} = i\vec{z}^\dagger d\vec{z} \quad (6.1.3)$$

Hopf 不変量が  $H = 1$  または  $2$  である Hopfion はトーラス状の構造を持つ。より高次の Hopf 不変量を持つ解は、軸対称性を持たず、複雑な形状の結び目になっている [48]。

このラグランジアン (6.1.1) は、Faddeev と Niemi らによって、 $SU(2)$  Yang-Mills 理論からゲージ場の分解 (Cho-Faddeev-Niemi-Shabanov 分解)

$$A_\mu = C_\mu n + i[n, \partial_\mu n] + \rho \partial_\mu n + i\sigma[n, \partial_\mu n] \quad (6.1.4)$$

を通して、その低エネルギー有効模型として導出できることが示されている [7, 8]。ここで、 $n = \vec{n} \cdot \vec{\tau}$  である。ただし、 $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$  は Pauli 行列を表す。また、 $C_\mu$  は  $U(1)$  ゲージ場で、 $\rho, \sigma$  は実スカラー場である。式 (6.1.4) の右辺は、4 次元時空上の  $SU(2)$  ゲージ場が持つ自由度と等しい数の自由度を持っている。この視点から、Skyrme-Faddeev 模型における Hopfion は、QCD における結び目ソリトンであると予想されているグルーボールを記述すると考えられている [15]。

しかしながら、QCD のゲージ群は  $SU(3)$  であるため、 $CP^1$  Skyrme-Faddeev 模型ではなく、 $SU(3)$  Yang-Mills 理論の有効模型における Hopfion がグルーボールを記述すると考えることが自然である。 $SU(3)$  Yang-Mills 理論の低エネルギー有効模型は、未だ直接導出はされていないが、低エネルギー領域において予想される対称性の破れのパターンに基づいて 2 種類の模型が提案されている。すなわち、 $CP^2$  Skyrme-Faddeev 模型 [24] と  $F_2$  Skyrme-Faddeev 模型 [9] である。それぞれ、 $CP^2$  非線型シグマ模型と  $F_2$  非線型シグマ模型に Skyrme 項を加えた模型である。 $SU(3)$  Yang-Mills 理論は、低エネルギーにおいて、 $SU(3)$  対称性が  $U(2)$  または  $U(1)^2$  対称性へと破れると予想されている。その対称性の破れ方に対応して、有効模型のターゲット空間が  $SU(3)/U(2) = CP^2$  または  $SU(3)/U(1)^2 = F_2$  となると考えられるため、それら 2 つの模型が提案された。ただし、4 次元時空上の  $SU(3)$  ゲージ場と等しい数の自由度を持つ場の分解は、対称性が  $U(1)^2$  に破れるパターンの場合しか知られていない [9, 10]。さらに、 $CP^2$  Skyrme-Faddeev 模型は、ホモトピー群が自明、すなわち  $\pi_3(CP^2) = 0$  であるため、Hopfion のようなソリトン解を持たない。そのため、ここでは  $F_2$  Skyrme-Faddeev 模型において Hopfion が解として存在

することを確認する。 $F_2$  Skyrme-Faddeev 模型では、 $\pi_3(F_2) = \mathbb{Z}$  より、Hopfion 解が存在すると予想されていたが、数学的な困難から、模型が提案されてから 20 年ほどたった今でもその存在は確認されていなかった。

また、3次元立方格子上の  $SU(3)$  反強磁性 Heisenberg 模型や高密度クォーク物質中のカラー超伝導体の秩序変数空間が旗空間  $F_2$  となることが示唆されている [79]。そのため、それらの現象を記述する有効模型として  $F_2$  Skyrme-Faddeev 模型が基礎理論から導出できると予想される。そのため、本研究で得られた結果は、QCD だけでなく  $SU(3)$  対称性を持った物性現象へ応用も考えられる。

## 6.2 模型

### 6.2.1 エネルギー，Hopf 不変量と torsion

$F_2$  Skyrme-Faddeev 模型は、次に定義するカラー場で定義される：

$$\mathbf{n}_a = Wh_aW^\dagger, \quad a = 1, 2 \quad (6.2.1)$$

ここで、 $W$  は  $SU(3)$  の要素で、行列  $h_a$  は  $su(3)$  における Cartan 生成子である。そのカラー場を用いて、 $F_2$  Skyrme-Faddeev 模型は、次の (3+1) 次元 Minkowski 時空上のラグランジアン密度で定義される [9]：

$$\mathcal{L} = \sum_{a=1}^2 \left\{ M^2 \langle \partial_\mu \mathbf{n}_a, \partial^\mu \mathbf{n}_a \rangle - \frac{1}{e^2} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \right\} \quad (6.2.2)$$

ここで、 $M$  は質量の次元をもち、 $e$  は無次元の定数である。 $\langle , \rangle$  を任意の  $A, B \in su(3)$  に対して  $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^\dagger B)$  と定義する。また、2階のテンソルは

$$F_{\mu\nu}^a = -\frac{i}{2} \sum_{b=1}^2 \langle \mathbf{n}_a, [\partial_\mu \mathbf{n}_b, \partial_\nu \mathbf{n}_b] \rangle \quad (6.2.3)$$

である。ラグランジアン (6.2.2) は、大域的な  $SU(3)$  変換  $W \rightarrow gW$ ,  $g \in SU(3)$  と局所的な  $U(1)^2$  変換  $W \rightarrow Wk$ ,  $k \in U(1)^2$  の下で不変に保たれる。このラグランジアンは、前章で扱った  $F_2$  baby Skyrme 模型のラグランジアンと、定義されている空間の次元とポテンシャルの存在を除いて同じである。

ラグランジアン (6.2.2) から得られる静的なエネルギー汎関数は

$$E = \frac{1}{4} \int d^3x \sum_{a=1}^2 \{ \langle \partial_i \mathbf{n}_a, \partial_i \mathbf{n}_a \rangle + F_{ij}^a F_{ij}^a \} \quad (6.2.4)$$

と書ける。ここで、簡単のため長さの単位  $(Me)^{-1}$  とエネルギーの単位  $4M/e$  を導入した。静的なエネルギー (6.2.4) は 2次微分項と 4次微分項を持っているため、Derrick の非存在性定理を避けることができるので、この模型に 3次元の粒子的な配位が安定に存在する可能性がある。

エネルギー汎関数 (6.2.4) を、トレースを含まないより扱い易い形に変形する。そのために、平坦接続  $U^\dagger \partial_\mu U$  を  $SU(3)$  の Cartan-Weyl 基底を用いて展開する：

$$U^\dagger \partial_\mu U = iC_\mu^a h_a + iK_\mu^p e_p \quad (6.2.5)$$

ここで、基底を次のように定義した：

$$h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_3, \quad h_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_8,$$

$$e_{\pm 1} = \frac{1}{2}(\lambda_1 \pm i\lambda_2), \quad e_{\pm 2} = \frac{1}{2}(\lambda_4 \mp i\lambda_5), \quad e_{\pm 3} = \frac{1}{2}(\lambda_6 \pm i\lambda_7)$$

この基底は正規直交性を持つので、カレントは

$$C_\mu^a = -i \langle h_a, U^\dagger \partial_\mu U \rangle, \quad K_\mu^p = -i \langle e_p, U^\dagger \partial_\mu U \rangle \quad (6.2.6)$$

と書くことができる。ここで、 $C_\mu^a$  は実であり、また  $K_\mu^{-p} = (K_\mu^p)^*$  である。また、 $k = \exp(i\theta^a h_a)$  によるゲージ変換  $U \rightarrow Uk$  のもとで、 $C_\mu^a$  はゲージ場のように変換され、 $K_\mu^p$  は荷電粒子のように変換される。すなわち、

$$C_\mu^a \rightarrow C_\mu^a + \partial_\mu \theta^a, \quad K_\mu^p \rightarrow K_\mu^p e^{-i\theta^a \alpha_a^p} \quad (6.2.7)$$

ここで、 $\alpha_a^p$  は  $e_p$  に対応するルートベクトルの  $a$  成分である。具体的には、ルートベクトルは次のように与えられる：

$$\alpha^{\pm 1} = \pm \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha^{\pm 2} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \alpha^{\pm 3} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad (6.2.8)$$

ルートベクトルの性質  $\alpha_a^{-p} = -\alpha_a^p$  と  $\sum_{a=1}^2 (\alpha_a^p)^2 = 2$  を用いて、前章と同様な計算を行うと

$$\sum_{a=1}^2 \langle \partial_i \mathbf{n}_a, \partial_i \mathbf{n}_a \rangle = 4 (K_i^1 K_i^{-1} + K_i^2 K_i^{-2} + K_i^3 K_i^{-3}) \quad (6.2.9)$$

$$\sum_{a=1}^2 F_{ij}^a F_{ij}^a = - \left( K_{[i}^1 K_{j]}^{-1} - K_{[i}^2 K_{j]}^{-2} \right)^2 - \left( K_{[i}^2 K_{j]}^{-2} - K_{[i}^3 K_{j]}^{-3} \right)^2 - \left( K_{[i}^3 K_{j]}^{-3} - K_{[i}^1 K_{j]}^{-1} \right)^2 \quad (6.2.10)$$

が得られる。ここで、 $K_{[i}^p K_{j]}^{-p} \equiv K_i^p K_j^{-p} - K_j^p K_i^{-p}$  である。したがって、エネルギー汎関数 (6.2.4) は

$$E = \int d^3x \sum_{q=1}^3 \left[ K_i^q K_i^{-q} - \frac{1}{4} \left( K_{[i}^q K_{j]}^{-q} - K_{[i}^{q+1} K_{j]}^{-(q+1)} \right)^2 \right] \quad (6.2.11)$$

と書ける。ただし、 $q$  を法 3 を持つ数とする。すなわち、 $q \equiv q+3 \pmod{3}$  とする。 $K_{[i}^p K_{j]}^{-p}$  は純虚数であるため、(6.2.11) は半正定値である。

ここでも、エネルギーの有限性は、 $\mathbf{n}_a$  は空間の無限遠で定数になることを要求する。したがって、空間  $\mathbb{R}^3$  は  $S^3$  へとコンパクト化される。よって、 $\mathbf{n}_a$  は  $S^3 \rightarrow F_2 = SU(3)/U(1)^2$  への写像を定義する。結果として、有限エネルギーを持つ配位はホモトピー群  $\pi_3(SU(3)/U(1)^2) = \mathbb{Z}$  の要素で特徴付けられる。その要素に対応するトポロジカルチャージ、すなわち Hopf 不変量は次のように与えられる：

$$H_{F_2} = \frac{1}{8\pi^2} \int \sum_{a=1}^2 C^a \wedge dC^a - \Gamma \quad (6.2.12)$$

ここで,

$$\Gamma = \frac{-i}{8\pi^2} \int \{K^1 \wedge K^2 \wedge K^3 - K^{-1} \wedge K^{-2} \wedge K^{-3}\} \quad (6.2.13)$$

である。ここでも, Hopf 不変量 (6.2.12) は nonlocal である。\$C\_\mu^a\$ はカラー場 \$\mathfrak{n}\_a\$ でだけで記述することができず, 局所的な \$U(1)^2\$ 対称性を持たないため, Hopf 不変量 (6.2.12) も局所的な対称性を持っていないことに注意する。また, (6.2.12) の 1 項目である可換 Chern-Simons (CS) 項と 2 項目である \$\Gamma\$ は, それぞれではトポロジカルな量にはなっていないことにも注意する。

Hopf 不変量 (6.2.12) は, \$\pi\_3(SU(3)/U(1)^2)\$ と \$\pi\_3(SU(3))\$ が同型であることと, Novikov の方法を用いて構成される [80]。この同型性は \$H\_{F\_2} = Q[W]\$ 意味する。ここで, \$Q[W] = \frac{1}{24\pi^2} \int \text{Tr}(W^\dagger dW)^3\$ と定義され, 写像 \$W: S^3 \to SU(3)\$ のもつ巻き数を表している。また, \$Q[W]\$ に展開された平坦接続 (6.2.5) を直接代入しても (6.2.12) 得ることができる。

Kähler 形式は, 次のように与えられる:

$$\lambda = \frac{i}{2\pi} \sum_{p=1}^3 B_p J^p \wedge J^{-p} \quad (6.2.14)$$

ここで, 係数 \$B\_p\$ は任意の実定数 [67] である。したがって, skew torsion \$T = d\lambda\$ は,

$$T = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=1}^3 B_p (J^1 \wedge J^2 \wedge J^3 + J^{-1} \wedge J^{-2} \wedge J^{-3}) \quad (6.2.15)$$

と得られる。Kähler 形式と skew torsion は, 局所的な \$U(1)^2\$ 変換のもとで不変である。一般に, (6.2.15) はゼロではない。しかし, 前章までで見たように, \$F\_2\$ 非線型シグマ模型や \$F\_2\$ baby Skyrme 模型におけるソリトン解は, torsion free 条件 \$T = 0\$, すなわち

$$\text{Re}(K^1 \wedge K^2 \wedge K^3) = 0 \quad (6.2.16)$$

のもとで得ることができた。ここでも, torsion free 条件を満たす配位を考えることにする。Torsion free 条件を満たす配位は, 空間から, \$F\_2\$ 上の \$S^2\$ とトポロジカルに等価な Kähler 多様体への写像を定義している。したがって, そのような配位を考えることは, 空間 \$\mathbb{R}^3 \sim S^3\$ からその Kähler 多様体への Hopf 写像を考えることと等しい。

## 6.2.2 場のパラメトリゼーション

解析を簡単にするために, 第 4 章で行ったように, \$SU(3)\$ 行列 \$W\$ を複素スカラー場を用いて記述する。ただし, 前章までは \$SU(3)\$ 行列を 6 (= \$\dim F\_2\$) 自由度を持つように構成したが, ここでは 8 (= \$\dim SU(3)\$) 自由度を持つように構成する。なぜならば, Hopf 不変量が nonlocal に定義されているので, ターゲット空間の情報だけでは適切に記述することができないためである。追加された 2 つの自由度を使うことで, はじめて Hopf 不変量を整数として定義することができる。

そのようなパラメトライズを行うため，ここでは次の下三角行列を考える：

$$X = \begin{pmatrix} \chi_1 & 0 & 0 \\ \chi_2 & \chi_4 & 0 \\ \chi_3 & \chi_5 & (\chi_1\chi_4)^{-1} \end{pmatrix} \in SL(3, \mathbb{C}) \quad (6.2.17)$$

ここで， $\chi_i$  は複素関数であり， $\chi_1$  と  $\chi_4$  は有限の値を取るとする<sup>1</sup>。この行列は， $SL(3, \mathbb{C})$  の要素の中で，もっとも一般的な下三角行列であり，10 自由度をもっていることに注意する。

$SU(3)$  行列を作るために，正規直交基底を構成する。行列  $X$  を  $X = (\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$  と列ベクトルを用いて書き，そのベクトルから **Gram-Schmidt** 直交化法を用いて正規直交基底を求める。**Gram-Schmidt** 直交化法より，互いに直交したベクトル  $\vec{v}_j$  を次のように定義することができる：

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \vec{c}_1, \\ \vec{v}_2 &= \vec{c}_2 - \frac{(\vec{c}_2, \vec{v}_1)}{(\vec{v}_1, \vec{v}_1)} \vec{v}_1, \\ \vec{v}_3 &= \vec{c}_3 - \frac{(\vec{c}_3, \vec{v}_2)}{(\vec{v}_2, \vec{v}_2)} \vec{v}_2 - \frac{(\vec{c}_3, \vec{v}_1)}{(\vec{v}_1, \vec{v}_1)} \vec{v}_1 \end{aligned} \quad (6.2.18)$$

このベクトル  $\vec{v}_j$  の正規化は次の2つの条件の下で達成できる：

$$\begin{aligned} |\chi_1|^2 + |\chi_2|^2 + |\chi_3|^2 &= 1, \\ |\chi_1|^2 (|\chi_4|^2 + |\chi_5|^2) + |\chi_3\chi_4 - \chi_2\chi_5|^2 &= 1 \end{aligned} \quad (6.2.19)$$

このとき，

$$W = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) \quad (6.2.20)$$

と書く。この行列は8自由度を持ったユニタリ行列である。なぜならば， $\vec{v}_j$  は正規直交基底を成しており，2つの制限(6.2.19)を満たす5つの複素関数  $\chi_i$  で記述されているからである。

最後に， $\vec{v}_i$  をターゲット空間の局所座標である複素スカラー場を用いて記述する。そのスカラー場は， $(u_1, u_2, u_3) = (\chi_2/\chi_1, \chi_3/\chi_1, \chi_5/\chi_4)$  と導入することができる。そのとき，残りの自由度を記述するパラメータは  $\vartheta_\alpha = \arg(\chi_\alpha)$  となる。ただし， $\alpha = 1, 4$  である。これらの場を用いると， $SU(3)$  行列(6.2.20)は  $W = (Z_A e^{i\vartheta_1}, Z_B e^{i\vartheta_4}, Z_C e^{-i(\vartheta_1 + \vartheta_4)})$  と書くことができる。ここで，

$$\begin{aligned} Z_A &= \frac{1}{\sqrt{\Delta_1}} \begin{pmatrix} 1 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \\ Z_B &= \frac{1}{\sqrt{\Delta_1 \Delta_2}} \begin{pmatrix} -u_1^* - u_2^* u_3 \\ 1 - u_1 u_2^* u_3 + |u_2|^2 \\ -u_1^* u_2 + u_3 + u_3 |u_1|^2 \end{pmatrix}, \\ Z_C &= \frac{1}{\sqrt{\Delta_2}} \begin{pmatrix} u_1^* u_3^* - u_2^* \\ -u_3^* \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.2.21)$$

<sup>1</sup>もし， $\chi_1 = \chi_4 = 1$  とすれば，(6.2.17) は前章までで用いた行列と一致する。



である。ただし、

$$\Delta_1 = 1 + |u_1|^2 + |u_2|^2, \quad \Delta_2 = 1 + |u_3|^2 + |u_1 u_3 - u_2|^2 \quad (6.2.22)$$

である。これらの3つベクトル(6.2.21)は、前章までで用いていた複素ベクトルと完全に一致していることに注意する。

上記のように、Hopf 不変量を記述するために8自由度を持つ  $SU(3)$  行列が必要であった。しかしながら、 $\vartheta_1$  と  $\vartheta_4$  は、エネルギーや Euler-Lagrange 方程式の計算を複雑にするにもかかわらず、打ち消し合いが起り最終的には消去されてしまう。そのため、エネルギーや Euler-Lagrange 方程式には、ラグランジアンを持つ局所対称性を利用して、 $W$  の位相因子を消去した行列を用いることが便利である。すなわち、次の行列である：

$$U = (Z_A, Z_B, Z_C) \quad (6.2.23)$$

実際、 $U$  は  $W$  を用いて  $U = W \exp[i\Theta^a h_a]$  と書ける。ここで、 $\Theta^1 = -\frac{\vartheta_1 - \vartheta_4}{\sqrt{2}}$ 、 $\Theta^2 = -\frac{\sqrt{3}(\vartheta_1 + \vartheta_4)}{\sqrt{2}}$  である。 $\exp[i\Theta^a h_a] \in U(1)^2$  より、局所的な  $U(1)^2$  対称性から、明らかにラグランジアンは  $\mathcal{L}[\mathbf{n}_a] = \mathcal{L}[\mathbf{m}_a]$  を満たしていることがわかる。ここで、 $\mathbf{m}_a = U h_a U^\dagger$  と定義した。

エネルギーや Kähler 形式も  $U$  または平坦接続  $U^\dagger \partial_\mu U$  の非対角カレントで記述できることを示す。そのために、ここでも平坦接続を Cartan-Wyle 基底を用いて展開する：

$$U^\dagger \partial_\mu U = iA_\mu^a h_a + iJ_\mu^p e_p \quad (6.2.24)$$

$U$  は  $W$  の局所変換によって得られるので、カレントの変換式(6.2.7)から

$$A_\mu^a = C_\mu^a + \partial_\mu \Theta^a, \quad J_\mu^p = K_\mu^p e^{-i\alpha_a^p \Theta^a} \quad (6.2.25)$$

と書けることがわかる。 $K_\mu^{-p} = (K_\mu^p)^*$  であることに注意すると、式(6.2.11)の中の  $K_i^p$  は  $J_i^p$  に置き換えることができる。すなわち、エネルギーは次のようにも書くことができる：

$$E = \int d^3x \sum_{q=1}^3 \left[ J_i^q J_i^{-q} - \frac{1}{4} \left( J_{[i}^q J_{j]}^{-q} - J_{[i}^{q+1} J_{j]}^{-(q+1)} \right)^2 \right] \quad (6.2.26)$$

同様にして、Kirillov-Kostant 形式や Kähler 形式、skew torsion も  $J^p = J_\mu^p dx^\mu$  を用いて次のように書くことができる：

$$F^a = -2i \sum_{p=1}^3 \alpha_a^p J^p \wedge J^{-p}, \quad (6.2.27)$$

$$\lambda = \frac{i}{2\pi} \sum_{p=1}^3 B_p J^p \wedge J^{-p}, \quad (6.2.28)$$

$$T = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=1}^3 B_p (J^1 \wedge J^2 \wedge J^3 + J^{-1} \wedge J^{-2} \wedge J^{-3}) \quad (6.2.29)$$

これ以降、Hopf 不変量の計算を除いて、 $U$  を  $W$  の代わりに用いることにする。

### 6.3 運動方程式と Hopfion 解

まずは、場に対してどんな仮定も置かずに、Euler-Lagrange 方程式を導出する。その後、torsion-free 条件 (6.2.16) を満たす配位を考え、Euler-Lagrange 方程式の解を探索する。この節でのほとんどの計算は、前章で行ったものと本質的に同じであるため、計算の細かな説明は行わないこととする。

一般の Euler-Lagrange 方程式は、大域的  $SU(3)$  対称性に基づく Noether カレント  $\mathcal{J}_\mu$  の保存則、すなわち  $\partial_\mu \mathcal{J}^\mu = 0$  で与えられる。このカレントは次のように与えられる：

$$\mathcal{J}_\mu = \sum_{a=1}^2 \left( [\mathbf{m}_a, \partial_\mu \mathbf{m}_a] - i \sum_{b=1}^2 F_{\mu\nu}^a [\mathbf{m}_a, [\mathbf{m}_b, \partial^\nu \mathbf{m}_b]] \right) \quad (6.3.1)$$

ここで、簡単のために、 $\mathbf{n}_a$  ではなく、 $\mathbf{m}_a = U h_a U^\dagger$  を用いていることに注意する。Noether カレントを  $\mathcal{J}_\mu = U \mathcal{B}_\mu U^\dagger$  と分解すると、方程式は

$$\partial_\mu \mathcal{B}^\mu + [U^\dagger \partial_\mu U, \mathcal{B}^\mu] = 0 \quad (6.3.2)$$

と書くことができる。ここで、 $\mathcal{B}_\mu$  は次のような行列である：

$$\mathcal{B}_\mu = i \sum_p \left( K_\mu^p - i \sum_{a=1}^2 \alpha_a^p F_{\mu\nu}^a K^{p\nu} \right) e_p \quad (6.3.3)$$

記述を簡略化するために、テンソル  $R_\mu^p = \sum_a \alpha_a^p A_\mu^a$  と  $G_{\mu\nu}^p = \sum_a \alpha_a^p F_{\mu\nu}^a$  を導入する。このとき、方程式 (6.3.2) を

$$\begin{aligned} & \partial^\mu (J_\mu^q - i G_{\mu\nu}^q J^{q\nu}) \\ & + i R^{q\mu} (J_\mu^q - i G_{\mu\nu}^q J^{q\nu}) + G^{q\mu\nu} J_\mu^{-q-1} J_\nu^{-q+1} = 0, \quad \forall q \equiv 1, 2, 3 \pmod{3} \end{aligned} \quad (6.3.4)$$

とその複素共役として書き下すことができる。

もっとも直接的に Hopfion の存在を確かめる方法は、場  $u_i$  に軸対称性などの対称性を持った ansatz を課し、方程式 (6.3.4) を数値的に解くことであろう。しかし、 $CP^1$  Skyrme-Faddeev 模型の場合でさえ、方程式が複雑すぎるため、この方法は回避されている [50, 15]。方程式 (6.3.4) は、 $CP^1$  Skyrme-Faddeev 模型の Euler-Lagrange 方程式よりもはるかに複雑であるので、ここでも ansatz を課して方程式を数値的に解くことは現実的ではないと思われる。

$CP^1$  Skyrme-Faddeev 模型の場合には、方程式を解くのではなく、モンテカルロ法によってエネルギー汎関数を極小値にする配位を探索する方法が採用されている。ただし、 $CP^1$  Skyrme-Faddeev 模型は 1 つの複素スカラー場で記述されるにもかかわらず、適切な解を得るには十分大きな数値計算領域が要求されるため、スーパーコンピュータを用いた計算が必要であった [48, 51]。いま考えている  $F_2$  Skyrme-Faddeev 模型は複素スカラー場 3 つで記述されており、 $CP^1$  Skyrme-Faddeev 模型との比較から、この方法でも解を得るのは相当困難であると予想される。

そこで、我々は異なる方法を用いて Hopfion の存在を確認する。すなわち、torsion free 条件を満たす配位を考えることで、Euler-Lagrange 方程式 (6.3.4) を簡略化し、それを解くという方法である。そのとき我々は、torsion free 条件を満たす配位として、 $F_2$  多様体に単純に埋め込まれた  $CP^1$  部分多様体への写像と、トポロジカルには  $S^2$  と等価である非自明な Kähler 部分多様体への写像の 2 種類の写像に対応する配位を考える。

### 6.3.1 単純な埋め込み解

まず、単純に埋め込まれた配位から考えていく。そのような配位は、3つの複素スカラー場のうち2つをゼロと置けば得られる。模型の対称性により、一般性を失うことなく、 $u_1 = u_3 = 0$ とすることができる。また、便宜上  $u_2 = u$  と書く。そのとき、複素ベクトル  $Z_a$  は次のように書くことができる：

$$Z_A = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}, \quad Z_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Z_C = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{pmatrix} -u^* \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.3.5)$$

ただし、 $\Delta = 1 + |u|^2$ 。このとき、カレント  $J_\mu^p$  は

$$J_\mu^1 = J_\mu^3 = 0, \quad J_\mu^2 = \frac{i}{\Delta} \partial_\mu u \quad (6.3.6)$$

で与えられる。したがって、skew torsion  $T$  は明らかにゼロとなる。

式 (6.3.6) を方程式 (6.3.4) に代入すると、 $q \equiv 1$  と  $3$  に対する方程式は自動的に満たされる。さらに、 $q \equiv 2$  に対する方程式は

$$\partial^\mu [\partial_\mu u - iG_{\mu\nu} \partial^\nu u] + (iR_\mu - \partial_\mu \log \Delta) (\partial^\mu u - iG^{\mu\nu} \partial_\nu u) = 0 \quad (6.3.7)$$

と簡略化される。ここで便宜上、次のように定義される  $R_\mu$  と  $G_{\mu\nu}$  を導入した：

$$R_\mu \equiv \frac{i}{\Delta} (u^* \partial_\mu u - u \partial_\mu u^*), \quad (6.3.8)$$

$$G_{\mu\nu} \equiv -\frac{2i}{\Delta^2} (\partial_\mu u \partial_\nu u^* - \partial_\mu u^* \partial_\nu u) \quad (6.3.9)$$

またこのとき、静的なエネルギーは

$$E_{\text{st}} = \int d^3x \left( \frac{\partial_i u \partial_i u^*}{\Delta^2} - \frac{(\partial_i u \partial_j u^* - \partial_i u^* \partial_j u)^2}{2\Delta^4} \right) \quad (6.3.10)$$

となる。この方程式 (6.3.7) とエネルギー (6.3.10) は、 $CP^1$  Skyrme-Faddeev 模型のものと厳密に一致している。したがって、 $CP^1$  Skyrme-Faddeev 模型において、すでに見つかっているすべての解が、 $F_2$  Skyrme-Faddeev 模型の解になっていることが示された。

続いて Hopf 不変量を計算する。まず、式 (6.3.5) を  $SU(3)$  行列  $W$  に代入し、 $Z_0 = e^{i\vartheta_1}/\sqrt{\Delta}$ 、 $Z_1 = ue^{i\vartheta_1}/\sqrt{\Delta}$  と定義する。ただし、 $\vartheta_4 = 0$  とする。このとき、

$$A = i\vec{Z}^\dagger d\vec{Z}, \quad \vec{Z} = \begin{pmatrix} Z_0 \\ Z_1 \end{pmatrix} \quad (6.3.11)$$

と定義すると、

$$C^1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}A, \quad C^2 = \sqrt{\frac{3}{2}}A \quad (6.3.12)$$

と書ける。さらに、 $K^1 \propto J^1 = 0$  より、 $\Gamma = 0$  である。したがって、単純な埋め込みである配位のもつ  $F_2$  の Hopf 不変量 (6.2.12) は、

$$H_{\text{tri}} = \frac{1}{4\pi^2} \int \mathcal{A} \wedge d\mathcal{A} \quad (6.3.13)$$

となる。すなわち、 $CP^1$  の Hopf 不変量 (6.1.3) と等しくなる。

以上で見た一致は、(6.3.5) が単純な埋め込みであることに起因すると考えられる。次では、torsion free 条件を満たすが単純な埋め込みではない配位を考え、Euler-Lagrange 方程式やその配位のもつエネルギーと Hopf 不変量について議論する。

### 6.3.2 非自明な $CP^1$ reduction

単純に埋め込まれた配位 (6.3.5) は、 $J_\mu^{\pm 1} = J_\mu^{\pm 3} = 0$ 、つまり 2 つの  $J_\mu^p$  のペアをゼロとする。ここでは、この条件をゆるめて、1 つのペアだけがゼロとなる場合、すなわち  $J_\mu^{\pm 2} = 0$  で  $J_\mu^{\pm 1}$  と  $J_\mu^{\pm 3}$  が有限である配位を考える。このとき、 $J_\mu^{\pm 2} = 0$  より、torsion-free 条件 (6.2.16) は明らかに満たされる。ここで、ゼロとするペアの選び方に結果はよらないことに注意する。それは、もし違うペアを選んでも、複素ベクトル  $Z_a$  の定義を組み替えることで同じ結果が得られるからである。

条件  $J_\mu^{\pm 2} = 0$  は、次の条件と等価である：

$$u_3 \partial_\mu u_1 - \partial_\mu u_2 = 0, \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (6.3.14)$$

この条件は、 $u_2 = g(u_1)$  と  $u_3 = g'(u_1)$  と置くと満たすことができる。ここで、' は  $u_1$  での微分を表している。以下では、この配位を考えていく。ただし、場の一価性を満たすため、 $g(u_1)$  は  $u_1$  の多項式であるとする。しかし、このように置くと未知関数は  $u_1$  と  $g$  の 2 つとなり、Euler-Lagrange 方程式 (6.3.4) は 3 本の連立方程式であるため、過剰決定系となってしまふ。そのため、(6.3.4) の  $q \equiv 1$  と  $q \equiv 3$  に対応する方程式が比例する条件を考え、独立な方程式の本数を減らす。ここで、 $q \equiv 2$  に対応する方程式は  $J_k^2 = 0$  により多くの項が消えるため、特別視する。その 2 つの方程式が比例するには、少なくとも  $\Delta_1/\Delta_2$  が定数でなければならない。  $\Delta_1 = \Delta_2$  の場合、 $g(u_1) = \sum_n a_n u^n$  として、 $\Delta_1$  と  $\Delta_2$  の中にある  $u_1$  の次数を比較すると、

$$g(u_1) = \frac{1}{2} u_1^2 e^{i\varphi} \quad (6.3.15)$$

と得られる。ただし、 $\varphi$  は任意の実数である。便宜上  $u_1 = \sqrt{2}u$ 、 $\varphi = \pi$  と選ぶと、

$$u_2 = -u^2, \quad u_3 = -u_1 = -\sqrt{2}u \quad (6.3.16)$$

と得られる。この配位は、複素スカラー場 1 つで記述できるため、ここではこれを非自明な  $CP^1$  reduction と呼ぶ。このとき、複素ベクトルは

$$Z_A = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}u \\ -u^2 \end{pmatrix}, \quad Z_B = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} -\sqrt{2}u^* \\ 1 - |u|^2 \\ -\sqrt{2}u \end{pmatrix}, \quad Z_C = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} -u^{*2} \\ \sqrt{2}u^* \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.3.17)$$

と書ける。この3つのベクトルは Bäcklund 変換で関係付いている。すなわち、

$$Z_B = \frac{P_+ Z_A}{|P_+ Z_A|}, \quad Z_C = \frac{P_+ Z_B}{|P_+ Z_B|} \quad (6.3.18)$$

と書ける。ここで、 $P_+ Z_a = \partial_u Z_a - (Z_a^\dagger \partial_u Z_a) Z_a$  とする。同様の関係は、 $F_2$  非線型シグマ模型における埋め込みでないインスタントン解に対する複素ベクトルの間にも存在している [63, 26]。

カレント  $J_\mu^p$  は次のように得られる：

$$J_\mu^1 = \frac{\sqrt{2}i}{\Delta} \partial_\mu u^*, \quad J_\mu^2 = 0, \quad J_\mu^3 = -\frac{\sqrt{2}i}{\Delta} \partial_\mu u^* \quad (6.3.19)$$

このカレント (6.3.19) を Euler-Lagrange 方程式 (6.3.4) に代入すると  $q \equiv 2$  が自動的に満たされることがわかる。それに加え、(6.3.19) の下では、 $R_\mu^1 = R_\mu^3 = -R_\mu$  と  $G_{\mu\nu}^1 = G_{\mu\nu}^3 = -G_{\mu\nu}$  が成り立つ。この関係から、方程式 (6.3.4) の  $q \equiv 1$  と 3 に対応するものは、 $R_\mu$  と  $G_{\mu\nu}$  が実であることに注意すると、単純に埋め込まれた配位に対する方程式 (6.3.7) の複素共役へと帰着することが簡単に確かめられる。したがって、非自明な  $CP^1$  reduction である配位 (6.3.17) に対しても、 $CP^1$  Skyrme-Faddeev 模型における Hopfion 解を記述する場合  $u$  が Euler-Lagrange 方程式の解を与える。

2つのクラスの配位 (6.3.5) と (6.3.17) に対する Euler-Lagrange 方程式は完全に一致する。一方で、エネルギーは比例関係にある。すなわち、次のような関係がある：

$$E_{\text{nontri}}[u] = 4E_{\text{tri}}[u] \quad (6.3.20)$$

同様に、 $u = Z_1/Z_0$ ,  $e^{i\vartheta_1} = Z_0^2/|Z_0|^2$  と定義し、 $\vartheta_4 = 0$  とすると  $C^1 = -\sqrt{2}A$ ,  $C^2 = \sqrt{6}A$  であるため、Hopf 不変量は

$$H_{\text{nontri}} = 4H_{\text{tri}} = \frac{1}{\pi^2} \int \mathcal{A} \wedge d\mathcal{A} \quad (6.3.21)$$

と得られる。ここで、 $K^{\pm 2} \propto J^{\pm 2} = 0$  より  $\Gamma = 0$  であることを用いた。

これらの関係 (6.3.20), (6.3.21) から、非自明な  $CP^1$  reduction おける  $H_{\text{nontri}} = 4n$  をもつ Hopfion は、単純に埋め込まれた配位における  $H_{\text{tri}} = n$  を持った4つの Hopfion が、結合エネルギーゼロで重なり合っている状態と解釈できるだろう。このような状態は  $SU(N)$  Skyrme 模型においても現れることが報告されている [81]。ただし、結合エネルギーがゼロであることは、4つの Hopfion 間に働く相互作用がちょうどつりあっていることを意味しているだけであり、相互作用が全くないわけではない。なぜならば、方程式 (6.3.7) の解は BPS 解ではないからである。したがって、エネルギーを変化させることなく、1つの Hopfion を引き離すことはできないと考えられる。

## 6.4 Hopfion の集団座標量子化

前節では、2つのクラスの配位に対する Euler-Lagrange 方程式が同じ関数  $u$  で解かれることがわかった。そして、2つのクラスの配位がもつエネルギーや Hopf 不変量は比例しており、両者は等価ではないが、とても似た性質を持っているように見える。

この節では、2つの配位が量的にはより明確に異なる性質を持っていることを示す。量的な性質を議論するために、ゼロモードの集団座標量子化という手法を用いる。集団座標量子化とは、まず模型の持つ大局的対称性に基づいた断熱的な回転を考え、その回転の角運動量を演算子に置き換える。そして、その角運動量演算子を含んだハミルトニアン固有値を求めることで、ソリトンの量的な質量スペクトルを計算するというものである。

ラグランジアン密度 (6.2.2) のもつ大局的な  $SU(3)$  対称性に基づいて、次のような断熱的な時間依存する変換を考える：

$$\mathbf{m}_a(\vec{x}) \rightarrow \mathbf{m}_a(t, \vec{x}) = \beta(t)\mathbf{m}_a(\vec{x})\beta^\dagger(t) \quad (6.4.1)$$

ここで、 $\beta(t) \in SU(3)$  とする。このとき、ラグランジアンは

$$L = -E_{\text{cl}} + \frac{r_0^2}{4} \int d^3x \left[ \text{Tr} \left( \left[ \beta^\dagger \dot{\beta}, \mathbf{m}_a \right] \left[ \beta^\dagger \dot{\beta}, \mathbf{m}_a \right] \right) + 2F_{0i}^a F_{0i}^a \right] \quad (6.4.2)$$

と書ける。ここで、 $E_{\text{cl}}$  は Hopfion の古典的なエネルギーである。また、 $\dot{\beta} = d\beta/dt$  と定義し、

$$F_{0j}^a = -\frac{i}{2} \text{Tr} \left( \mathbf{m}_a \left[ \left[ \beta^\dagger \dot{\beta}, \mathbf{m}_b \right], \partial_j \mathbf{m}_b \right] \right) \quad (6.4.3)$$

である。 $r_0$  は長さのスケールで  $r_0 = (Me)^{-1}$  である。

式 (6.4.2) の積分を有限に保つためには、 $\beta^\dagger \dot{\beta}$  と  $\mathbf{m}_a$  が空間の無限遠で互いに可換でなければいけない。場  $\mathbf{m}_a(\vec{x})$  は無限遠において、 $su(3)$  の Cartan 部分代数である  $u(1) \times u(1)$  に属する定数行列になるため、 $\beta^\dagger \dot{\beta}$  も  $u(1) \times u(1)$  に値をとらなければならない。したがって、次のように定義できる：

$$\beta^\dagger \dot{\beta} = \sqrt{2}i \left( \frac{\omega_1}{2} h_1 + \frac{\omega_2}{\sqrt{3}} h_2 \right) \quad (6.4.4)$$

ここで、 $\omega_a$  はターゲット空間内の回転の角速度を表している。式 (6.4.4) の係数は、 $SU(3)$  Euler 角の定義 [82] と矛盾しないように決定した。

量的なラグランジアン (6.4.2) は、 $\boldsymbol{\omega}^T = (\omega_1, \omega_2)$  と定義すると、 $\boldsymbol{\omega}$  の2次形式で書ける。つまり、

$$L = -E_{\text{cl}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathcal{I} \boldsymbol{\omega} \quad (6.4.5)$$

である。ここで、

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{12} & I_{22} \end{pmatrix} \quad (6.4.6)$$

とした。慣性モーメントの具体形は、次のように得られる：

• 非自明な  $CP^1$  reduction の場合

$$\begin{aligned}
I_{11} &= 2r_0^2 \int d^3x \frac{1}{\Delta^4} [(10 - 7|u|^2 + 10|u|^4) |u|^2 \\
&\quad + 4(7 - 13|u|^2 + 7|u|^4) (\partial_i \log \Delta)^2] \\
I_{12} &= -4r_0^2 \int d^3x \frac{1}{\Delta^4} (3 - \Delta) (3 - 2\Delta) \\
&\quad \times [|u|^2 + 4(\partial_i \log \Delta)^2] \\
I_{22} &= 8r_0^2 \int d^3x \frac{1}{\Delta^4} [(2 + |u|^2 + 2|u|^4) |u|^2 \\
&\quad + 4(1 - |u|^2 + |u|^4) (\partial_i \log \Delta)^2].
\end{aligned} \tag{6.4.7}$$

• 単純に埋め込まれた  $CP^1$  への写像の場合

$$I_{11} = \frac{I_{12}}{2} = \frac{I_{22}}{4} = 2r_0^2 \int d^3x \frac{|u|^2 + (\partial_i \log \Delta)^2}{\Delta^2} \tag{6.4.8}$$

正準運動量を

$$P_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \omega_i} = I_{ij} \omega_j, \quad i, j = 1, 2 \tag{6.4.9}$$

と定義する。ラグランジアン (6.4.2) の Legendre 変換により、ハミルトニアンを  $\mathcal{H} = \omega_i P_i - L$  と得る。非自明  $CP^1$  reduction の場合には、ハミルトニアンが次のように得ることができる：

$$\mathcal{H} = E_{\text{cl}} + \frac{1}{2 \text{Det} \mathcal{I}} \{I_{22} P_1^2 - 2I_{12} P_1 P_2 + I_{11} P_2^2\} \tag{6.4.10}$$

ただし、角運動量演算子は、 $su(3)$  の Cartan 部分代数に基づくため、 $[P_1, P_2] = 0$  を満たすと仮定した。このとき、演算子はすでに対角化されているため、ハミルトニアンを適切な波動関数に作用させれば、Hopfion にそれぞれの運動量演算子の固有値、つまり 2 つの量子数を持たせることができる。

一方で、単純な埋め込みの場合は、1 つの演算子しか定義することができない。なぜならば、 $SU(3)$  行列  $U$  は交換関係  $[U, h_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} h_2] = 0$  を満たすため、

$$[\dot{\beta}, \mathbf{m}_a] = \frac{i(\omega_1 + 2\omega_2)}{\sqrt{2}} [h_1, \mathbf{m}_a] \tag{6.4.11}$$

となってしまうからである。この式は、単純な埋め込みである Hopfion のターゲット空間内での回転は、1 つの軸の周りのみで起こることを意味する。実際、式 (6.4.9) より、

$$P_1 = \frac{P_2}{2} = I(\omega_1 + 2\omega_2) \equiv P \tag{6.4.12}$$

を得る。ここで、簡単のために  $I_{11} = I$  と書いた。そのため、ハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = E_{\text{cl}} + \frac{P^2}{2I} \tag{6.4.13}$$

と得られる。したがって、(6.4.13) を適切な波動関数に作用させると、演算子  $P$  の固有値を Hopfion の持つ量子数と定義することができる。Hopfion が 1 つだけ量子数をもつという結果は、 $CP^1$  Skyrme-Faddeev 模型における Hopfion の性質と一致している。

以上より、2つのクラスの Hopfion の量子的な性質は、少なくとも定性的には大きく異なることがわかった。これは、両者の配位がもつ対称性の違いを反映したものだと考えられる。また、少なくとも集団座標量子化の枠組みでは、単純な埋め込みである Hopfion は、量子的な性質も  $CP^1$  Skyrme-Faddeev 模型における Hopfion と同じであることが示された。

## 6.5 6章のまとめ

この章では、 $F_2$  Skyrme-Faddeev 模型における Hopfion について議論した。 $F_2$  Skyrme-Faddeev 模型は、3+1次元時空上の  $F_2$  非線型シグマ模型に Skyrme 項を加えた模型であり、 $CP^1$  Skyrme-Faddeev 模型の対称性を  $SU(3)$  へ拡張した模型である。したがって、この模型の Hopfion は、グルーボールを記述する有力な候補となっている。

我々は、前章までの得られた結果から、この模型においても、ソリトン解は torsion free 条件を満たすと予想し、その仮説に基づいて torsion free 条件を満たす2種類の配位を ansatz として採用した。その2種類とは、単純に埋め込まれた  $CP^1$  部分多様体への写像と、非自明な Kähler 部分多様体への写像に対応する配位である。非自明な Kähler 部分多様体への写像に対応する配位は、Bäcklund 変換によっても構成することが可能であった。2種類の配位とも、1つの複素スカラー場で記述され、そのスカラー場に対する Euler-Lagrange 方程式は  $CP^1$  Skyrme-Faddeev 模型のものと同じであった。したがって、 $CP^1$  Skyrme-Faddeev 模型で得られた Hopfion 解の配位を用いて、 $F_2$  Skyrme-Faddeev 模型における Hopfion 解を記述できることがわかった。それら2種類の配位に対して、集団座標量子化の方法を用いて、量子的な性質を調べた。古典的には、2種類の配位はとても似た性質をもっているように見えるが、量子的には大きく異なっていた。すなわち、単純な埋め込みの配位は、量子数を1つしか持つことができないが、非自明な Kähler 部分多様体への写像に対応する配位は2種類の量子数を持つことができた。この性質は、両者の持つ対称性の違いに起因していると考えられる。

今後の課題としては、本研究で得られた Hopfion 解を用いた、グルーボールの質量スペクトルの計算があげられるだろう。そのために、Hopfion が持つことができる量子数の物理的な意味を明らかにし、グルーボールのもつ量子数と対応をつけることが必要である。また、解の安定性や動力学的な性質を明らかにすることも、グルーボールの性質を理解するために重要になるだろう。



## まとめ

本論文では、 $SU(N)$  対称性をもつ非線型シグマ模型である、 $CP^{N-1}$  非線型シグマ模型と  $F_{N-1}$  非線型シグマ模型におけるソリトン解について議論した。第 1 章では、トポロジカルソリトンがもつ基本的な性質と、 $SU(2)$  対称性をもっている  $O(3)$  非線型シグマ模型におけるソリトン解の導入をした。2 章では、 $CP^{N-1}$  非線型シグマ模型において、これまで知られていたソリトン解についてのレビューを行った。それらのソリトン解は、すべてスケール不変性を持った解であった。

第 3 章では、 $CP^{N-1}$  非線型シグマ模型にポテンシャルと Skyrme 項を加えることで模型のスケール不変性を破り、スケール不変性を持たない解の構築を行った。スケール不変性を持つ解は動的に不安定であり、実空間に現れるソリトンはスケール不変性を持たないため、スケール不変性を持たない解の構築はソリトンの物理的応用のために重要である。解の（非）存在はポテンシャルの構造に強く依存していた。すなわち、ポテンシャルが、模型の局所対称性を保存していなければ、解が存在しなかった。局所対称性の明示的な破れは、模型のターゲット空間を変更してしまうため、ホモトピー群が非自明である写像が定義できなくなってしまうためだと考えられる。

$F_{N-1}$  非線型シグマ模型では、スケール不変性を持つ解でさえ、 $CP^1$  非線型シグマ模型の解を単純に埋め込んだものしか知られていなかった。そのため第 4 章では、 $F_{N-1}$  非線型シグマ模型における、より一般的な解の導出を行った。この模型のエネルギーの下限は、トポロジカルな量だけで与えられていないため、従来の BPS の方法で我々が見出した解を導出することはできない。しかしながら、この解はエネルギーの下限を満たす条件に加え、torsion free 条件という条件を同時に満たせば得られることを明らかにした。この解は、模型がもつエネルギーの下限を満たすにもかかわらず、その下限がトポロジカルなものではないため、鞍点解であった。

第 5 章では、 $F_2$  非線型シグマ模型において、ポテンシャルと Skyrme 項を加えることで、スケール不変性を持つ解の構築を行った。ポテンシャルは、第 3 章で得た知見により、模型の対称性を壊さないものを構成し、導入した。さらに、torsion free 条件が、模型に含まれる相互作用の性質ではなく、ターゲット空間の幾何学的な性質から現れる条件であることに着目し、ポテンシャルや Skyrme 項を加えた模型においても、ソリトン解は torsion free 条件を満たしているという仮説を立てた。その仮説に基づき、torsion free 条件を満たす 2 種類の配位を考えた。2 種類とは、 $F_2$  非線型シグマ模型における単純な埋め込み解と鞍点解に対応する配位である。それらを ansatz として用いることで、方程式が簡略化され、解の構築を行うことができた。

第 6 章では、 $F_2$  Skyrme-Faddeev 模型、すなわち  $F_2$  非線型シグマ模型に Skyrme 項を加えた模型における Hopfion の構築を行った。ここでも、torsion free 条件を満たす 2 種類の配位を ansatz として採用した。それらの ansatz を Euler-Lagrange 方程式に代入すると、 $CP^1$  Skyrme-Faddeev 模型の Euler-Lagrange 方程式に帰着した。 $CP^1$  Skyrme-Faddeev 模型における Hopfion 解はすでに知られているので、我々は  $F_2$  Skyrme-Faddeev 模型にも Hopfion 解が存在することを示した

といえる。また、集団座標量子化の手法を用いて、得られた Hopfion 解の量子的な性質を議論した。単純な埋め込み解は量子数を 1 つしか持つことができないが、 $F_2$  非線型シグマ模型の鞍点解に対応する配位は 2 つの量子数を持つことが許される。量子数の数は、解の持つ局所変換の自由度の数と一致している。したがって、2 種類の配位とも同じ方程式に帰着し、古典的には似た性質を持っていると考えられるが、量子的な性質は、解のもつ対称性の違いに起因して、はっきりと異なっていた。

$CP^{N-1}$  非線型シグマ模型や  $F_{N-1}$  非線型シグマ模型は、 $SU(N)$  Heisenberg 模型や  $SU(N)$  Yang-Mills 理論から導出できるため、本研究で構築されたソリトン解は  $SU(N)$  対称性をもつ磁性相や QCD での理解を深めることに貢献するだろう。特に、 $F_2$  Skyrme-Faddeev 模型における Hopfion を用いて、グルーボールの性質を明らかにすることに重要な役割を果たすだろう。また、冷却原子を用いた実験において  $SU(N)$  Heisenberg 模型で記述される系が実現したことから、その有効模型におけるソリトンである、本論文で構築したソリトンが将来的に観測されると期待される。さらに、本研究で得られたポテンシャルの構成法や torsion free 条件などのソリトンの構築方法についての知見は、様々なソリトン模型に適用できると考えられる。最近では、理論の摂動論から非摂動効果を理解するリサージェンス理論において、鞍点解が重要な役割を果たすことが明らかになっており、torsion free 条件やノントポロジカルなエネルギーの下限を用いて鞍点解を統一的に構築する方法の確立は興味深い課題となるだろう。

# 謝辞

本研究を進めるにあたり、多くの方々からご指導やご支援をしていただきました。

学部生の頃からこれまで、忍耐強くご指導していただいた、指導教員である澤渡信之准教授に心より感謝いたします。本研究を遂行することができたのは、先生のご指導と励ましのおかげです。

本研究の共同研究者である、ブラジル・サンタカタリーナ州立大学の Pawel Klimas 准教授、東京理科大学の卒業生である玉置裕太さん、和田溪扶くんに深く感謝いたします。さらに、本研究を進めるにあたりアドバイスを頂いた以下の方々（アルファベット順）に感謝いたします：赤城裕博士、Dimitri Bykov 博士、Luiz Ferreira 教授、Steffen Krusch 博士、三角樹弘博士、中村厚准教授、新田宗土教授、佐々木隆教授、戸田晃一教授、植田浩明博士、Wojtek Zakrzewski 教授。

本論文の審査を引き受けていただいた東京理科大学の齋藤晃一教授、半澤克郎教授、鈴木英之教授、東平光生教授、北里大学の中村厚准教授には、原稿を精読し、貴重なご意見を頂きました。深く感謝いたします。

ブラジル・サンパウロ大学サンカルロス校の Luiz Ferreira 教授には、1年間の滞在を快く受け入れていただき、熱心にご指導していただいたことに、深く感謝いたします。共同研究を通して、物理や数学への向き合い方を学ぶことができました。また、サンパウロ大学サンカルロス校の L. Leandro くんには、滞在中にとっても親切に接していただくことを感謝いたします。

北里大学の中村厚准教授と富山県立大学の戸田晃一教授には、有益なアドバイスや議論をしていただいております。澤渡研究室の先輩であった、板谷悟さん、齋藤歩記さん、武居洗希さん、玉置裕太さん、吉井弘明さんには公私ともに大変お世話になりました。ありがとうございます。また、共同研究をした飯田将也くん、金城佳世さん、和田溪扶くんをはじめ、澤渡研の同期・後輩からも議論を通して様々なことを教えていただきました。心よりお礼を申し上げます。

最後に、これまで支えてくれた家族に感謝します。

本研究の一部は、JSPS 科研費 JP18J12275 の助成をうけたものです。

## 参考文献

- [1] E. H. Fradkin, *Field Theories of Condensed Matter Physics*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2013.
- [2] I. Affleck, The Quantum Hall Effect,  $\sigma$  Models at  $\theta = \pi$  and Quantum Spin Chains, *Nucl. Phys. B* **257** (1985) 397–406.
- [3] S. N. Read and S. Sachdev, Valence-bond and spin-Peierls ground states of low-dimensional quantum antiferromagnets, *Phys. Rev. Lett.* **62** (1989) 1694–1697.
- [4] D. Bykov, Haldane limits via Lagrangian embeddings, *Nucl. Phys. B* **855** (2012) 100–127.
- [5] A. Smerald, N. Shannon, Theory of spin excitations in a quantum spin-nematic state, *Phys. Rev. B* **88** (2013) 184430.
- [6] T. A. Tóth, A. M. Läuchli, F. Mila and K. Penc, Three-sublattice ordering of the  $su(3)$  heisenberg model of three-flavor fermions on the square and cubic lattices, *Phys. Rev. Lett.* **105** (2010) 265301.
- [7] L. D. Faddeev and A. J. Niemi, Partially dual variables in  $SU(2)$  Yang-Mills theory, *Phys. Rev. Lett.* **82** (1999) 1624–1627.
- [8] H. Gies, Wilsonian effective action for  $SU(2)$  Yang-Mills theory with Cho-Faddeev-Niemi-Shabanov decomposition, *Phys. Rev. D* **63** (2001) 125023.
- [9] L. D. Faddeev and A. J. Niemi, Partial duality in  $SU(N)$  Yang-Mills theory, *Phys. Lett. B* **449** (1999) 214–218.
- [10] J. Evslin, S. Giacomelli, K. Konishi and A. Michelini, Nonabelian Faddeev-Niemi Decomposition of the  $SU(3)$  Yang-Mills Theory, *JHEP* **06** (2011) 094.
- [11] A. M. Polyakov and A. A. Belavin, Metastable States of Two-Dimensional Isotropic Ferromagnets, *JETP Lett.* **22** (1975) 245–248, [*Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 22,503(1975)].
- [12] B. M. A. G. Piette, B. J. Schroers and W. J. Zakrzewski, Multi - solitons in a two-dimensional Skyrme model, *Z. Phys. C* **65** (1995) 165–174.
- [13] P. Eslami, W. J. Zakrzewski, and M. Sarbishaei, Baby Skyrme models for a class of potentials, *Nonlinearity* **13** (2000) 1867.

- 
- [14] N. Nagaosa and Y. Tokura, Topological properties and dynamics of magnetic skyrmions, *Nature nanotechnology* **8** (2013) 899.
- [15] L. D. Faddeev and A. J. Niemi, Knots and particles, *Nature* **387** (1997) 58.
- [16] Z. F. Ezawa, *Quantum Hall effects: Field theoretical approach and related topics*, World Scientific, Singapore, Singapore, 2000.
- [17] K. Hashimoto, *D-brane: Superstrings and new perspective of our world*, Springer, Heidelberg, Germany, 2012.
- [18] N. S. Manton and P. Sutcliffe, *Topological solitons*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2004.
- [19] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics*, Hilger, Bristol, UK, 1990.
- [20] R. Rajaraman, *SOLITONS AND INSTANTONS. AN INTRODUCTION TO SOLITONS AND INSTANTONS IN QUANTUM FIELD THEORY*, Elsevier, Amsterdam, Netherlands: North-holland, 1982.
- [21] A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2000.
- [22] V. L. Golo and A. M. Perelomov, Solution of the Duality Equations for the Two-Dimensional SU(N) Invariant Chiral Model, *Phys. Lett. B* **79** (1978) 112–113.
- [23] A. M. Din and W. J. Zakrzewski, General Classical Solutions in the  $CP^{(n-1)}$  Model, *Nucl. Phys. B* **174** (1980) 397–406.
- [24] L. A. Ferreira and P. Klimas, Exact vortex solutions in a  $CP^N$  Skyrme-Faddeev type model, *JHEP* **10** (2010) 008.
- [25] Y. Amari, P. Klimas, N. Sawado and Y. Tamaki, Potentials and the vortex solutions in the  $CP^N$  Skyrme-Faddeev model, *Phys. Rev. D* **92** (2015) 045007.
- [26] Y. Amari and N. Sawado, BPS sphalerons in the  $F_2$  nonlinear sigma model, *Phys. Rev. D* **97** (2018) 065012.
- [27] Y. Amari and N. Sawado,  $SU(3)$  Knot Solitons: Hopfions in the  $F_2$  Skyrme-Faddeev-Niemi model, *Phys. Lett. B* **784** (2018) 294–300.
- [28] R. F. Dashen, B. Hasslacher and A. Neveu, Nonperturbative Methods and Extended Hadron Models in Field Theory 2. Two-Dimensional Models and Extended Hadrons, *Phys. Rev. D* **10** (1974) 4130–4138.
- [29] S. R. Coleman, Q Balls, *Nucl. Phys. B* **262** (1985) 263, [Erratum: *Nucl. Phys. B* **269** (1986) 744].

- 
- [30] R. Bott and L. W. Tu, *Differential forms in algebraic topology*, Springer-Verlag, New York, USA, 1982.
- [31] T. H. R. Skyrme, A Nonlinear field theory, *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **260** (1961) 127–138.
- [32] G. H. Derrick, Comments on nonlinear wave equations as models for elementary particles, *J. Math. Phys.* **5** (1964) 1252–1254.
- [33] A. Bogdanov, New localized solutions of the nonlinear field equations, *JETP Letters* **62** (1995) 247–251.
- [34] F. D. M. Haldane, Continuum dynamics of the 1-D Heisenberg antiferromagnetic identification with the  $O(3)$  nonlinear sigma model, *Phys. Lett. A* **93** (1983) 464–468.
- [35] M. Haberichter, *Classically Spinning and Isospinning Non-Linear  $\sigma$ -Model Solitons*, The University of Manchester Thesis.
- [36] L. A. Ferreira, Exact vortex solutions in an extended Skyrme-Faddeev model, *JHEP* **05** (2009) 001.
- [37] O. Alvarez, L. A. Ferreira and J. Sanchez Guillen, A New approach to integrable theories in any dimension, *Nucl. Phys. B* **529** (1998) 689–736.
- [38] L. A. Ferreira, J. Jäykkä, N. Sawado and K. Toda, Vortices in the Extended Skyrme-Faddeev Model, *Phys. Rev. D* **85** (2012) 105006.
- [39] S. Mühlbauer, B. Binz, F. Jonietz, C. Pfleiderer, A. Rosch, A. Neubauer, R. Georgii and P. Böni, Skyrmion lattice in a chiral magnet, *Science* **323** (2009) 915–919.
- [40] J. Beille, J. Voiron and M. Roth, Long period helimagnetism in the cubic b20 fexco1-x si and coxmn1-x si alloys, *Solid state communications* **47** (1983) 399–402.
- [41] S. Heinze, K. Von Bergmann, M. Menzel, J. Brede, A. Kubetzka, R. Wiesendanger, G. Bihlmayer and S. Blügel, Spontaneous atomic-scale magnetic skyrmion lattice in two dimensions, *Nature Physics* **7** (2011) 713.
- [42] X. Z. Yu, Y. Onose, N. Kanazawa, J. H. Park, J. H. Han, Y. Matsui, N. Nagaosa and Y. Tokura, Real-space observation of a two-dimensional skyrmion crystal, *Nature* **465** (2010) 901.
- [43] K. Shibata, X. Z. Yu, T. Hara, D. Morikawa, N. Kanazawa, K. Kimoto, S. Ishiwata, Y. Matsui and Y. Tokura, Towards control of the size and helicity of skyrmions in helimagnetic alloys by spin-orbit coupling, *Nature nanotechnology* **8** (2013) 723.
- [44] N. Nagaosa, X. Z. Yu and Y. Tokura, Gauge fields in real and momentum spaces in magnets: monopoles and skyrmions, *Phil. Trans. R. Soc. A* **370** (2012) 5806–5819.
- [45] S. Zhang and S. S.-L. Zhang, Generalization of the Landau-Lifshitz-Gilbert equation for conducting ferromagnets, *Phys. Rev. Lett.* **102** (2009) 086601.

- 
- [46] L. D. Faddeev, Quantization of Solitons,, Princeton preprint IAS-75-QS70.
- [47] D. A. Nicole, Solitons With Nonvanishing Hopf Index, *J. Phys. G* **4** (1978) 1363.
- [48] R. A. Battye and P. M. Sutcliffe, Knots as stable soliton solutions in a three-dimensional classical field theory, *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 4798–4801.
- [49] L. A. Ferreira, N. Sawado and K. Toda, Static Hopfions in the extended Skyrme-Faddeev model, *JHEP* **11** (2009) 124.
- [50] J. Gladikowski and M. Hellmund, Static solitons with nonzero Hopf number, *Phys. Rev. D* **56** (1997) 5194–5199.
- [51] R. A. Battye and P. Sutcliffe, Solitons, links and knots, *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **455** (1999) 4305–4331.
- [52] J. Hietarinta and P. Salo, Faddeev-Hopf knots: Dynamics of linked unknots, *Phys. Lett. B* **451** (1999) 60–67.
- [53] J. Hietarinta and P. Salo, Ground state in the Faddeev-Skyrme model, *Phys. Rev. D* **62** (2000) 081701.
- [54] D. Foster, Massive Hopfions, *Phys. Rev. D* **83** (2011) 085026.
- [55] P. Sutcliffe, Instantons and the buckyball, *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **460** (2004) 2903–2912.
- [56] A. D’Adda, M. Luscher and P. Di Vecchia, A  $1/n$  Expandable Series of Nonlinear Sigma Models with Instantons, *Nucl. Phys. B* **146** (1978) 63–76.
- [57] K. Kondo, S. Kato, A. Shibata and T. Shinohara, Quark confinement: Dual superconductor picture based on a non-Abelian Stokes theorem and reformulations of Yang-Mills theory, *Phys. Rept.* **579** (2015) 1–226.
- [58] H. Eichenherr and M. Forger, More about non-linear sigma models on symmetric spaces, *Nucl. Phys. B* **164** (1980) 528–535, [Erratum: *Nucl. Phys. B* **282** (1987) 745].
- [59] L. A. Ferreira and E. E. Leite, Integrable theories in any dimension and homogeneous spaces, *Nucl. Phys. B* **547** (1999) 471–500.
- [60] H. Eichenherr and M. Forger, On the Dual Symmetry of the Nonlinear Sigma Models, *Nucl. Phys. B* **155** (1979) 381–393.
- [61] A. M. Perelomov, CHIRAL MODELS: GEOMETRICAL ASPECTS, *Phys. Rept.* **146** (1987) 135–213.
- [62] H. T. Ueda, Y. Akagi and N. Shannon, Quantum solitons with emergent interactions in a model of cold atoms on the triangular lattice, *Phys. Rev. A* **93** (2016) 021606.

- 
- [63] D. Bykov, Classical solutions of a flag manifold  $\sigma$ -model, *Nucl. Phys. B* **902** (2016) 292–301.
- [64] D. Bykov, The geometry of antiferromagnetic spin chains, *Commun. Math. Phys.* **322** (2013) 807–834.
- [65] M. Lajkó, K. Wamer, F. Mila and I. Affleck, Generalization of the Haldane conjecture to  $SU(3)$  chains, *Nucl. Phys. B* **924** (2017) 508–577.
- [66] R. F. Picken, The Duistermaat-heckman Integration Formula on Flag Manifolds, *J. Math. Phys.* **31** (1990) 616.
- [67] D. Bykov, Integrable properties of sigma-models with non-symmetric target spaces, *Nucl. Phys. B* **894** (2015) 254–267.
- [68] L. A. Ferreira, P. Klimas and W. J. Zakrzewski, Some (3+1) dimensional vortex solutions of the  $CP^N$  model, *Phys. Rev. D* **83** (2011) 105018.
- [69] L. A. Ferreira, P. Klimas and W. J. Zakrzewski, Properties of some (3+1) dimensional vortex solutions of the  $CP^N$  model, *Phys. Rev. D* **84** (2011) 085022.
- [70] A. M. Din and W. J. Zakrzewski, Properties of General Classical  $CP^{(n-1)}$  Solutions, *Phys. Lett. B* **95** (1980) 419–422.
- [71] J. Jäykkä and M. Speight, Easy plane baby skyrmions, *Phys. Rev. D* **82** (2010) 125030.
- [72] J. Jäykkä, M. Speight and P. Sutcliffe, Broken Baby Skyrmions, *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **468** (2012) 1085–1104.
- [73] M. Kobayashi and M. Nitta, Fractional vortex molecules and vortex polygons in a baby Skyrme model, *Phys. Rev. D* **87** (2013) 125013.
- [74] M. Kobayashi and M. Nitta, Sine-Gordon kinks on a domain wall ring, *Phys. Rev. D* **87** (2013) 085003.
- [75] E. Babaev, L. D. Faddeev and A. J. Niemi, Hidden symmetry and knot solitons in a charged two-condensate Bose system, *Phys. Rev. B* **65** (2002) 100512.
- [76] Y. Kawaguchi, M. Nitta and M. Ueda, Knots in a Spinor Bose-Einstein Condensate, *Phys. Rev. Lett.* **100** (2008) 180403, [Erratum: *Phys. Rev. Lett.* **101** (2008) 029902].
- [77] E. Babaev, Knotted solitons in triplet superconductors, *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002) 177002.
- [78] P. J. Ackerman and I. I. Smalyukh, Diversity of Knot Solitons in Liquid Crystals Manifested by Linking of Preimages in Torons and Hopfions, *Phys. Rev. X* **7** (2017) 011006.
- [79] M. Kobayashi, E. Nakano and M. Nitta, Color Magnetism in Non-Abelian Vortex Matter, *JHEP* **06** (2014) 130.



- [80] M. Kisielowski, Integral expression for a topological charge in the Faddeev-Niemi nonlinear sigma model, *J. Phys. A* **49** (2016) 175206.
- [81] T. A. Ioannidou, B. Piette and W. J. Zakrzewski, Spherically symmetric solutions of the SU(N) skyrme models, *J. Math. Phys.* **40** (1999) 6223–6233.
- [82] T. J. Nelson, A Set of harmonic functions for the group SU(3) as specialized matrix elements of a general final transformation, *J. Math. Phys.* **8** (1967) 857–863.