新輯教育數學講座

數學ノ鑑賞

掛谷宗一

數學教育の再建

小倉金之助

小學校檢定試驗數學科研究要領

鹿谷義一

合資會社 共立社

數學ノ鑑賞

東京帝國大學教授
東京文理科大學教授
理學博士

掛谷宗一

目　　次

數學ノ鑑賞

I 美的價値

數學ノモツ實用上ノ價値ヤ教育上ノ意義ニ就テハ，アラユル機會ニアラユル學者ニヨツテ十二分ニ論ジ盡サレテ居ルカラ，之等ニ關聯シタオ話ハ此際殊更ニ差控ヘルコトニスル．ムシロ餘リ論議サレナイ方面デ聊カ數學ノタメニ注意ヲ喚起シテ置キタイコトガアル．ソレハ數學ノ美的要素ナルモノニ就テヾアル．

凡ソ如何ナル學術技藝ニ於テモ，ソレニハ直接ナ社會的價値ヤ間接ナ訓育的價値ノ他ニ，尙其學問技術ヲ趣味付ケル所ノ所謂美的價値ガ多分ニ存在スル．此美的要素ハ其學問ニ取ツテ單ナル副産的ナ興味トカ色彩トカ云フモノデナク，研究者ニ取ツテ單ナル娯樂的ナ刺戟トカ趣味トカ云フモノデハナイ．實ハ之アルガタメニ其學問ガ神聖ナルモノ純眞ナルモノデアリ得ルノデアツテ，美的要素ノ缺ケタ學術ナルモノガ若シアリトスレバ，ソレハ眞ノ意味ニ於ケル學術デハナク，單ニ社會ノ一時的ナ需要供給ト共ニ發生又ハ消滅スル所ノ泡沫的ナ餘技ニ外ナラナイ．眞ノ學問ハ神ノモノデアツテ人間永遠ノ理想デアル．眞ノ學問ノ窮マル所，ソコニコソ初メテ理想的極美ノ全貌ヲ見出シ得ルモノデアルト言フテモ敢テ過言デナイ．眞ノ學問ノ研究ハ目前皮相ナル需給作用ニ刺戟サレテヾナク，人世本來ノ審美的慾求ニ馳ラレ審美的理念ニ誘カレテ發展スルモノデアル．多少ノ趣味アルガタメニ研究上ノ能率ガ向上スルト云フヤウナ單純

ナモノデナク，其美的鑑賞ニヨツテ學問ノ神秘ナル組織ヲ，換言スレバ眞理ノ美ハシキ調和ヲ發見スルコトガ出來テ，ソコニ初メテ學問ノ偉大ナル進歩發展ガ成就スルノデアル．所謂三昧ニ入ルト云フ境地ハ元來何ヲ意味シタモノカ筆者ニハ明瞭デナイガ，恐ラク學術技藝ノ美的鑑賞ニ徹スル所ノ心境ヲ云フタモノデハアルマイカ．

諸般ノ學問ノ中デモ，數學ハ特ニ學理上ノ美的要素ガ頗ル顯著ナルモノデアル．ツマリ此學問ハ其對象トスル所ノモノガ理念ノ本質思意ノ根原トモ云フベキモノデアルカラ，自ラソコニ美的要素ヲ隱蔽スベキ何等ノ不純物ヲ混ヘナイカラデアル．理論ノ神秘的調和ノ美ハシサガ其マヽノ姿ヲ現ハシテ居ルカラデアル．之ヲ換言スレバ，最モ單的ニ最モ完全ニ美的鑑賞ヲ以テ研究ヲ進メ得ル，否進メルベキ學問ノ一ツハ數學デアル．

之ハ聊カ言ヒ過ギタカモ知レナイ．筆者ハ決シテ數學ガ藝術デアルト主張スル積リハナカツタ．又勿論數學ノ研究ガ審美的靈感ニヨツテノミ行ハレルト云フノデモナイ．實ノ所只數學ハ其本質ニ於テ美的要素ガ甚ダ濃厚デアルト云フコトヲ信ズル迄デアル．而モ筆者ハ數學ノ其美的要素ヲ十分ニ鑑賞スルノ眼ヲモタナイ．又元ヨリ十分ニ探究スル力ヲモタナイ．只漠然ト其美シサヲ感ズルノミデアル．三昧境ノ如キ勿論覗イテ見タコトモナイノデアル．

讀者ト雖モ輕々敷三昧境ナゾニ闖入スルノ冒險ハ好マナイト思フノデ，敢テ茲ニ美的要素ノ根本的ナ批判ヲ企テヨウトハ思ハナイ．只々漫談冗語トデモ云フカ，話ノ種ニ，所謂美的要素ノ片鱗ヲ拾ツテ鑑賞シテ見ヨウトスルノミデアル．餘所ナガラ三昧境ヲ桓根越シ

ニト云フ迄ニモ行カナイ．遠見ノ野邊ニ道草ヲ摘ム程ノ氣持デアル．初等數學ヲ道草視スルノデハ毛頭ナイガ，例ヲ卑近ナ數學カラ拾ヒ上ゲテ一二ノ鑑賞ヲ試ミタイノデアル．

II 鑑　賞

大自然ノ至玄ヲ感得スルノニハ詩材ノ大小ヲ問ハナイ．凡ソ目ニ觸ルヽモノ一木一草ノ中ニ天地ノ神秘ハ悉ク含マレテ居ル．只ソレヲ十分深刻ニ十分嚴肅ニ鑑賞スルコトガ肝要ナノデアル．數學ノ玄妙ヲ會得スルニモ論題ノ多少ヲ問ハナイ．如何ナル小サナ一問題ヲ捉ヘテモ，之ヲ仔細ニ觀察シ精密ニ分析シテ，前後左右アラユル觀點ニ立ツテ其問題ヲ吟味スレバ，眼界ハ無限ニ開ケテ終ル所ナク，數理ノ妙玄悉ク其一問ノ中ニ結晶スルカノ如キ美觀ヲ呈スルノデアル．「ノデアル」ガ不穩當ナラバ，少ナクトモ呈スル筈デアル．此美觀ヲ感得スルノガ卽チ玆ニ所謂數學ノ鑑賞デアル．

一小問題ヲ一小問題トシテ解答シ得タト云フ迄ノコトデハ，誠ニ愚ニモツカヌ無駄事デアル．一兩日タテバ忘レ果テルダケノ全ク無益ナ遊戲デアル．其一小問題ヲ一大眞理トシテ仰ギ見ル所ガ尊イノデアル．其問題ノ由テ來ル以所ヲ究メ，解決シ得タル以所ヲ究メ，聯關スル以所ヲ究メ，結果スル以所ヲ究メ，前後左右縱橫無盡ニ究メレバ究メル程問題ハ愈光輝ヲ發シ，ソレニヨツテ鑑賞者ハ數理ヲ了得シ，數理ヲ渇仰シ，進デ學問ノ發展ニ大ナル寄與ヲ成就スルノデアル．

玆ニ鑑賞ノ實例ト云フノモ甚オコガマシキ次第デアルガ，試ミニ

何カ一小問題ヲ提出シテ見ヨウ．例ヘバ所謂鶴龜問題

庭ヘ梅櫻合セテ二十本ダケ植ヘタイ．一本ニツキ梅ハ四圓，櫻ハ二圓，豫算額ハ五十六圓トシテ，幾本ヅツ買ヘバヨイカ．

答ヘテ曰フ，櫻ダケ二十本買ヘバ，經費四十圓トナリ，豫算額十六圓餘ル．櫻一本ヲ梅一本ニ代ヘル毎ニ經費ガ二圓ヅヽ增ス．餘リノ十六圓ヲ無クスルニハ $16\div2=8$ 本ダケ梅ヲ買ヘバヨイ．從テ櫻ハ十二本買フコトヽナル．

之デ解決サレタ．終リ !! ト云フノデハ殆ンド價値ガナイ．恐ラク訓練上ニモ何程ノ效果モナイデアラウ．ソコデ少シク此問題ヲ鑑賞シテ見ヨウ．

先ヅ此問題ハ何ンナ種類ノコトヲ問フテ居ルカ．甲乙二數ヲ同時ニ問フテ居ル．尤モ甲ガ分レバ乙モ分ル．甲ガ 0 カ一カ二カ等ニ應ジテ經費 (丙) ガ異ナルノデアルガ，ソレガ與ヘラレタル金高 (丙) トナルニハ甲ガ果シテ何程カヲ問フテ居ルノデアル．若シ乙ヲ消去シテ單的ニ言ヘバ，丙ガ甲ノ函數デアルトキ，丙ヲ與ヘテ甲ヲ求ムル問題デアル．コヽ迄觀察シテモ，方程式ノ型，特ニ聯立方程式マデ擴張シタ方程式ノ完全ナル型ガ現ハサレテ居ルノデアル．ツマリ四則雜題幾百千問アリトモ皆此型ヘ當ハメルコトモ出來ルノデアル．斯樣ナ觀察ガツマリ前述ノ由テ來ル以所ヲ究メルト云フ部類ニ屬スルノデアル．

次ニ問題解決ノ鍵ハ何デアツタカ．ソレハ櫻一本ヲ梅一本ニ代ヘル毎ニ經費ガ等シク二圓ヅヽ增スコトノ發見ニアツタノデアル．ツマリ數 n (梅ノ株數) ガ 0 ナラバ數 a (經費增額) モ 0 デ，n ガ

1 增ス毎ニ a ハ b (2 圓ニ相當) ヅヽ增スモノトスレバ $a=bn$ デアルト云フ，乘法ノ法則ヲ利用シタノデアル．而シテ此法則ハ何所カラ出ルカ．精密ナ說明書ヲ繙ケバ分ルコトデ，之ハ所謂數學的歸納法ヲ根據トシテ居ルモノデアル．抑 1 增ス毎ニ起ル現象ヲ知ツテ n ダケ增セバ何フナルカ或ハ又何フナルニハ何レダケ增セバヨイカ，ト云フコトヲ研究スル態度ヲ一般ニ歸納的デアルト云フ．算術的研究ノ最モ正規ナ態度ハ歸納的デアル．如何ナル四則問題ト雖モ此研究法デ解決サレルノデアル．前述鶴龜問題ノ如キ正ニ其典型デアル．斯樣ナ觀察ガ筆者ノ所謂解決シ得タル以所ヲ究メ他ト關聯スル以所ヲ究メルコトニ屬スルノデアル．

サテ前述ノ如ク此問題ノ型ヲ廣義ニ解釋シテ置イテ，且ツ解決ノ鍵ヲ歸納法ト關聯セシメテ見ルナラバ，此問題ノ解法ハ其影響スル所筆者ノ所謂其結果スル所ハ頗ル廣汎デアル．所謂四則問題ハ凡テ歸納的卽チ鶴龜算式デ解ケルノデアル．例ヘバ甲數ノ 2 倍カラ乙數ヲ引ケバ 3 トナリ，甲數ヘ乙數ノ 3 倍ヲ加ヘレバ 40 トナル．甲乙如何ト問ヘバ聯立一次方程式ノ正常ナ形

$$2x-y=3,\quad x+3y=40$$

ト同一ノ問題デアツテ，之ヲ鶴龜算法デ行クナラバ，最初ノ條件カラ見テ x ヲ例ヘバ 2 カラ初メテ 2, 3, 4 等ノ如ク 1 ツヅツ增シテユケバ y ハ 1, 3, 5 等ノ如ク 2 ツヅヽ增シ $z=x+3y$ ハ 5, 12, 19 等ノ如ク 7 ツヅツ增ス．從テ z ガ丁度 40 トナルノハ $(40-5)\div7=5$ 回增シタトキデアル．從テ

$$x=2+5=7,\quad \text{從テ}\quad y=1+2\times5=11$$

敢テ一次方程式ニ限ラズ

$$x+y=a,\quad p^x q^y=r$$

ノ如キ型ノ問題デモ鶴龜算法ヲ以テ解クコトガ出來ル．卽チ x ガ 1 增ス毎ニ r ハ $\dfrac{p}{q}$ 倍サレルコトカラ歸納的ニ解ケルノデアル．斯カル超越方程式ニ迄鶴龜算ガ影響スル以所ハ又前ノ第二式ガ其內容ニ於テ一次式

$$x\log p+y\log q=\log r$$

ト同價デアルコトニ原因スル．斯フ考ヘルト對數ノ思想マデニ影響シテ來ル．究メ究メテ突キ進メバ何所マデモ際限ハナイノデアル．

兎モアレ，斯ノ如クシテ只一ツノ小問題ト雖，之ヲ出來ルダケ詳細深刻ニ觀察シテ行ケバ，眼界ハ驚クベク展開シテ，限モナク深遠ナル理論ノ交錯ヲ窺見ルコトガ出來ルノデアル．詩人ガ一木一草ノ中ニ無限ノ哀愁ヲ感受スルト同ジ意味デ，吾々ハ何ンナ一小問題ノ內ニモ絕大ナル壯嚴ヲ體驗セザルヲ得ナイノデアル．

之ガ數學ノ鑑賞デアル．此鑑賞アツテコソ初メテ問題ガ價値ヲ生ジ，吾人ノ了解ヲ深メ，思想ヲ練リ，硏究ヲ刺戟シテ吳レルノデアル．單ニ習慣的ナ技巧ノ上ニ遊戲スル所ノ百千ノ問題演習ハ，只一問題ノ鑑賞ニ及バナイノデアル．

III 他ノ一例

二次方程式ノ問題ヲ觀察シテ見ヨウ．

$$x^2=4 \qquad (1)$$

ナラバ x ノ值ハ何カ．答ハ

$$x=+2 \text{ 又ハ } -2 \qquad (2)$$

何故カト問ハレル迄モナク 2 ト −2 トダケガ平方シテ 4 トナリ得ルコト勿論デアルカラト云フテ終ヘバソレマデノコトデアル．

然シナガラ開キ直ツテ今少シク嚴肅ナ態度ヲ以テ之レニ臨メバ，問題ハソウ簡單ニ片付カナイ．2 ト −2 トガ何レモ平方シテ 4 トナルコトハ承認サレルガ，此他ニハ條件ニ適スル數ハ果シテ無イカ，之ガ面倒ナ問題デアル．無サソウニ思ハレルダケデハ滿足サレナイ，證明ヲ要スル．ツマリ x^2 ハ x ガ正ナル間ハ x ガ增スニ從ツテ增ス，又 x ガ負ナル間ハ x ノ增スニ從ツテ減ズル．從テ正ノ x ガ 2 ニ於テ x^2 ガ 4 トナル以上 2 以外デ更ニ同ジ 4 トナルコトハナイ．負ノ x ガ −2 トナル場合ニ就テモ同樣デアル．之ガ其理由デアル．

斯ク考察スレバ自ラ x^2 ナル函數ノ變化ト云フ思想ガ隨伴スルコトニナル．ツマリ方程式 (1) ハ，之ヲ滿足スル x アリトセバト云フ假定ノ下ニ，其 x ノ值如何ト云フ終結ヲ求ムル問題デアルト同時ニ，他面ヨリ見レバ，x^2 ナル函數ガ x ト共ニ變化スル其行程ニ於テ，丁度值ガ 4 トナル瞬間（x ノ值）ハ何時（何程）カト云フコトヲ問フタ問題トモ見ラレル．卽チ方程式 (1) ノ未知數 x ハ文字通リ最初ヨリ未知ナル常數ト見ルカ，又ハ變數ナリシモノヽ特定值ト見ルカ兩樣ノ見方ガアル．前者ハ代數的ノ見地後者ハ函數論的見地デアツテ，場合ニ應ジテ此兩見地ヲ使ヒ分ケルコトニヨツテ方程式論ガ發展シテ行クノデアル．

函數論的見地ニ立テバ方程式 (1) ニ別種ノ取扱ヒヲ生ズル．卽チ函數 x^2 ガ 4 トナル瞬間云々ト考ヘル代リニ，之ヲ移項シテ

$$x^2-4=0 \qquad (3)$$

卽チ函數 x^2-4 ガ 0 トナル瞬間ハ何時カト考ヘルノデアル．x^2 ナル函數ハ特ニ簡單ナル函數デ，ソレガ 4 トナル瞬間ヲ求メルニハ既知ノ方法所謂開平法ナルモノガアツテ，±2 ハ開平ノ結果デアル．x^2-4 ノ如キ多項式トナルト，ソレガ某數トナル瞬間ヲ求メル既定ノ算法ガアル譯デナイ．然シ幸ニ其某數ト云フノガ 0 ナノデアル．其點ニ着目シテ問題ガ解カレル．卽チ (3) ノ左邊ヲ所謂因數ニ分解スルト

$$(x-2)(x+2)=0 \qquad (4)$$

所デ甲乙二數ノ積ガ 0 ナラバ，甲又ハ乙ハ何レカヾ 0 デアル．從テ (4) カラ

$$x-2=0 \quad \text{又ハ} \quad x+2=0 \qquad (5)$$

之カラ (2) ノ答ガ得ラレルノデアル．

此見地ニ立テバ，左邊ガ (3) ノ場合ノ如キ特殊ノ二項式デナクトモ，一般ノ二次三項式デモ同ジ道理カラ解ケル．右邊ヲ 0 ニスルトキ左邊ガ一次因數ニ分解サレル場合ハ皆同理デアル．然ラバ必ズ分解ハサレルカ．此問題ニ直面スルコトニヨツテ所謂虛數ノ發見ヲ促シ，十八，九世紀ニカケテノ數學ノ大革命トナルノデアル．

因數分解ニヨル解法デハ，方程式ノ右邊ヲ 0 ト置クコトガ解決ノ鍵デアル．右邊ガ 0 デナクテハ折角左邊ヲ分解シテモ解答ガ出テ來ナイ．何故デアラウカ．ツマリ若干個ノ數ノ積ハ，ソレガ 0 デアルトキニ限ツテ何レカ一數ガ決定的ノ結果（0 デアルコト）ヲ與ヘテ，他ハ全ク不定トナルノデアル．其他ノ場合ハ因數ノ間ニ或函數關係

ヲ生ズルノミデ，何等決定的ナ結果ガ得ラレナイ．之ガ原因トナルノデアル．換言スレバ積 ab ハ b ノ如何ニヨツテ變化スルノガ普通デアルガ，只 a ガ 0 ナル場合ニ限リ b ノ如何ニヨラズ結果ハ常ニ不變數 0 デアル．更ニ換言スレバ或數 c ヲ a デ割ルト云フコトハ一般ニ可能デアツテ，一定ノ商ヲ生ズル筈デアルガ，只 a ガ 0 デアルトキノミハ，之ヲ以テ 0 ヲ割ルト云フコトハ商ヲ定メルコトニナラズ，又 0 以外ノモノヲ割ルト云フコトハ不能トナル．卽チ總ジテ 0 ヲ以テ或數ヲ割ルト云フコトハ普通ノ算法トシテハ成立シナイ．之ガ眞ノ原因デアル．

然シナガラ，不能ノ算法ハ新數ヲ設定スルコトニヨツテ可能ナラシメ得ル場合ガ多イ．現ニ正數ノミヲ知ル者ニ取ツテ 2 カラ 3 ヲ引クコトハ不能デアルガ，負數ヲ設ケテカラハ之ガ出來ル．實數ノミヲ知ル者ニ取ツテ -4 ヲ平方ニ開クコトハ不能デアルガ，虛數ヲ設ケテ後ハ之ガ可能ニナル．此調子ニ倣テ何カ然ルベキ新數ヲ設定シテ，零除法ノ不能ヲ可能ナラシメル方法ハナイモノデアラウカ．假ニソレガ成功シタトスレバ，任意ノ數 p ニ對シテ

$$\frac{p}{0}=q \quad \text{卽チ} \quad p=q\times 0 \qquad (6)$$

ナル q ガ存在シ，從テ

$$p=q\times 0=q(r-r)=qr-qr=0 \qquad (7)$$

トナツテ，任意ノ數 p ハ何レモ 0 ニ等シイ．卽チ數ハ只一ツノ 0 ノミトナラザルヲ得ナイ．今日ノ數學ハ消滅スルコトニナル．故ニ零除法ノ不能ハ救ヒ難キ不能デアル．救ヒ難キデハナイ，誠ニ有難

イ不能デアル．此不能ノオ影デ方程式ガ解カレルノミナラズ，此オ影ニヨツテ數學ガ無事ニ命ヲ繋ギ而モ比類ナキ其美シサヲ持續スルコトガ出來ルノデアル．此不能，零ニ對スル此特異性ハ，究ムルニ從テ愈深ク愈遠ク，アラユル數學ノ基礎ノ上ニ靈妙ナル光輝ヲ發スルノデアルガ，今ハ此邊デ鑑賞ヲ中止シテ置ク．

飜ツテ第一ノ見地ニ返リ，式 (1) ノ右邊ノ 4 ヲ 3 ニ代ヘテ考ヘレバ，既ニ無理數ノ思想ヲ喚起スルコトヽナリ，可約性ト交渉ヲモチ，高等代數ノ門ニ入ル階梯トナル譯デアルガ，是モ只今ハ省略シテ言ハナイ．要スルニ一ツノ小問題ガ如何ニ幽玄ナル理論ヲ織リ交ゼテ，如何ニ深刻ナル妍麗サヲ保ツカヲ鑑賞スルコトノ一例ヲ示シタマデヾアル．

IV 形式美

漫談冗語ノ便デヲ以テ最後ニ妄言トモ云フベキ一節ヲ附ケ加ヘル．

凡ソ文藝ノ鑑賞カラ云ヘバ，內容的ニ深刻ナル理想美ヲ盛リ上ゲタ大作品アルト同時ニ，「リズミカル」ナ型式美ヲ主トスル所ノ小品，所謂詩歌俳諧ノ如キモノガアル．之ト類似シタ所ガ數學ニモアル．前述ノ如キ鑑賞ハ，小問題ヲ擴大シ或ハ解剖シテ顯微鏡下ニ置テ，偉大ナル內容的組織ヲ讃歎シタモノデアル．小問題ニシテ尙且然ル以上，大問題大「セヲリー」ヲ通覽スル場合ノ內容上ノ美觀ハ思半バニ過ル譯デアル．ガソコマデハ所謂三昧境ノ領分トシテ遠慮シテ置イタノデアル．只日常ノ茶飯事ヲ寫實小說的ニ引ノバシテ鑑賞シタノデアツタ．之ニ對シテ形式的ナ一勿論理論ノ組立テニ關シテノ形式一調和美ヲ斷片的ニ鑑賞スルコトモ出來ル．言ハヾ數學ニ於ケル詩デアリ歌デアルト見ルベキモノガアル．換言スレバ，一ツノ小サナル數學的立論數學的證明ノ中ニ，理論ノ調和美カラ來ル所ノ詩ガアリ歌ガアルノデアル．

詩ニ就テ言ヘバ一勿論筆者全クノ門外漢デ，誰カニ何處カデ聞イタヤウナ氣ガスルダケデアルガ一起，承，轉，結ノ心得ヲ要スルソウデアル．

月　落　烏　啼　霜　滿　天　(起句)

ト先ヅ說キ起スノダソウデアル．サテ此句ヲ承ケテ

江　楓　漁　火　對　愁　眠　(承句)

ト穩ヤカニ續ケル迄ハ强テ問題デハナイガ，六ケ敷イノハ其次デアル．コヽデ一ツ大イニ轉ズルノデアル．動クノデアル．他ノ者ニ因緣ヲツケルノデアル．調和美ノ「クライマツクス」デアル．張繼居士ハ此際愁眠ノ靜寂ヘ遠寺ノ鐘ヲ持ツテ來タノデアル．卽チ

姑　蘇　城　外　寒　山　寺　(轉句)

ト見事ニ轉ジタノデアル．轉ジパナシデハ納マリガ付カズ，審美學的法則トシテ玆ニ結ビヲ施ス．

夜　半　鐘　聲　到　客　船　(結句)

デマトマリガ付イタノデアル．形式美ガ完成シタノデアルト云フ風ニ聞イテ居ル．如何ニモ尤ノコトデアル．取分ケテ轉句ノ妙味ニヨツテ一篇ノ優劣ガ決定スルカノ如ク見エル．

起承轉結ノ心掛ケハ敢テ詩ニ限ラナイト思フ．歌ニセヨ，俳句ニセヨ，都々逸デモ，端唄デモ，凡ソモノヽ形式美ノ典型ハ起承轉結

デアル. 例ヘバ

「ひむがしの野に（起）かぎろひの立つ見えて（承）

かへりみすれば（轉）月かたぶきぬ（結）

「陽炎や（起承）手に下駄はいて（轉）善光寺（結）

「親は他國に（起）娘は島原に（承）

櫻花かや（轉）ちりぢりに（結）

何レモ起承轉結ガ歴然トシテ顯レテ居ル.

尚深ク思ヘバ, 管絃, 舞樂, 美術, 工藝ノ類ハ勿論ノコト, 花鳥風月, 春夏秋冬, 人間ノ榮枯, 世ノ盛衰, 悉ク起承轉結ヲ以テ終始スルモノカノ如ク思ハレルノデアルガ, ソレ迄ニ追究スルト長クナルカラ, 一躍目的ニ飛ンデ, 數學ニ於ケル起承轉結ニ移ル.

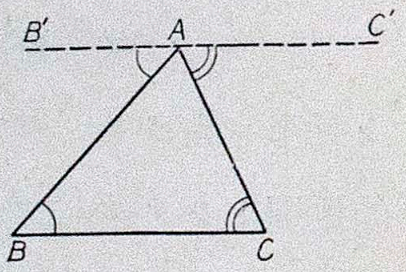
試ミニ三角形 ABC ノ内角ヲ論ズル.

A ヲ通リ BC ニ平行ナル直線 B′AC′ ヲ引ケ（起）

$\angle B'AB=\angle B,\quad \angle C'AC=\angle C$ （承）

$\therefore\ \angle A+\angle B+\angle C=\angle B'AC'$ （轉）

$\therefore$ △ABC ノ内角ノ和ハ二直角ナリ（結）



證明ノ優劣, 巧拙, 美醜ヲ決定スル骨子ハ轉ニアル. 此證明ノ面白サハ三内角ノ代リニ A 點ニ集マル三接角ヲトル所, ツマリ三内角ヲ A 點ノ三接角ニ轉ジタ所ニアル.

更ニ又所謂剰餘定理ヲ證明シテ見ヨウ.

整式 $f(x)$ ヲ實, $x-h$ ヲ法トスル割算ヲ行ヒ, 整商 $g(x)$ ト常數ノ殘リ r トヲ得タルトキハ（起）

$$f(x)=g(x)(x-h)+r$$

ナル恒等關係ヲ生ズ（承）

此恒等式ノ $x=h$ ナル値ヲ代入スレバ

$$f(h)=r \quad \text{（轉）}$$

故ニモシ $f(h)=0$ ナラバ, $f(x)$ ハ $x-h$ ナル因子ヲ有ス（結）

此轉句ニ至ツテハ誠ニ至玄至妙ト言ハザルヲ得ナイ.

之等ヲ讀ンデ一篇ノ詩歌ニ對スルト同樣ノ感ヲ抱クト云フテモ敢テ無理デハアルマイ.

數學ノ三昧ニ入ルコトヲ希望スル次第デハ毛頭ナイガ, 數學ヲ學習スル若キ學徒ニ對シテハ, 徒ラニ努力猛進スルダケデハ效果ガ尠イ, 常ニ鑑賞的ナ態度ヲ以テ問題ニ臨ムコトガ眞ニ數學ヲ理解スルタメノ最善ノ道デアルコトヲ強調シタイノデアル.

（終）

數學教育の再建

小 倉 金 之 助

小學校檢定試驗 數學科研究要領

鹿 谷 義 一

目　　次

第1章　緒　　論

小學校教員トナルニハ府縣立師範學校又ハ小學校教員講習科ニ入ツテ勉學スル外ニ檢定試驗ヲ受ケテソノ資格ヲ得ル途ガアル.

此制度ハ熱烈ナル學究心ト明晰ナル頭腦トヲモチナガラ家庭ノ狀況或ハ環境ニヨツテアタラ入學ノ機會ヲ得ラレヌ者ノ出世策トシテ設ケラレテヰルノデアルカラ之ニ志スモノハソノ社會政策的意義ヲ認識シ感激ヲ新タニシツツ勉學スベキデアル.

教員ノ資格ニハ次ノヤウナ種類ガアル.

本科正教員	小學校本科正教員　(小本正) 尋常小學校本科正教員　(尋本正)
專科正教員	小學校專科正教員　(專正)
准　教　員	小學校准教員　(小准) 尋常小學校准教員　(尋准)

小學校本科正教員トイフノハ尋常小學校及ビ高等小學校ヲ通ジテノ本科正教員ヲイヒ，尋常小學校本科正教員トハ尋常小學校ノミノ本科正教員，小學校專科正教員トハ音樂，體操，裁縫，手工，農業，商業，家事，圖畫，外國語ノ一科目若クハ數科目ニツイテ尋常小學校及ビ高等小學校ヲ通ジテノ專科正教員ヲ云フ．又小學校准教員トハ尋常小學校及ビ高等小學校ヲ通ジテノ准教員ヲ云ヒ，尋常小學校准教員トハ尋常小學校ノミノ准教員ヲ云フ.

教員ノ檢定ニモ上記資格ノ種類ニ從テ五ツノ種類ガアル．數學科ノ內容及ビ程度ハ尋常小學校准教員，尋常小學校本科正教員ニ於テ

ハ大體算術科ノ範圍ニ於テ課シ，小學校准教員ニ於テハ算術ノ他ニ代數及ビ幾何ノ初步，小學校本科正教員ニ於テハ男子ニ在リテハ師範學校男生徒，女子ニ在リテハ師範學校女生徒ニ課スル程度ニ準ジ算術，代數，幾何ヲ分科的ニ課シテキル．

私ハ本講座ニ於テ現代ノ數學教育ノ動向ニ基ヅキ主トシテ小學校本科正教員ノ検定試驗問題ヲ中心トシ主要研究事項ハ何デアルカ，ソシテ夫々何レノ點ニ重キヲ置イデ研究サルベキデアルカヲ各部門ニ亘リ具體的ニ說明シヤウト思フ．

第2章　算　　術

小學校教員トシテ算術教授ヲ誤リナク遂行スルニハ算術的訓練ノ完成ガ緊要ナコトハ言フ迄モナイ．現代小學算術ガ空間學習ヤ代數的指導等ヲ重視スル傾向ニアルコトニ迷ハサレテ教師ニ算術的研究ヲ輕視スル風ガアルヤウニ考ヘラレルガソレハ誤リデアル．算術的鍛練ノ完全デナイ間ニ代數學ノ明快サニ誘惑サレテ算術特有ノ考ヘ方，算術特有ノ趣味ヲ會得スルコトヲ怠ツテハナラナイ．

1. 計　算

算術科ニ於テハ四則ノ計算練習ヲ第一義トセネバナラヌ．四則ハ實ニ數學全班ノ計算ノ基礎デアル．然ル後ニ難問題ノ研究ニ掛ルベキデアル．

計算ノ方法ニハ筆算，暗算，珠算ノ三種ガアルガ昭和十三年一月二十九日ノ官報ニ於テ小學令施行規則第四條第四項ノ「算術ハ筆算ヲ用フベシ，尋常小學校ニ在リテハ土地ノ情況ニ依リ珠算ヲ併セ用フルコトヲ得．高等小學校ニ在リテハ珠算ヲ併セ課スベシ」ヲ單ニ「計算ハ暗算，筆算，珠算ヲ用フベシ」ト改メ筆算，暗算，珠算ヲ對等ニ扱ツテキル．之ニ依レバ日常簡單ナ計算ニハ暗算ヲ用ヒ，大數，大口ノ計算ニハ珠算ノ長所ヲ發揮セシメ其他ニハ筆算ヲ用ヒルベキモノト認メラレル．

從テ從來ノ如ク珠算ヲ算術ノ別種ノ教材デアルカノ如ク扱フノハ誤リデアル．

2. 四則應用問題

四則ノミデ解カレル所謂四則應用問題ハ代數的ニハ一次方程式トナルモノデアル．然シ檢定試驗ヲ受ケルニハ其算術的解法ニ習熟スルコトガ必要デアル．以下特ニ必要ト考ヘラレル事項ヲ略記シヤウ．

(1) 要點ノ摘記並ニ圖解

複雜ナ問題ニ於テハ事實ノ大要ト主要ナ數字ヲ摘記スルコトガ良法デアル．例ヘバ

「甲ノ所得ハ 100 圓デ，乙ノ所得ハ 30 圓デアル．甲カラ乙ニ幾ラ與ヘタラ兩人ノ所得ガ相等シクナルカ」

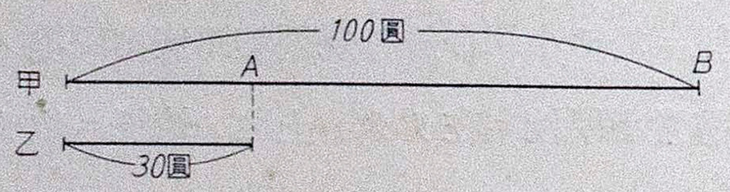
トイフ問題ニ於テ

甲 100 圓 ⟶ 乙 30 圓

兩方ガ相等シクナル．

コレ位ノ摘記ニヨツテモ考察ハ樂ニ進メラレル．

更ニ



ノヤウニ圖解スレバ尚良イ．

(2) 概算ノ習慣ヲツケルコト

用數ガ複雜デアルタメニ誤算ヲ來ス場合ガ極メテ多イ．之ヲ救フニハ概算ノ習慣ヲツケルコトデアル．例ヘバ

$$259.84\times3.98 \fallingdotseq 1000 \qquad (250\times4=1000)$$

$$278\times\frac{5}{13} \fallingdotseq 100 \qquad \left(300\times\frac{1}{3}=100\right)$$

又此ノヤウナ概算ニヨツテ位取リヲ間違ヘタリ非常識ナ解答ヲ試ミタリスルヤウナコトモ少クナルデアラウ．

(3) 整數，分數，小數ノ綜合的考察

之ハ自己ノ研究トイフヨリモ敎授上ノ注意トイフ方ガ適切カモ知ラヌガ例ヘバ

「或數ノ $\frac{2}{3}$ 倍ハ $\frac{4}{5}$ デアル．或數ヲ求メヨ」ト問ハレルト分ラナイ者モ「或數ノ 3 倍ハ 27 デアル．或數ヲ求メヨ」ナラバ直チニ解ケルトイフヤウナ事ガアル．一般ニ分數，小數等ノ應用問題ニ於テ用數ヲ整數ニ置換シテ考ヘルコトハ非常ニ有效ナ方法デアル．

3. 整數ノ性質ニ關スル問題

中等學校ノ算術デハ整數ノ性質ノ理論的方面ニハ深入リシナイデ單ニ分數計算ノ基礎トイフ程度ニ於テ極テ心理的ニ取扱フノガ最近ノ傾向デハアルガ整數ノ性質ハ數學ニ於テ最モ興味ヲ惹クモノヽ一ツデアルカラ比較的難解ナ部分デハアルガソノ眞髓ニ觸レルコトガ望マシイ．

4. 比，比例及ビ步合ニ關スル問題

比ノ觀念ハ數學全般ヲ通ジ最モ重要ナ觀念ノ一ツト言ツテヨイ．

比トハ或數（又ハ量）A ガ他ノ數（又ハ同種ノ量）B ノ幾倍ナルカトイフ關係ヲ指スノデ比ソノ者ハ數デハナイ．A ヲ B デ割ツタ商ヲ此ノ比ノ値ト呼ブ．實際ニハ A ノ B ニ對スル比ト言ツテ實ハ比ノ値ヲ意味スルコトガ往々アル．

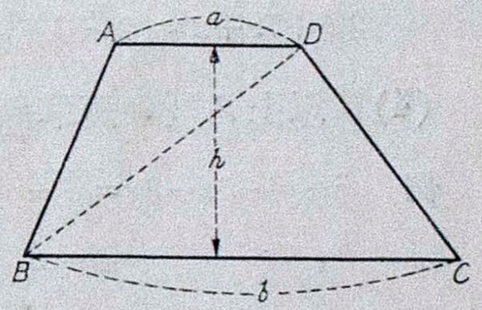
又「相伴ツテ增減スル二ツノ量ガアツテ其ノ一方ガ元ノ 2 倍，3 倍，……ナルトキ他方モ亦之ニ伴ツテ元ノ 2 倍，3 倍，……ニナレ

バ此ノ二量ハ互ニ**比例スル**又ハ**正比例スル**トイヒ，一方ガ元ノ2倍，3倍，……ニナルトキ他方ガ之ニ伴ツテ $\frac{1}{2}$ 倍，$\frac{1}{3}$ 倍，……ニナレバ此ノ二量ハ互ニ**反比例スル**トイフ」然ルニ俗ニハ二ツノ量ガアツテソノ一方ガ増加スルトキ他方モ亦之ニ伴ツテ増加スレバ二量ハ互ニ正比例スルト言フコトガアル．斯様ニ用語ノ通俗的意味ト數學的意味トガ異ナル場合ガ少クナイ．カヽル場合ニハ兩者ノ區別ヲ明カニシ苟モ混同スルコトガアツテハナラナイ．

第3章 代 數 學

代數學ノ眞髓ハ文字ヲ用ヒテ問題ノ意味ヲ方程式ノ形ニ表ハシアトハ元ノ問題ヲ離レ一定ノ機械的方針ノ下ニ之ヲ解クニアル．サウシテ諸法則ガ文字ト符號トニヨリ簡潔ニ表ハサレルコトハ文字使用ノ他ノ大ナル利益デアル．

其レ故ニ代數學ヲ眞ニ理解スルニハ何ヨリモ文字ノ意義ヲ了得シソレヲ自由ニ驅使スル力ヲ附ケナケレバナラナイ．次ノ例ハ方程式デハナイガ所謂機械的方法ノ威力ヲ示スモノトシテヨク玩味シテ貰ヒ度イ．



梯形 ABCD ノ上底ガ a, 下底ガ b, 高サガ h ナルトキ △ABC, △ACD ノ面積ヲ求メ，ソノ和ヲ簡單ナ形ニ表ハセ．

$$S=\triangle ABC+\triangle ACD=\frac{1}{2}ah+\frac{1}{2}bh$$
$$=\frac{1}{2}h(a+b)$$

カクシテ梯形ノ面積公式ガ幾何學的乃至算術的考察ヲ要セズ全ク機械的ニ誘導サレルノデアル．

5. 代數式ノ運用

整式並ビニ正數・負數ノ加減乘除ニ習熟スルコトハ代數學ノ基本操作トシテ最モ重要ナモノデアル．但シ最近ノ數學教育ノ傾向ヨリ

次數ノ高イ式ヤ文字ヲ澤山含ンダ式ヲ取扱フ必要ハナイ.

因數分解ハ重要ナル代數的操作デハアルガ諸君ガ練習スベキ程度範圍ハ次ノヤウナモノデアル.

(1) 單項因數シ括リ出スコト

例 $2a(x-y)+3b(y-x)=2a(x-y)-3b(x-y)$

$$=(x-y)(2a-3b)$$

(2) 平方ノ差ノ因數分解

例 $(x+y)^2-z^2=(x+y+z)(x+y-z)$

(3) 二次三項次ノ因數分解

例 $(x-y)^2-6(x-y)+9=\{(x-y)-3\}^2=(x-y-3)^2$

$x^2+2x-15=(x+5)((x-3)$

$3x^2+7x+2=(3x+1)(x+2)$

(4) 以上ノ型ノ簡單ナ組合セ

例 $x^2-y^2-3x-3y=x^2-y^2-3(x+y)=(x+y)(x-y)-3(x+y)$

$$=(x+y)(x-y-3)$$

6. 方程式

(1) 方程式ニハ未知數ノ値ヲ求メルタメノモノト變數間ノ函數關係ヲ表ハスタメノモノトノ二種類ガアル. 例ヘバ

$$\frac{3}{4}x-\frac{4x-2}{5}=5-\frac{5x}{8} \quad 及ビ \quad \begin{cases} x-2y=3 \\ x^2-4y^2=17 \end{cases}$$

ハ前者ニ屬シ

$$y=2x+1 \quad 及ビ \quad S=a(1+r)^n$$

ハ後者ニ屬スル.

(2) 二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ根ノ公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ハ記憶スベキデアル.

(3) 分數方程式ヲ解クニハ求メラレタ未知數ノ値ガ原方程式ノ分母ヲ零ニシナイカドウカヲ驗スル必要ガアル.

例 $\dfrac{1}{x(x-1)}-\dfrac{2}{x^2-1}=0$ ヲ解ケ

解 分母ノ最小公倍數 $x(x^2-1)$ ヲ兩邊ニ掛ケルト

$$x+1-2x=0 \qquad \therefore \ x=1$$

トコロガ此ノ値ヲ原方程式ニ代入スルト分母ガ零トナツテ等式ハ無意味トナル. 故ニ此方程式ニハ根ハナイ.

(4) 無理方程式ヲ解クニハ有理化ノタメニ方程式ノ兩邊ヲ自乘スルノデ所謂無緣根ナルモノガ入ツテ來ル. 從テ求メラレタ未知數ノ値ヲ原方程式ニ代入シ之ヲ滿足スルカ否カヲ驗スル必要ガアル.

例 $\sqrt{2x+3}=x$ ヲ解ケ

解 兩邊ヲ自乘スルト

$$2x+3=x^2 \qquad \therefore \ x^2-2x-3=0 \qquad \therefore \ x=3 \ 或ハ \ x=-1.$$

二根ノ中前者ハ原方程式ヲ滿足スルガ後者ハ之ヲ滿足シナイ. 卽チ無緣根デアル. $x=-1$ ハ次ノ方程式ノ根デアル.

$$\sqrt{2x+3}=-x$$

7. 圖表示

ぐらふハ近世數學ノ進步ニ鑑ミ初等數學ニ採リ入レラレタ極メテ大切ナ教材デアル. 教師タラントスルモノハソノ眞意義ヲ正確ニ把握シナケレバナラヌ.

ぐらふニハ統計ノ結果ヲ表ハスニ用ヒレル棒ぐらふ, 繪畫ぐらふ,

次數ノ高イ式ヤ文字ヲ澤山含ンダ式ヲ取扱フ必要ハナイ.

因數分解ハ重要ナル代數的操作デハアルガ諸君ガ練習スベキ程度範圍ハ次ノヤウナモノデアル.

(1) 單項因數シ括リ出スコト

例 $2a(x-y)+3b(y-x)=2a(x-y)-3b(x-y)$

$$=(x-y)(2a-3b)$$

(2) 平方ノ差ノ因數分解

例 $(x+y)^2-z^2=(x+y+z)(x+y-z)$

(3) 二次三項式ノ因數分解

例 $(x-y)^2-6(x-y)+9=\{(x-y)-3\}^2=(x-y-3)^2$

$x^2+2x-15=(x+5)((x-3)$

$3x^2+7x+2=(3x+1)(x+2)$

(4) 以上ノ型ノ簡單ナ組合セ

例 $x^2-y^2-3x-3y=x^2-y^2-3(x+y)=(x+y)(x-y)-3(x+y)$

$$=(x+y)(x-y-3)$$

6. 方程式

(1) 方程式ニハ未知數ノ値ヲ求メルタメノモノト變數間ノ函數關係ヲ表ハスタメノモノトノ二種類ガアル. 例ヘバ

$$\frac{3}{4}x-\frac{4x-2}{5}=5-\frac{5x}{8} \quad 及ビ \quad \begin{cases} x-2y=3 \\ x^2-4y^2=17 \end{cases}$$

ハ前者ニ屬シ

$$y=2x+1 \quad 及ビ \quad S=a(1+r)^n$$

ハ後者ニ屬スル.

(2) 二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ根ノ公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ハ記憶スベキデアル.

(3) 分數方程式ヲ解クニハ求メラレタ未知數ノ値ガ原方程式ノ分母ヲ零ニシナイカドウカヲ驗スル必要ガアル.

例 $\frac{1}{x(x-1)}-\frac{2}{x^2-1}=0$ ヲ解ケ

解 分母ノ最小公倍數 $x(x^2-1)$ ヲ兩邊ニ掛ケルト

$$x+1-2x=0 \qquad \therefore\ x=1$$

トコロガ此ノ値ヲ原方程式ニ代入スルト分母ガ零トナツテ等式ハ無意味トナル. 故ニ此方程式ニハ根ハナイ.

(4) 無理方程式ヲ解クニハ有理化ノタメニ方程式ノ兩邊ヲ自乘スルノデ所謂無縁根ナルモノガ入ツテ來ル. 從テ求メラレタ未知數ノ値ヲ原方程式ニ代入シ之ヲ滿足スルカ否カヲ驗スル必要ガアル.

例 $\sqrt{2x+3}=x$ ヲ解ケ

解 兩邊ヲ自乘スルト

$$2x+3=x^2 \qquad \therefore\ x^2-2x-3=0 \qquad \therefore\ x=3 \text{ 或ハ } x=-1.$$

二根ノ中前者ハ原方程式ヲ滿足スルガ後者ハ之ヲ滿足シナイ. 即チ無縁根デアル. $x=-1$ ハ次ノ方程式ノ根デアル.

$$\sqrt{2x+3}=-x$$

7. 圖表示

ぐらふハ近世數學ノ進歩ニ鑑ミ初等數學ニ採リ入レラレタ極メテ大切ナ教材デアル. 教師タラントスルモノハソノ眞意義ヲ正確ニ把握シナケレバナラヌ.

ぐらふニハ統計ノ結果ヲ表ハスニ用ヒレル棒ぐらふ, 繪畫ぐらふ,

扇形ぐらふ，折線ぐらふ，曲線ぐらふ等ト純理論的ノモノ卽チ「相伴ツテ變化スル二數又ハ二量間ノ函數的關係ヲ示スモノ」トノ二種類ガアル．

後者ニ就テハ直交軸ニ關シ一次方程式 $y=ax+b$ ハ直線ヲ，二次方程式 $x^2+y^2=a^2$ ハ圓ヲ，$y^2=px$ ハ拋物線ヲ，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ハ楕圓ヲ又 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ハ双曲線ヲ表ハスコト位ハ心得ル必要ガアル．

第4章　幾　何　學

幾何學ヲ學ブニハ先ヅソノ基礎事項

(1)　公理，定義

(2)　定理及ビ系

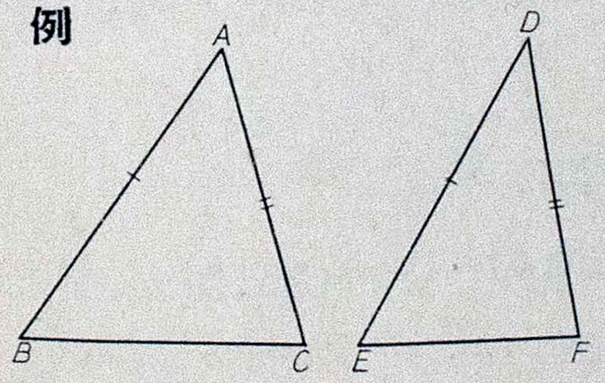
(3)　基本作圖問題

(4)　基本軌跡問題

ヲ明確ニ記憶シ，次ニハ演繹推理ニヨル嚴密ナ思考法ト正確ナ發表法トヲ練習スルコトヲ要スル．又平素直觀實測ヲ重ンジ定義等ヲ實物ヲ離レテ其圖形ヲ正シク想像シ得ルヤウニシ，定理ノ證明ナドハ自ラ發見創造スル如キ心掛ガ肝要デアル．

公理，定理等ハ教科書ニヨツテ多少ハ異ナルモノデアルカラ各自ガ主トシテ研究シテヰル書物ノモノヲ記憶スレバヨイ．ソシテ文章デ記憶スルノミナラズ假設終結ノ略記ト圖形トデ内容ヲ簡潔ニ把握出來ルヤウニ練習スルコトガ望マシイ．

例



$\left.\begin{array}{l}AB=DE\\AC=DF\\\angle A>\angle D\end{array}\right\}$ ナラバ $BC>EF$

$\left.\begin{array}{l}AB=DE\\AC=DF\\BC>EF\end{array}\right\}$ ナラバ $\angle A>\angle D$

コレハ二ツノ三角形ノ邊及ビ角ノ大小ニ關スル次ノ定理ヲ示スモノデアル．

(1) 一ツノ三角形ノ二邊ガ夫々他ノ三角形ノ二邊ニ等シク夾角ガ不等ナルトキハ大ナル夾角ヲ有スル三角形ノ第三邊ハ小ナル夾角ヲ有スル三角形ノ第三邊ヨリモ大デアル.

(2) 一ツノ三角形ノ二邊ガ夫々他ノ三角形ノ二邊ニ等シク第三邊ガ不等ナルトキハ, 大ナル方ノ對角ハ小ナル方ノ對角ヨリモ大デアル.

一般ニハ先ヅ理論的方面ヲ研究シテ次ニ其ノ理論ヲ應用スル問題ヲ練習スルノガ普通ノヤウニ考ヘラレテヰル. 然シ數學特ニ幾何學ノ理論ハ唯其レダケヲ讀ンデモ判ラヌ場合ガ多ク應用問題ヲ練習シテヰル中ニ逆ニ理論ノ研究ガ深メラレルモノデアル. 例ヘバ軌跡ノ問題ノ證明ハドウスレバヨイカ, 何故ニ斯樣ナ證明ヲ用ヒネバナラナイカトイフコトヲ抽象的ニ考ヘルヨリモ問題練習ヲスル方ガ早道デアル.

8. 證明問題解法ノ考案

次ニ示スモノハ幾何學ニ於ケル證明問題解法ノ重ナル方法デアル.

普通ノ考案 此ノ方案ハ假設トシテ與ヘラレタ條件ヲ A トシ, 終結ヲ L トスルトキ, 途中デ公理, 定理, 定義, 假設ノ殘ツテヰル部分等ヲ用ヒナガラ次ノヤウニシテ A カラ L ニ到達スル考ヘ方デアル.

(甲) A ガ成立スルトキ B ガ成立スル.

(乙) B ガ成立スルトキ C ガ成立スル.

(丙) C ガ成立スルトキ D ガ成立スル.

(丁) D ガ成立スルトキ L ガ成立スル.

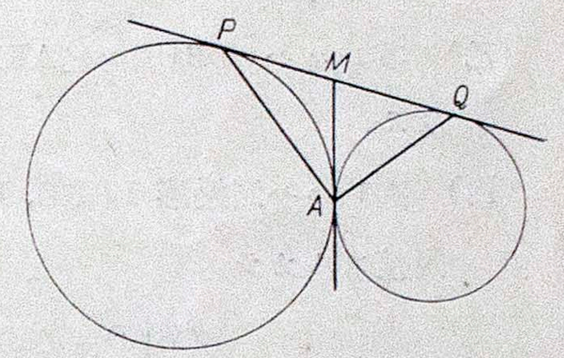
此レハ何モ四段階ニ限ラナイガ斯クノ如キ順序ニヨツテ假設 A カ

ラ終結 L ニ到達スルコトヲ示スモノデアル.

例 二圓ガ A ニ於テ外接シ一直線ト夫々 P, Q ニ於テ切スルトキハ

$$\angle \mathrm{PAQ}=\mathrm{R}\llcorner$$

(考案ノ順序)



(甲) 兩圓ハ相切シテヰルカラ (A) A ニ於テ共通切線ヲ引クコトガ出來ル. (B) コレト PQ トノ交ハリヲ M トスル.

(乙) 其レガ出來レバ (B) PQ ハ兩圓ニ切スルカラ

$$\angle \mathrm{MPA}=\angle \mathrm{MAP},\ \text{及ビ}\ \angle \mathrm{MQA}=\angle \mathrm{MAQ} \qquad (C)$$

(丙) コレガ成立スレバ公理ニヨリ

$$\angle \mathrm{MPA}+\angle \mathrm{MQA}=\angle \mathrm{MAP}+\angle \mathrm{MAQ}=\angle \mathrm{PAQ} \qquad (D)$$

(丁) コレガ成立スレバ (D) 三角形ノ內角ノ和ハ 2 直角ニ等シイカラ

$$\angle \mathrm{PAQ}=\mathrm{R}\llcorner$$

此ノ考察ハ最モ普通ノモノデアツテ證明ハ此ノ考察ノ順序ニ從ツテ書キ上ゲレバヨイ.

問 次ノ問題ノ證明ヲ上ノ順序ニ從ツテ考案セヨ.

(1) PA ハ BC ニ平行デ PC ハ AB ト O ニ於テ交ハルトキハ

$$\triangle \mathrm{POB}=\triangle \mathrm{ACC}$$

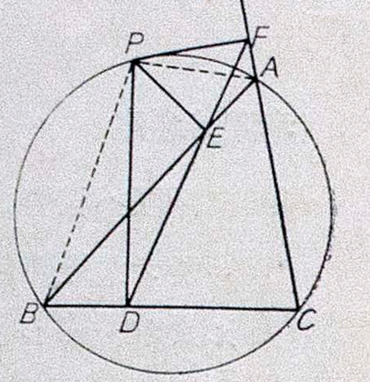
(2) $\triangle \mathrm{ABC}$ ニ於テ $\angle \mathrm{A}=\mathrm{R}\llcorner$ デ X, Y ハ夫々 AB, AC 上ノ點ナルトキハ

$$\mathrm{BY}^2+\mathrm{CX}^2=\mathrm{XY}^2+\mathrm{BC}^2$$

解析ニ依ル考案 此ノ方法ハ終結カラ次第ニ逆ニ「コウアツテ呉レレバ充分デアル」トイフコトヲ繰返シツツ既知ノ假設, 公理, 定理等ニ導イテ行ク方法デアツテ, 幾何學ノミナラズ數學一般ニ用ヒラレル考ヘ方デアル.

例 △ABC ノ外接圓周上ノ任意ノ一點 P カラ △ABC ノ各邊ニ引イタ垂線ノ足 D, E, F ハ一直線上ニアル.

考ヘ方ノ道順



（甲） ED ト EF トガ一直線ヲナスコトヲ證明スレバヨイ.

（乙） 其レニハ ∠BED＝∠AEF デアレバ充分デアル.

（丙） 其レニハ四邊形 PBDE, PEAF ハ共ニ圓ニ內接スルカラ

∠BED＝∠BPD,　∠AEF＝∠APF

トナリ ∠BPD＝∠APF トナレバ充分デアル.

（丁） 其レニハ △PDB, △PFA ハ共ニ直角三角形デアルカラ ∠PBD＝∠PAF デアレバ充分デアル.

（戊） 處ガ此レハ四邊形 PBCA ガ圓ニ內接スルカラ成立シテヰル.（既知事項）

此ノ方法ニヨツテ解法ヲ發見シタ後證明ヲ仕上ゲルニハ其ノ儘ノ順序ニ書キ下セバヨイ. 然シ假設カラ初メテ終結ニ終ルヤウナ普通ノ證明ヲ書キ上ゲナケレバ滿足出來ナイ場合ハ上ノ考案ヲ逆ニ書イテ仕上ゲノ證明ヲスレバヨイ.

問 次ノ問題ノ證明ヲ解析法ニヨツテ考案セヨ.

△ABC ノ垂心ヲ H トシ, AH ガ邊 BC 及ビ外接圓ノ周ト出會フ點ヲ夫々 D, E トスルトキハ HD＝DE

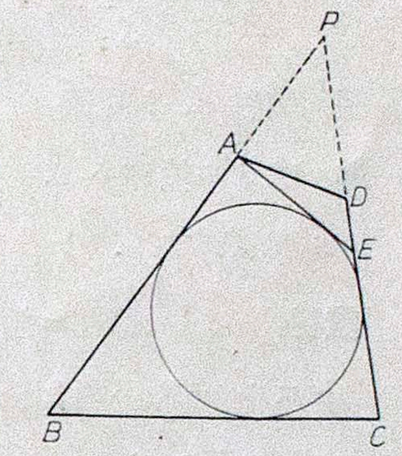
矛盾ニ依ル考案（歸謬法） 矛盾ニ依ル證明法ハ矛盾對當ノ論理ヲ用ヒルモノデアツテ困難ナ數學ノ問題ヲ解クノニ效果的デアル. “X ハ Y デアル„ トイフ命題ニ對シテ “X ガ Y ナラズ„ ト假

定シテ其處ニ矛盾ガアルコトヲ示ス方法デアル. 卽チ

（甲） X ハ Y デアル.　（乙） X ハ Y デハナイ.（甲ノ否定）

ノ兩者ハ矛盾スルモノデ一方ガ僞デアレバ他方ハ自ラ眞デアルト斷定シテヨイ.

例 凸四邊形 ABCD ノ相對スル一組ノ邊ノ和ガ他ノ二邊ノ和ニ等シイトキハ此ノ四邊形ニハ內接スル圓ヲ畫クコトガ出來ル.



（證明ノ考案）

線分 BC 及ビ半直線 BA. CD ニ切スル圓 O ヲ畫ク.

（甲） 今 AD ガ圓 O ニ切シテヰナイモノトスル.

（乙） 然ルトキハ A カラ圓 O ニ引イタ切線ハ半直線ト點 D ニ非ザル點 E ニ於テ交ハリ四邊形 ABCE ハ圓 O ニ外接スルカラ

AE＋BC＝AB＋CE

假說ニヨリ AD＋BC＝AB＋CD　∴ AD∼AE＝CD∼CE＝DE「コレハ三角形ノ二邊ノ差ハ他ノ一邊ヨリ小デアル」トイフ定理ニ反スル.

（丙） デアルカラ甲ニ於ケル假定ハ僞デアル.

（丁） 故ニ「AD ハ圓 O ニ切シテヰル」トイフノガ眞デアル.

證明ヲ仕上ゲルニハ上ノ順序ニ書キ上ゲサヘスレバヨイ. 此ノ證明ニ於テ最モ大切ナ段階ハ（乙）デアル. 卽チ（乙）ノ終リニ於テ僞ガ生ジタ原因ハ（乙）ノ論理ニ間違ナケレバ（甲）ニ於ケル假定ニ僞リガアルト斷定サレル. 若シ（乙）ノ論理ニ誤リガアリトスレバ（甲）ヲ否定スルコトハ出來ナイカラデアル.

9. 軌跡ノ證明

或圖形ガ與ヘラレタ條件ヲ滿足スル點ノ軌跡デアルト斷定出來ル

タメニハ

［I］與ヘラレタ條件ヲ滿足サセル點ハ皆或圖形上ニアリ.

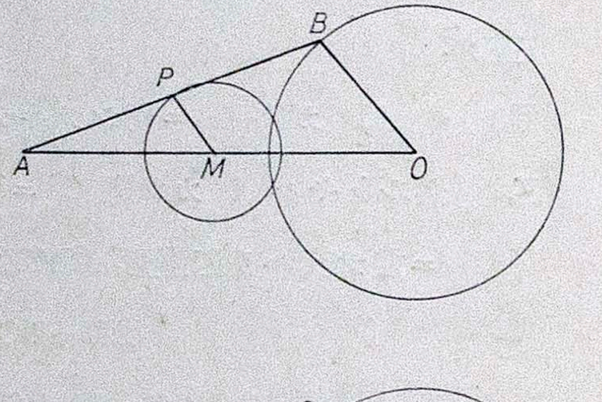
［II］コノ圖形上ノ點ハ皆其ノ條件ヲ滿足スル.

コトノ二ツノ命題ノ證明ガ可能デナケレバナラナイ.

例　定點 A ト定圓 O ノ周上ノ點トヲ結ブ線分ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ.

解　求メル軌跡ハ AO ノ中點 M ヲ中心トシ圓 O ノ半徑ノ半分ヲ半徑トスル圓周デアル.

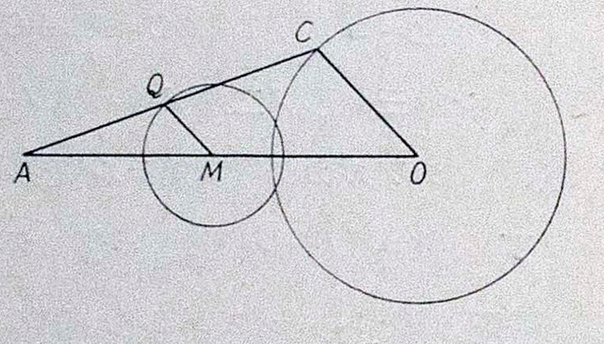
［證明］（I）　條件ニ適スル任意ノ點ヲ P トシ, P ヲ中點トスル線分ヲ AB トスル. (B ハ圓周上ノ點) PM, BO ヲ引ケバ P ハ AB ノ中點, M ハ AO ノ中點デアルカラ



$$PM=\frac{1}{2}OB$$

故ニ點 P ハ M ヲ中心トスル圓 O ノ半徑ノ半分ヲ半徑トスル圓周上ニアル.

(II)　次ニ其ノ圓 M ノ周上ノ任意ノ點ヲ Q トスル. Q ヲ中點トスル線分 AC ヲ引クト Q ハ AC ノ中點, M ハ AO ノ中點デアルカラ



$$OC=2MQ=\text{圓 O ノ半徑}$$

故ニ C ハ圓 O ノ周上ニアル.

故ニ Q ハ條件ニ適スル點デアル.

依ツテ求メル軌跡ハ AO ノ中點 M ヲ中心トシ圓 O ノ半徑ノ半分ヲ半徑トスル圓周デアル.

注意　上ノ解ニアルヤウニ幾何學ニ於テハ屢々「……ナル任意ノ點……」ト

イフ言葉ヲ使用スルモノデアルカラ其ノ意味ヲ明瞭ニ理解シテ置クコトハ大切ナコトデアル. コレヲ他ノ言葉デ言ヒ換ヘルト解(II)ノ任意ノ點Qハ「圓周 M 上ノ勝手ナ點 Q ヲトル」或ハ「圓周 M 上ノアラユル點ノ代表トシテ點 Q ヲトル」トイフ意味ガアルカラ例ヘバ $\angle AMQ=30^\circ$ デアルカラナドト特別ナ性質ヲ與ヘル言葉ヲ用ヒテハナラナイ.

又 (I), (II) ノ證明ノ圖ヲ二通リ畫イタノハ (I)(II) ノ解ノ區別ヲ鮮明ナラシメ且ツ思考ノ徑路ヲ明確ナラシメルタメデアル.

問　次ノ問題ノ解ヲ試驗ニ出サレタ積リデ正シク書キ上ゲヨ.

P ハ與ヘラレタ弧 AB 上ノ任意ノ點デアル. 弦 AP ヲ延長シテ弦 BP ニ等シク PQ ヲトルトキ, 點 Q ノ軌跡ヲ求メヨ. (軌跡トナル弧ノ兩端ヲ明瞭ナラシメヨ)

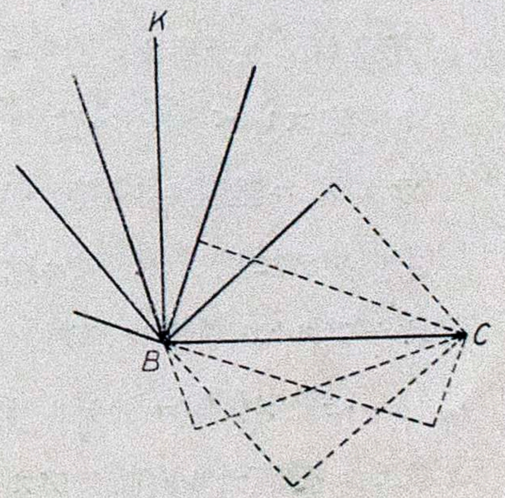
軌跡ノ發見　軌跡ノ問題デハ軌跡ヲ明示シテアルモノトソウデナイモノトガアル. 明示シテナイ場合ニハ解答者各自ガ發見セネバナラナイ. コレニ就テハ初等幾何學ニ於ケル軌跡ハ次ノ三ツノ場合ノ何レカデアルコトヲ承知シテ置クガヨイ.

(1)　直線, 半直線, 線分

(2)　圓, 圓弧

(3)　(1)(2) ノ組合ハサレタルモノ

ソシテ次ノヤウナ方法ニヨツテ發見スル.



第一　條件ニ適スル多クノ點ヲ正確ニ作圖スルコト

例　底邊 BC ガ固定セル三角形 ABC ニ於テ邊 AB ノ長サヲ點 C ヨリ此ノ邊

ヘノ垂線 CD ニ等シク取ルトキ頂點 A ノ軌跡ヲ求メヨ.

此ノ問題ノ條件ニ適スル點ヲ出來ルダケ多ク取レバ圖ノ通リデアッテ, 求メル軌跡ハ點 B ニ於テ B ニ垂直デ且ツ BC ニ等シイ線分 BK, ヲ直徑トスル圓周デアルコトヲ察知スルコトガ出來ル.

第二 條件ニ適スル特殊ナ點 (極端ナ點) ヲ作圖スルコト

前例ニ於テ特殊ナル點ハ

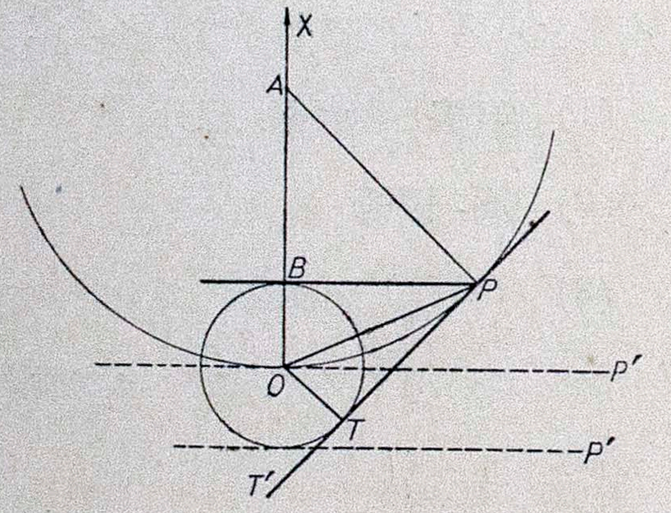
(1) $\angle ABC = R\llcorner$ ナルトキ頂點 A ハ K ニ一致スル.

(2) $\angle ABC = 45°$ ナルトキ AB＝AC トナル.

(3) $\angle ABC = 0°$ ナルトキ頂點 A ハ B ニ一致スル.

卽チ條件ニ適スル特殊ナル點ハ比較的作圖ガ簡單デ然モ求メル軌跡ヲ畫クニハ必要ナモノデアルカラ此ノ方法ニヨルト軌跡トナルベキ圖形ノ性質ヲ稍々的確ニ知ルコトガ出來ル.

例 定圓 O ノ中心ヨリ引ケル半直線 OX ガ定マレルトキ, 此ノ直線上ノ任意ノ點ヲ中心トシ, 點 O ヲ通ル圓ト原圓トノ共通切線ガ此ノ動圓ニ切スル點 P ノ軌跡ヲ求メヨ.



今試ミニ動圓ノ中心 A ヲ半直線 OX 上デ遙カニ遠クニアルト假定スレバ $\overset{\frown}{OP}$ ハ點 O ニ於テ OX ニ垂直ナル直線 OP′ ニ如何程デモ近ヅク. 故ニ點 P ハ圖ニ於ケル P′ ノ方向遙カ遠方ニアルベキデアルカラ軌跡ハ直線又ハ半直線デアルト斷定スルコトガ出來ル. 如何ニモ此ノ例題ニ於ケル軌跡ハ圓 O ト半直線 OX トノ交點 B ニ於テ OX ニ垂直ナル直線デアル. 卽チ BP, OP, OT ヲ引クコトニヨッテ出來

ル △OBP, △OTP ヲ比較スレバハ

$$\angle BOP = \angle APO = \angle POT \qquad (AO = AP,\ AP \parallel CT)$$

$$OB = OT, \quad OP \text{ ハ共通}$$

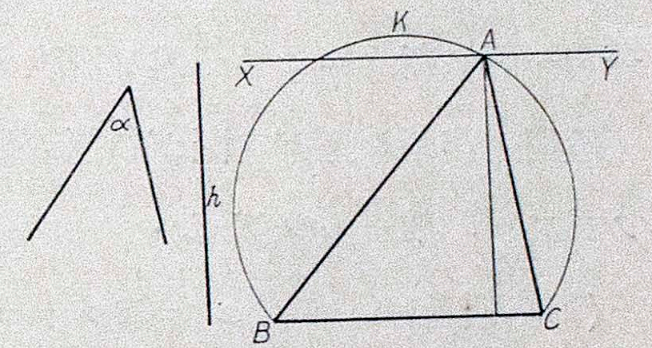
故ニ兩三角形ハ合同トナルカラ $\angle OBP = \angle OTP = R\llcorner$ ナルコトヲ證明スルコトガ出來ル.

10. 作圖問題ノ解法

次ニ示ス例題ノ解法ヲ注意深ク讀マナイト後ニ述ベル說明ヲ確實ニ摑ムコトハ出來ナイ.

例 定線分 BC ヲ底邊トシ頂角ガ α ニ等シク, 高サガ線分 h ニ等シイ三角形ヲ畫ケ.

解析 條件ニ適スル三角形 ABC ガ求メラレタモノトスル. 頂點 A ノ位置ガ明カトナレバヨイ.



(1) 求メル三角形ノ頂點 A ハ BC カラ h ニ等シイ距離ニアルカラ此ノ點ハ BC カラ h ナル距離ニアル點ノ軌跡卽チ BC カラノ距離ガ h ニシテ BC ニ平行ナル直線 XY 上ニアル.

(2) 又此ノ頂點 A ハ ∠BAC ガ α ニ等シイカラ BC ヲ $\angle\alpha$ ニ等シイ角ヲ以テ見込ム點ノ軌跡卽チ BC ヲ弦トシ $\angle\alpha$ ニ等シイ角ヲ含ム弓形ノ中 BC ニ對シテ XY ト同側ニアル弓形ノ弧 BKC 上ニアル.

故ニ (1)(2) 兩軌跡ノ交點トシテ頂點 A ノ位置ハ定マル.

作圖 BC カラ h ノ距離ニアル直線 XY ヲ引ク. BC ヲ弦トシテ $\angle\alpha$ ニ等シイ角ヲ含ム弓形ノ中 BC ニ對シテ XY ト同側ニアル弓形ノ弧 BKC ヲ畫ク. 直線 XY ト $\overset{\frown}{BKC}$ トノ交リヲ A トシ, AB, AC ヲ引ケバ △ABC ハ求メルモノデアル.

證明 省略, 讀者各自ニ試ミヨ.

吟味　XY ノヤウナ直線ハ恒ニ二ツアツテ一ツノ XY ニ對シテ $\overset{\frown}{BKC}$ ハ恒ニ一ツアル.

一ツノ直線 XY ト一ツノ弧 $\overset{\frown}{BKC}$ トノ交リ A ハ

兩者ガ交レバ二ツ

兩者ガ相切スレバ一ツ

兩者ガ離レテヰレバナイ.

依テ全體ニ於テ求メル三角形ハ四ツアル場合, 二ツアル場合, 無イ場合ノ三通リニナル.

作圖ハ解析ノ筋道ニ從テ圖形ヲ作リ上ゲル方法ヲ述ベルダケデヨイ. 此ノ場合後デ說明スルトキ作圖シタ順序ヲ今一度見直シ文章ハ一句一行ヲ新タニシテ記述ヲ明瞭ナラシムルガヨイ.

證明ハ作圖シ上ゲタ圖ガ問題ノ條件ニ適シテヰルコトヲ確メルモノデアル. 卽チ上ノ例デハ

(1)　頂角 A ガ $\angle\alpha$ ニ等シイコト.

(2)　頂點 A ニ於ケル高サガ線分 h ニ等シイコト.

(3)　定線分 BC ヲ底邊トシテヰルコト.

ノ三ケ條ガ滿足サレテヰルカドウカヲ一ツ一ツ證明シタノデアル.

吟味ハ詳シク述ベルト限リガナイカラ上ノ例デハ諸君ノ程度ニ於ケル述ベ方ヲ示スタメニ求メル圖形ノ數ヲ場合ニヨツテ列擧シタニ過ギナイ. 算術代數等ノ解法デ言ヘバ答ニ相當スル部分ト考ヘテヨイ.

例ヘバ「底邊ガ a ニ等シク, 頂角ガ α, 高サガ h ニ等シイ三角形ヲ畫ケ」ナル問題ニ對スル求メル圖形ハ一ツヨリ多クハナイ. 何トナレバ此ノ問題デハ三角形ハ平面上如何ナル場所ニ置イテモヨイ. 卽チ位置ハドウデモヨイカラ上例ノヤウニ合同ナ三角形ヲ場所ガ異ナル理由ノ下ニ四ツノ解ガアルト答ヘルコトハ不合理デアルカラデアル. コノヤウニ求メル圖形ノ位置ニ無關係ノ問題ヲ**不定位ノ作圖題**トイヒ, コレニ反シテ上ノヤウニ求メル圖形ノ位置ヲ考ヘテノ問題ヲ**定位ノ作圖題**トイフ.

問　次ノ作圖題ハ定位ノ作圖問題カ, 不定位ノ作圖問題カ. 又各問題ノ正シイ答案ヲ書キ上ゲヨ.

(1)　三邊ガ夫々線分 a, b, c ニ等シイ三角形ヲ作レ.

(2)　定圓 O ニ內接スル正方形ヲ作レ.

(3)　定線分 BC ヲ底邊トシ頂角ガ α ニ等シイ二等邊三角形ヲ作レ.

昭和13年11月21日印刷
昭和13年11月25日發行

新輯教育數學講座
第5回配本

豫約頒價
￥2.00

編輯兼發行者　南條初五郎
東京市神田區駿河台3ノ9

印刷者　石村勳
東京市牛込區市ケ谷加賀町1ノ12

印刷所　大日本印刷株式會社
東京市牛込區市ケ谷加賀町1ノ12

發行所　合資會社　共立社
東京市神田區駿河台3ノ9
振替東京46074電話神田1518・2624

新輯教育數學講座　第５回配本