NOTE-BOOK

Lectures
on
Integralequations.

By

T. Yoshiye.

(1908)

T. Yoshiye:

Theorie der Integralgleichungen.

[Vorlesung gehalten im 1908.]

Chapter I.

Origin of Integralequations. [Randwertaufgabe]

$x+iy$ ナル complex variable ノ function ヲ $u+iv$ トスレバ, u ト v トハ Cauchy ノ differential equation ヲ satisfy セザルベカラズ.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

逆ニ, コノ二ツノ relation アル時ハ, $u+iv$ ハ $x+iy$ ノ function ナリ.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0. \qquad \text{Laplace's equation}$$

コノ any integral $u(x,y)$ ガ分ル時, コレニ correspond スル v ヲ求ムルヿヲ得ルヤ

$$v=\int_{(x_0y_0)}^{(xy)}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy\right)$$

$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ ナル condition ガ satisfy スレバ, 上ノInteg ハ exist ス。然ルニ コレハ $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ ナル故 satisfy ス.

u ガ定マリテモ v ハ uniquely ニハ定マラズ, x_0y_0 ナル constant ハ arbitrary ナレバナリ.

Laplace equation ノ solution ヲ Harmonic function トイフ。
Logarithmic potential 等ハ Laplace equation ヲ満足ス。

[省略]

Harmonic Functions.

xy-plane 上ニ S ナル Gebiet ヲ取リ，ソノ中ニアル $u(x,y)$ ナル function ガ，下ノ四ツノ properties ヲ有スル時ハ u ヲバ S ナル Gebiet ノ中ニテ Harmonic function ナリトイフ。

i) u, eindeutig und stetig auf S,

ii) $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ exist, eindeutig und stetig in S,

iii) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ exist, eindeutig und stetig in S,

iv) u satisfies Laplace eq. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

今 $$v=\int_{x_0 y_0}^{xy}\left\{-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy\right\}$$

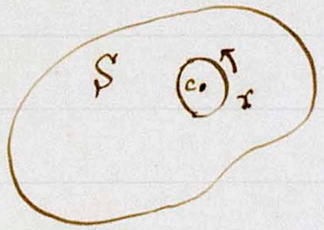
ナル Integral ヲ考フレバ，

v ハ u ト same properties ヲ有ス

$$u+iv=f(z),\qquad z=x+iy,$$

トスレバ $f(z)$ ハ S 中ニテ eindeutig und stetig ナリ。 c ヲ S 中 point トスレバ

$$f(c)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{z-c}dz$$



Put $z-c=re^{it}$,

$dz=ire^{it}dt$,

$$f(c)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}(u+iv)\,i\,dt=u(c)+iv(c).$$

$$\therefore\quad u(c)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u\,dt,$$

$$v(c)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}v\,dt.$$

$u(c)$, $v(c)$ ハ circumference 上ノ value ノ arithmetic mean ニヨリテ与

$u(c)$ ハ circumference 上ノ ~~maximum~~ greatest value ト ~~minimum~~ least val

トノ中間ニアリ。

Harmonic function ハ S ナル Gebiet 中ノ inner point ニ於テハ決シテ greatest 又ハ least value ヲトルコト能ハズ; 若シ greatest or least value ヲトルトセバ, 必ズヤ Rand ノ上ノ point ニ於テセザルベカラズ。

G　K

K ト G トガ equal ナラバ, u ハ Rand ノ中及ビ上ニ於テモ constant ナリ。

二ツノ Harmonic functions u, u' ガ, Rand ノ上ニ於テ same value ヲ取ルナラバ, コノ function ハ全一ノ function ナラザルベカラズ [proof ハ略ス]

Erste Randwertaufgabe.

u ヲ Gebiet 中ノ Harmonic ナリトス。 u ハ S ノ中及ビ Rand 上ニテ continuous ニ, 又 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ ガ Rand ノ上マデモ continuous ナリト assume ス。

$v(x,y)$ ナル function ハ, S ノ中及ビ Rand ノ上ニテモ continuous ニ又 $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ モ然リトス。 ソノ上ニ, v ガ Rand 上ニテ採ル value ハ u ノソレニ equal ナリトス。 只ダ v ガ Laplace eq. ヲ satisfy スルコトハ assume セズ。

Theorem: $$J=\iint_{(S)}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy$$

ナル Integral ハ, $v=u$ ノ時ニ Minimum ナリ。

Proof. $v-u=h$. トスレバ; v ノ有スル continuity ノ properties ヲ皆 h ガ satisfy ス。マタ u ト v トハ Rand 上ニテ equal ナル故 h ハ Rand 上ニテハ vanishing function ナリ。

$$v=u+h.\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial x},\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial y}.$$

$$J=\iint_S\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy+2\iint_S\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y}\right]dxdy$$
$$+\iint_S\left[\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right]dxdy.$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial u}{\partial x}\right)-h\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\iint_S\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}dxdy=\iint_S\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial u}{\partial x}\right)dxdy-\iint_S h\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dxdy$$
$$=\int_{(S)}h\frac{\partial u}{\partial x}dy-\iint_S h\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dxdy.$$

$$\iint_S\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y}\right]dxdy=\int_{(S)}h\left(\frac{\partial u}{\partial x}dy-\frac{\partial u}{\partial y}dx\right)$$
$$-\iint_S h\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dxdy=0.$$

h ハ Rand 上ニテ vanish スル故.

$$\therefore\quad J=\iint_S\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy+\iint_S\left[\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right]dxdy.$$

故ニ J ハ $h=0$ ノ時 Min. トナル。

Converse Theorem: $J=\iint_S\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$

ガ $v=u$ ノ時 min. ナリトセバ; $\overset{v}{\cancel{u}}$ ハ Laplace eq. ヲ満足ス。

proof. $v=u+\alpha h$. [α ハ arbitr. const.]

ト オケバ;

$$J = \iint_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy + 2\alpha \iint_S \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y}\right]dxdy$$
$$+ \alpha^2 \iint_S \left[\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right]dxdy.$$

$$\iint_S \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y}\right]dxdy = \int_{(S)} h\left(\frac{\partial u}{\partial x}dy - \frac{\partial u}{\partial y}dx\right)$$
$$- \iint_S h\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dxdy.$$

vトuトハ Rand上ニテ same valueヲモツ functionナレ
故, Rand上ニテハ $h=0$.

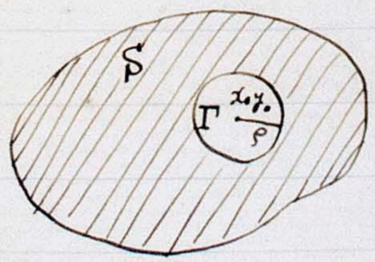
$$\therefore\ J = \iint_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy - 2\alpha \iint_S h\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]dxdy$$
$$+\alpha^2 \iint_S \left[\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right]dxdy.$$

若シ $v=u$ヲ入レタル時ニ, Integralガ min.ナル時ハ second integralハ vanishセザルベカラズ, 何トナレバ Integralガ zeroナラズトスレバ, αヲ sufficientlyニ小サクシテ last Integralヲ除キテモ影響ナシト見得ベキ程ニ小サク取レ Jハ $\iint\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}dxdy$ ヨリモ小トナルヲ以テ, min.ナルヿ能ハズ, 故ニ

$$\iint_S h\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]dxdy=0.$$

ナラザルヲ得ズ。

若シ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ガ Sノ中ニテ zeroナラザル所アリトセバ ソノマハリニ ρナル radiusノ circleヲヱガキ, ρヲ充分ニ小サクス。今



$S-\Gamma$: $h=0$

Γ : $h=[\rho^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2]$

ナルゴトク hヲ定ムレバ; $h, \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$ハ Γ中ニテハ continuus, マタ hハ circle中ニテハ positive

ニシテ, マタ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ハ constant sign ヲ有スル様ニ ρ ヲ小サク定ムルヿヲ得。故ニ $h\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]$ ハ T 中ニテハ constant sign ヲ有シ, T 以外ニテハ vanish ス。故ニ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \qquad \text{Q. E. D.}$$

サテ今 v ガ continuous condition ヲ satisfy シ, 且ツ ~~[illegible]~~ Rand 上ニ於テ与ヘラレタル Continuous value ヲ取ル Function ナリトス。サスレバ

$$\Omega(v)=\iint_S\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy$$

今 Rand 上ノ value ガ constant ナラズトスレバ, コノ Integral ハ always positive ニシテ決シテ 0 トナラズ。若シ Ω(v) ガ 0 ナレバ $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$ ハ always positive ナルユヘ, S 中到ル処ニテ $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2=0$ ナラザルベカラズ。

故ニ $\frac{\partial v}{\partial x}=0$, $\frac{\partial v}{\partial y}=0$.

即チ $v=\text{const.}$ v ガ S 中ニテ const. ナラバ v ハ Rand 上ニテモ const. ナリ, 故ニ Ω(v)>0. ナリ。

然ルニコノ continuous integral ノ value ニハ Unter Grenze ガアラザルベカラズ。v ヲアル value ヲ与フルモ Lower limit ヨリモ小ナルコトヲ得ザルベキ limit ガ exist セザルベカラズ。凡テノ v ノ中ニテ此 integral ガ least value ヲトル物ノ v ニ correspond スル function ヲ u トス。v ノ代ハリニ u ヲ入ルルトキハ Ω(u) ハ Minimum ナリ。

然ルニ u ニ対シテ此 integral ガ minimum ナルヲ以テ, Conve

Theorem ニヨリテ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ ナラザルベカラズ。故ニ カクノ如キ uヲ取レバ, Rand ノ上ニテハ与ヘラレタル value ヲ取ル Harmonic f. ナリ。

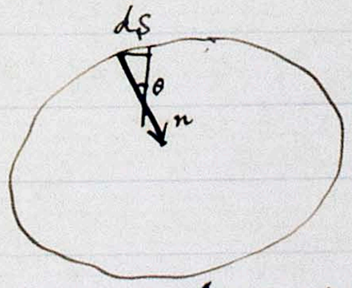
Thomson-Dirichlet's principle. コノ integral ノ lower limit ハ存スレドモ, ソノ Minimum ハ exist スルヤ否ヤ分ラザルナリ。 [Riemann, Abelian f. 上ノ application.]

Carl Neumann ハ Methode des arithmetischen Mittels ヲ用ヒテ 初メテ prove セリ。其他 Schwarz, Poincaré, Hilbert (Calculus of Variation, 1899) 等ノ proof アリ。

Riemann ノ proof ノ Lemma ニ於テ, U, V ナル two f. アリテ S ノ中ニテ eindeutig und stetig ニシテ, U, V ノ x, y ニ付テノ first derivative ガ Rand ノ上マデ eindeutig und stetig, $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ …… ガ S ノ中ニテ stetig ナル時ハ

$$\iint_S \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}\right)dx\,dy = \int_{(S)} U\left[\frac{\partial V}{\partial x}dy-\frac{\partial V}{\partial y}dx\right]-\iint_S U\Delta V\,dx\,dy$$

where $\Delta V=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$.



$$dy=-ds\sin\theta,\quad dx=-ds\cos\theta$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}dy-\frac{\partial V}{\partial y}dx=-ds\left(\frac{\partial V}{\partial x}\sin\theta-\frac{\partial V}{\partial y}\cos\theta\right).$$

dn ヲ xy ノ方向ニ decompose スレバ

$$\sin\theta=\frac{dx}{dn},\qquad \cos\theta=-\frac{dy}{dn}.$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}dy - \frac{\partial V}{\partial y}dx = -ds\left(\frac{\partial V}{\partial x}\sin\theta - \frac{\partial V}{\partial y}\cos\theta\right)$$
$$= -ds\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dn}\right) = -\frac{\partial V}{\partial n}ds.$$

$$\iint_S\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}\right)dx\,dy = -\int_{(S)} U\frac{dV}{dn}ds - \iint_S U\Delta V\,dx\,dy.$$
$$= -\int_{(S)} V\frac{dU}{dn}ds - \iint_S V\Delta U\,dx\,dy.$$

$$\int_{(S)}\left(U\frac{dV}{dn} - V\frac{dU}{dn}\right)ds + \iint_S (U\Delta V - V\Delta U)\,dx\,dy = 0$$

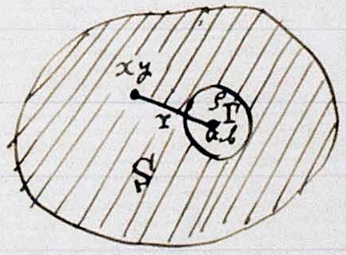
Green's Theorem.

U, V ガ S ノ中ニテ harmonic ナレバ $\Delta V = 0$ ナルヲ以テ

$$\int_{(S)}\left(U\frac{dV}{dn} - V\frac{dU}{dn}\right)ds = 0.$$

$U=1$ ナル harm. f ヲオケバ $\displaystyle\int_{(S)}\frac{dV}{dn}ds = 0.$

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2.$$



$S-\Gamma$ ナル Gebiet 中ニテハ $\log r$ ハ eindeutig und stetig ナリ. $U = \log r$. V ハ S 中ニテ harmonic トスレバ

$$\int_{(S-\Gamma)}\left(\log r\frac{dV}{dn} - V\frac{d\log r}{dn}\right)ds = 0.$$

モシ (a,b) ガ S ノ外ノ point ナラバ

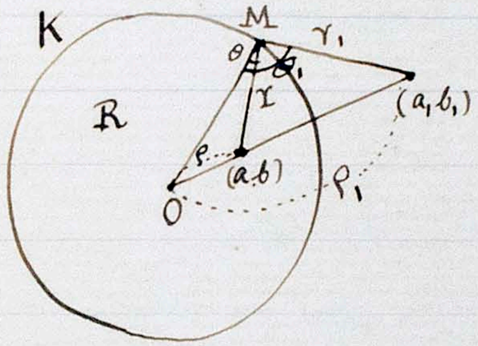
$$\int_{(S)}\left(\log r\frac{dV}{dn} - V\frac{d\log r}{dn}\right)ds = 0.$$

コレヨリ $\displaystyle V(a,b) = \frac{1}{2\pi}\int_{(S)}\left(\log r\frac{dV}{dn} - V\frac{d\log r}{dn}\right)ds.$ ヲ得

[proofヲ畧

一般ニ Rand ノ value ヲ与ヘラレタルノミニテハ $\frac{dV}{dn}$ ガ不明ナルカラ, $V(a,b)$ ハ integrate セラレズ。 然ルニ特ニ Circle ノ場合ニテハ $\frac{dV}{dn}$ ガ分ルヲ除イテ integrate スルコトヲ得。

Circle ノ場合.



$\rho\rho_1 = R^2$ ナル如ク ρ_1 ヲ取ル.

$$V(a,b)=\frac{1}{2\pi}\int_{(K)}\left(\log r\frac{dV}{dn} - V\frac{d\log r}{dn}\right)ds.$$

$$0=\frac{1}{2\pi}\int_{(K)}\left(\log r_1\frac{dV}{dn} - V\frac{d\log r_1}{dn}\right)ds.$$

$$\therefore\ V(a,b)=\frac{1}{2\pi}\int_{(K)}\left\{\log\frac{r}{r_1}\frac{dV}{dn} - V\left(\frac{d\log r}{dn}-\frac{d\log r_1}{dn}\right)\right\}ds.$$

$$\int_{(K)}\log\frac{r}{r_1}\frac{dV}{dn}ds = \int_{(K)}\log\frac{\rho}{R}\frac{dV}{dn}ds = \log\frac{\rho}{R}\int_{(K)}\frac{dV}{dn}ds = 0.$$

$$V(a,b)=\frac{1}{2\pi}\int_{(K)}V\left(\frac{d\log r_1}{dn}-\frac{d\log r}{dn}\right)ds.$$

故ニ V ノ S ノ gneny ノ Circle ノ上ノ value ガ ~~様~~ 与ヘラレシトキハ, Circle ノ中ノ value $V(a,b)$ ハ, 之ヲ求ムルコトヲ得。
此ノ $V(a,b)$ ナル integral ハ (a,b) ニ就イテ Laplace Eq. ヲ満足ス。

$$\frac{d\log r_1}{dn}=\frac{1}{r_1}\frac{dr_1}{dn}=-\frac{\cos\theta_1}{r_1}.\qquad \frac{d\log r}{dn}=\frac{1}{r}\frac{dr}{dn}=-\frac{\cos\theta}{r}.$$

$$V(a,b)=\frac{1}{2\pi}\int_{(K)}V\left(\frac{\cos\theta}{r}-\frac{\cos\theta_1}{r_1}\right)ds.$$

$$\rho^2=R^2+r^2-2Rr\cos\theta,\quad \rho_1^2=R^2+r_1^2-2Rr_1\cos\theta_1,\quad \frac{r_1}{r}=\frac{R}{\rho}.$$

$$\frac{\cos\theta}{r}-\frac{\cos\theta_1}{r_1}=\frac{1}{2}\left\{\frac{R}{r^2}-\frac{\rho^2}{Rr^2}-\frac{\rho^2}{r^2R}+\frac{R}{r^2}\right\}=\frac{R^2-\rho^2}{Rr^2}.$$

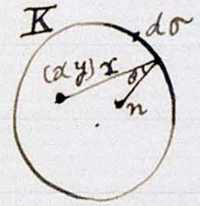
$$V(a,b)=\frac{1}{2\pi R}\int_{(K)}\frac{V(R^2-\rho^2)}{r^2}d\rho.$$

M ノ polar co-ordinates ヲ M (R, Ψ) トスレバ
A ノ 〃 〃 A (ρ, ψ) 〃

$$r^2=R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\Psi-\psi)$$

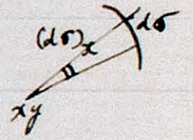
$$V(a,b)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{V(R^2-\rho^2)}{R^2-2R\rho\cos(\Psi-\psi)+\rho^2}d\Psi.$$

Carl Neumann's Method and its Extension.



$$w_x=\int_{(K)}\frac{\partial}{\partial n}\left\{\log\frac{1}{r}\right\}d\sigma.$$ ナル Integral ヲ考フルニ

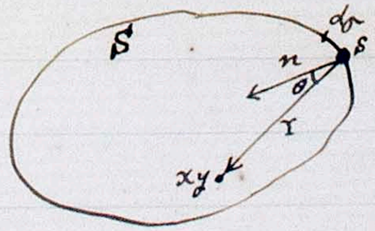
$$=\int_{(K)}-\frac{1}{r}\frac{dr}{dn}d\sigma=\int_{(K)}\frac{\cos\theta}{r}d\sigma.$$



$$\therefore\quad w_x=\int_{(K)}(d\sigma)_x\qquad[\text{angle}]$$

以下ハ全ク C. Neumann, Abelsche Integrale p.p –
中ノ Darstellung ト同一ナルヲ以テ、之ヲ省ク。

Neumann ノ方法ノ extension. 即チ コレト全ク parallel ニ circle ナラザル Gebiet ノ上ニ、之ヲ用ヒテ similar result ヲ得。 Circle ノ代ハリニ Einfachzusammenhangende Gebiet S ヲ取ル。 S ノ Rand ノ上ニ s ノ continuous fn $\varphi(s)$ ヲ取ル。Rand ノ上ニテ Cont. ナリトス。



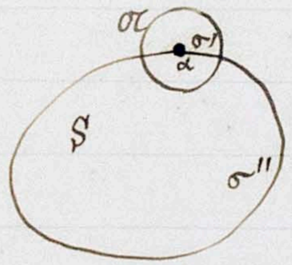
$$\Phi_x=\int_{(S)}\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\log\frac{1}{r}\right)d\sigma=\int_{(S)}\varphi\frac{\cos\theta}{r}d\sigma$$

$\frac{\cos\theta\, d\sigma}{r}$ ハ (x,y) ニ $d\sigma$ ガ subtend スル angle ナリ。此ノ時ハ $\varphi(s)$ ハ (x,y) ガ S ノ中ニテモ外ニテモ可ナリ。只 (x,y) ガ Rand 上ニアラザレバ可ナリ。此ノ時

$$\begin{cases} F_i = \Phi_i \\ F_s = \Phi_s + \pi\cdot\varphi(s) \end{cases}$$

ナル Function ヲ作レバ、F ハ S ナル Gebiet ノ中及ビ Rand ノ上ニテモ eindeutig und stetig ナルコトヲ prove セントス。

Proof: Rand 上ノ point α ヲトリ、α ヲ centre トシテ σ ナル circle ヲ作ル。α ノ中ニアル Rand ノ内部分 σ' ト Rand ノ外ノ部分 σ'' トニ分ルル様ニ circle ヲ小サクスル。



$$\int_{(S)} \varphi\,(d\sigma)_x - \int_{(S)} \varphi(\alpha)\,(d\sigma)_x = \int_{(S)} \{\varphi-\varphi(\alpha)\}\,(d\sigma)_x$$

$$= \int_{\sigma'} \{\varphi-\varphi(\alpha)\}\,(d\sigma)_x + \int_{\sigma''} \{\varphi-\varphi(\alpha)\}\,(d\sigma)_x$$

$$= U_x + V_x.$$

$\int_{(S)}(d\sigma)_x = 2\pi$. ナレドモ $\int(d\sigma)_x$ ハ 2π ヨリ小ナルカ否カハ分ラズ。Rand ガ finite ナルヲ以テ、Rand ガ infinitely small ナラザレバ

$\cancel{\int_{(S)} |(d\sigma)_x| = N}$, $\cancel{2\pi \leq N}$. ナル Obergrenz ヲトルヲ得。

$\int_{(S)} (d\sigma)_{\cancel{x}} \cancel{= \pi} < N.$

$\varphi(s)-\varphi(\alpha)$ ハ Continuous function ニシテ、s ガ α ニ近ヅク時 zero ニ tend スル。α ナル circle ノ radius ヲ sufficiently small ニスル時ハ

$$|\varphi(s)-\varphi(\alpha)| < M$$

$$\left\{\begin{aligned}&\int_{(\sigma)}(d\sigma)_j = 2\pi.\\&\int_{(\sigma)}(d\sigma)_\xi = \pi.\end{aligned}\right.$$

ξ ハ Rand 上ノ point.

ナル様ニスルヲウ。サスレバ

$$|U_x| < M\int_{\sigma'}(d\sigma)_x.$$

シカルニ一般ニ $\int_{\sigma'}(d\sigma)_x < N.$

$$\therefore\ |U_x| < MN.$$

M ナル constant ハ ξ ガ α ニ近ヅク時 zero ニ tend ス。故ニ $\mathfrak{a}$ ヲ充分 small ニトリテ $|U_x| < \frac{\varepsilon}{3}$ ナラシムルヿヲ得。

α ヲ Centre ニシテ今作リタル $\mathfrak{a}$ ヨリ更ニ小ナル circle ヲ作ル。然ル時ハ V_x ハ σ'' ノ上ノ integral ニシテ, circle ノ外ノ integral ナリ。

$$V_x = \int_{\sigma''}\{\varphi-\varphi(\alpha)\}\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}d\sigma$$

$\mathfrak{a}$ ヲ sufficiently small ニトレバ, V_x ノ Schwankung ヲ何程ニテモ小ナラシムルヲ得, 即チ Schw. $V_x < \frac{\varepsilon}{3}.$

故ニ $\mathfrak{a}$ ノ中ニテハ Schw.$(U_x + V_x) < \varepsilon.$

α ヲ centre トシテ尚ホ小ナル circle ヲ作レバ, 今云ヘ

$$\pi[\varphi(\xi)-\varphi(\alpha)]$$

ナル function ノ absolute magnitude ガ ε ヨリモ小ナル様ニ $\mathfrak{a}^\circ$ ナル circle ヲ小サクシタリトス. サスレバ $\mathfrak{a}^\circ$ ノ中ニテハ

$$\left\{\begin{aligned}&\text{Schw.}(U_x+V_x)<\varepsilon \qquad \text{及ビ}\\&|\pi[\varphi(\xi)-\varphi(\alpha)]|<\varepsilon\end{aligned}\right.$$

By p. 11 $$\left\{\begin{aligned}F_j &= 2\pi\varphi(\alpha)+\int_{(\sigma)}\{\varphi(\xi)-\varphi(\alpha)\}(d\sigma)_j.\\F_\xi &= 2\pi\varphi(\alpha)+\int_{(\sigma)}\{\varphi(\xi)-\varphi(\alpha)\}(d\sigma)_\xi+\pi\{\varphi(\xi)-\varphi(\alpha)\}.\end{aligned}\right.$$

$\mathfrak{a}^\circ$ ノ中ニテハ F ナル function ノ Schwankung ガ 3ε ヨリモ小ナルヿヲ prove スルヲ得。即チ

$$|F_j - F_{j_1}| < \text{Schw.}\int_{(\sigma)}\{\varphi(\xi)-\varphi(\alpha)\}(d\sigma)_{jx} < \varepsilon.$$

$$|F_j - F_s| < \text{Schw.}\int_{(s)}\{\varphi(s)-\varphi(\alpha)\}(d\sigma)_x + \pi|\varphi(s)-\varphi(\alpha)| < 2\varepsilon.$$

$$|F_s - F_{s_1}| < \text{Schw}\int_{(s)}\{\varphi(s)-\varphi(\alpha)\}(d\sigma)_x + \pi|\varphi(s)-\varphi(\alpha)|$$
$$+\pi|\varphi(s_1)-\varphi(\alpha)| < 3\varepsilon.$$

故ニ α^0 ナル circle ノ中ニテハ F ハ continuous ナリ. 即チ F ハ Gebiet S ノ中ニテモ Rand ノ上ニテモ continuous ナルコトヲ知ルナリ。

今 j ヲ Rand ニ近ヅクル limit ニ於ケル limiting value ヲ F_{js} トス。サスレバ

$$F_{js} = \Phi_s + \pi\cdot\varphi(s),$$

之ガ為ニ $F_{js}=\Phi_{js}$. $\therefore \underline{\Phi_{js} = \Phi_s + \pi\cdot\varphi(s)}$

即チ Φ ナル function ハ Rand ニテ discontinuous ナルコトヲ知ルナリ。

次ニ外ノ点ヨリ Rand ニ近ヅク時ノ limiting value ヲ Φ_{as} トスレバ

$$\underline{\Phi_{as} = \Phi_s - \pi\cdot\varphi(s).}$$

カクノ如キハ s ガ ordinary pt ナル時ニ hold ス. s ガ Ecke ヲ有スル時 ソノ angle ヲ α トスレバ

$$\Phi_{as} = \Phi_s - \alpha\cdot\varphi(s).$$

今 Φ_{js} ガ与ヘラレタル時, コノ function ヲ $f(s)$ トスレバ, $f(s)$ ハ s ノ continuous function ニシテ

$$f(s) = \int_{(s)}\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\log\frac{1}{r}\right)d\sigma + \pi\cdot\varphi(s).$$

コヽニ $\varphi(s)$ ガ unkown ナリトス, r ハ Rand 上ノ pt s ヨリ計リタル distance トス。

$$\Phi_x = \int_{(s)} \varphi \frac{\partial}{\partial n}\left(\log \frac{1}{r}\right) d\sigma \qquad [p. 10]$$

若シ今ノ equation ヲ satisfy スル φ ナル contin. fn ガ見出サレタリトセバ, Φ_x ガ construct サレ, 従テ F ナル function ガ construct セラル。

$$\begin{cases} F_j = \Phi_j \\ F_s = \Phi_s + \pi \varphi(s). \end{cases}$$

コレハ F ハ Rand ノ上及ビ Gebiet ノ中ニテ continuous ニシテ, Rand ノ上ニテハ given value $f(s)$ ヲトリ, 且ツ Laplace ノ Equation ヲ satisfy スル function ナリ。 故ニ吾人ノ problem ハ $f(s)$ ガ与ヘラレ

$$f(s) = \int_{(s)} \varphi \frac{\partial}{\partial n}\left(\log \frac{1}{r}\right) d\sigma + \pi \cdot \varphi(s).$$

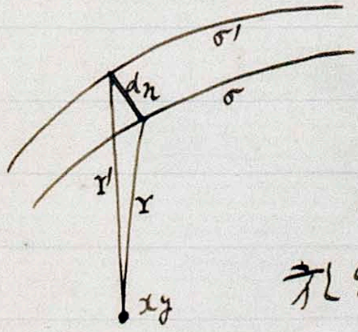
ヲ satisfy スル様ニ $\varphi(s)$ ヲ determine スルニアリ。

Linear Integralgleichung d. zweiter Art. [nach Du Bois Reymond.]

$$f(s) = \int_{(s)} \varphi \frac{\cos\theta}{r} d\sigma + \pi \varphi(s)$$

Φ_x ハ Potential einer Doppelschicht.

$\varphi(s)$ ハ Dichtigkeit der Doppelbelegung.



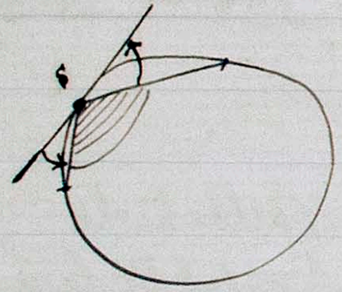
σ, σ' parallel curve. distance $= dn$.

$d\sigma$ ノ上ニハ $-\varepsilon$ ナル curve ノ density
$d\sigma'$ 〃 $+\varepsilon'$ 〃 〃 ヲ与フレバ, (xy) ニ於ケル potential ハ $\varepsilon' \log\left(\frac{1}{r'}\right) d\sigma' - \varepsilon \log\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma.$

$$\Phi_x = \int_{\sigma'} \varepsilon' \log\left(\frac{1}{r'}\right) d\sigma' - \int_{\sigma'} \varepsilon \log \frac{1}{r} d\sigma.$$

ハ σ, σ' ニアル Dichtigkeit ガ (x.y) ニ及ボス Potential ナリ。

$\varepsilon\, d\sigma = \varepsilon' d\sigma'$ ナリトシ, $\log\left(\frac{1}{r}\right) = \log \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial n} \log\left(\frac{1}{r}\right) dn + \ldots\ldots$



トセバ $\Phi_x = \int_\sigma \varepsilon \frac{\partial}{\partial n} \log\left(\frac{1}{r}\right) dn\, d\sigma$

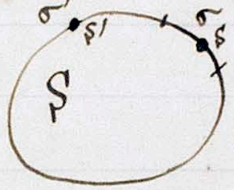
$\varepsilon\, dn = \varphi$. トオケバ; $\Phi_x = \int_\sigma \varphi \frac{\partial}{\partial n} \log\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma$.

故ニ Our problem ハ, Potential ガ與ヘラレタル時 Dichtigkeit der Doppelbelegung ヲ求ムトイフ problem ニ帰ス。

Solution of our problem.

今 S ヲ外ニ對シテ convex ナル Gebiet トシ

$J_x^\sigma = \int_\sigma \frac{\partial}{\partial n} \log \frac{1}{r}\, d\sigma$. ヲ考フ



$$\begin{cases} J_s^\sigma = \int_\sigma (d\sigma)_s \\ J_{s'}^{\sigma'} = \int_{\sigma'} (d\sigma)_{s'} \end{cases}$$

今 $J = \frac{J_s^\sigma + J_{s'}^{\sigma'}}{2\pi}$. トオケバ

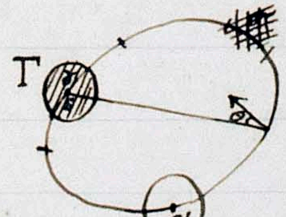
下ノ不等式 $0 < J \leqq 1$. ノ existence ヲ prove セン。

J_s^σ, $J_{s'}^{\sigma'}$ ハ π ヨリ小ナリ。 コハ Gebiet ガ convex ナルヿヨリ follows.

$J_s^\sigma \leqq \pi$. $J_{s'}^{\sigma'} \leqq \pi$.

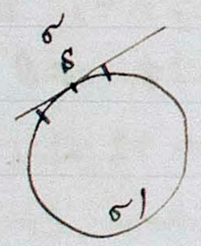
$\therefore \frac{J_s^\sigma + J_{s'}^{\sigma'}}{2\pi} \leqq 1$.

$J > 0$ ナルヿヲ prove スルタメニ, s ナル point ヨリ Rand ノ上ニ straight line ヲ引キ $\cos\theta$ ヲ作レバ, モシソノ pt ガ Γ ナル portion ノ外ノ pt ナレバ $\cos\theta$ ハ zero ト異ナル positive quantity ナリ. angle ノ absolute value ハ $\frac{\pi}{2}$ ヨリ小ナルヲ以テ $\cos\theta > 0$.



マタ 0 ニモアラズ 0 ナル時ハ $\theta = 90°$ ナレバナリ. γ ヨリ[illegible]シル pt ニ対シテハ $\cos\theta \neq 0$.

σ ナル arc ノ上ニ point ガ動ク時, $\cos\theta$ ノ unter Grenz ヲ m トス, s ヨリソノ pt マデノ distance ニハ Obere Grenz アリ. ソレヲ M ト



$$J_\xi^{\sigma} + J_\xi^{\sigma'} = \pi.$$

$$J_\xi^{\sigma} = \int_{\sigma-\gamma} \frac{\cos\theta}{r}\,d\sigma > \frac{m}{M}\int_{\sigma-\gamma} d\sigma = \frac{m}{M}(\sigma-\gamma)$$

$$J_{\xi'}^{\sigma'} > \frac{m}{M}(\sigma'-\gamma').$$

$$J > \frac{m}{2\pi M}(S-\gamma-\gamma') \qquad S\text{ ハ Rand.}$$

γ, γ' ヲ suff. small ニスレバ $S-\gamma-\gamma'>0$. 故ニ

$$J > 0.$$

故ニ $\qquad 0 < u < J \leqq 1.$

φ ハ S ノ上ニテ continuous ナル故, S ナル Gebiet ニテ 其ノ value ニ Obere Grenze G ト Unter Grenze K トアリ

$$G > \varphi > K.$$

今 Rand ヲ二部ニ分チ

$$\begin{cases} \sigma: & G > \varphi > \dfrac{G+K}{2} \\ \sigma': & \dfrac{G+K}{2} > \varphi' > K \end{cases}$$

コレハ $\Phi_x = \int_{(S)} \varphi \frac{\cos\theta}{r} d\sigma$ ハ

$$\left.\begin{aligned} \sigma:\quad & \Phi_\xi \leqq G\int_\sigma \frac{\cos\theta}{r}d\sigma + \frac{G+K}{2}\int_{\sigma'} \frac{\cos\theta}{r}d\sigma. \\ \sigma':\quad & \Phi_\xi \geqq \frac{G+K}{2}\int_\sigma \frac{\cos\theta}{r}d\sigma + K\int_{\sigma'} \frac{\cos\theta}{r}d\sigma. \end{aligned}\right\}$$

$$\therefore \left.\begin{aligned} \Phi_\xi &\leqq G\,J_\xi^{\sigma} + \frac{G+K}{2}J_\xi^{\sigma'} \\ \Phi_\xi &\geqq \frac{G+K}{2}J_\xi^{\sigma} + K\,J_\xi^{\sigma'} \end{aligned}\right\}$$

$$\therefore \left.\begin{aligned} \Phi_\xi &\leqq \pi G - \frac{G-K}{2}J_\xi^{\sigma'} \\ \Phi_\xi &\geqq \pi K + \frac{G-K}{2}J_\xi^{\sigma'} \end{aligned}\right\}$$

コノ function ハ S ノ中ニテ eindeutig und stetig ニシテ、且ツ α ヲ centre トスル suf. small circle ノ中ニテハ any assigned small quantity ヨリモ小ナラシムルヿヲ得. 即チコノ integral ハ α ナル pt ノ Umgebung ニ於テ continuous ナリ.

$$\Phi_x = \int_{(S)} \varphi \frac{\partial}{\partial n} \log\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma$$

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{\xi'} &\leqq \pi G - \frac{G-K}{2} J_{\xi'}^{\sigma'} \\ \Phi_{\xi'} &\geqq \pi K + \frac{G-K}{2} J_{\xi'}^{\sigma'} \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned} \Phi_\xi - \Phi_{\xi'} &\leqq \pi (G-K) - \frac{G-K}{2} J_\xi^{\sigma'} - \frac{G-K}{2} J_{\xi'}^{\sigma} \\ &\leqq \pi (G-K)\left(1 - \frac{J_\xi^{\sigma'} + J_{\xi'}^{\sigma'}}{2\pi}\right) \\ &\leqq \pi (G-K)(1-J) \\ &\leqq \pi ((G-K)(1-\mu). \end{aligned}$$

Φ ノ upper limit ヲ G_1, lower limit ヲ K_1 トスレバ

$$\underline{G_1 - K_1 \leqq \pi (G-K)(1-\mu).}$$

今 $\underline{-\varphi_1(x,y) = \int_{(S)} \{\varphi - \varphi(\alpha)\} \frac{d \log \frac{1}{r}}{dn} d\sigma}$

ナル Function ヲ考フレバ、コハ Rand ノ上ノ value トソノ中ノ pt トガ continuous ニ續ク. 故ニ $\varphi_1(x,y)$ ハ Rand ニ内部ヨリ α ニ近ヅク時 definite value ヲトル.

次ニ φ_1 ヲ用ヒテ

$$-\varphi_2(x,y) = \int_{(S)} \{\varphi_1 - \varphi_1(\alpha)\} \frac{d \log \frac{1}{r}}{dn} d\sigma$$

ヲ作レバ、φ_2 ハ Rand ノ上ニテ Continuous ナルニヨリ determinate value ヲトル. ....

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{(S)} \left(\varphi + \frac{\varphi_1}{2\pi} + \frac{\varphi_2}{(2\pi)^2} + \cdots\cdots + \frac{\varphi_p}{(2\pi)^p} + \cdots\cdots\right) \frac{d \log \frac{1}{r}}{dn} d\sigma$$

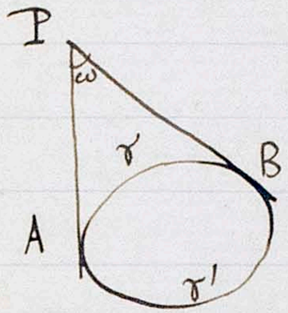
ナル function ハ、S ノ中ニテ eindeutig und stetig ニシテ internal pt ヨリ Rand ニ近ヅク時 given value φ ヲ取ル function ナリ.

$\varphi + \frac{\varphi_1}{2\pi} + \cdots\cdots\cdots$ ガ Uniform convergence ナレバ $u(x,y$

ハ exist ス.

次ニ S ノ外ノ point (ξ,η) ヲ取リ

$$-\varphi_p(\xi,\eta)=\int_{(S)}\{\varphi_{p-1}-\varphi_{p-1}(\alpha)\}\frac{d\log\frac{1}{r}}{dn}d\sigma$$



$$=\int_{(S)}\varphi_{p-1}\frac{d\log\frac{1}{r}}{dn}d\sigma-\varphi_{p-1}(\alpha)\int_{(S)}\frac{\cos\theta}{r}d\sigma$$

ソノ last Integral ハ zero ナルカラ

$$-\varphi_p(\alpha)=\int_{(S)}\varphi_{p-1}\frac{d\log(\frac{1}{r})}{dn}d\sigma.$$

$$\left|\int_r\frac{\cos\theta}{r}d\sigma\right|=\omega,\qquad \left|\int_{r'}\frac{\cos\theta}{r'}d\sigma\right|=\omega.$$

φ_p ノ Greatest value ヲ G_p. least ヲ K_p トス

$$|\varphi_p(\xi,\eta)|\leqq|G_{p-1}-K_{p-1}|\,\omega.$$

今 P ヲ漸次 α ニ近カヅケレバ, Rand ニ於ケル ω_p ハ π トナル

$$|\varphi_p(\alpha)|\leqq\pi\,|(G_{p-1}-K_{p-1})|$$

$$G_1-K_1\leqq\pi(G-K)(1-\mu)$$

ヲ prove スルト same process ニヨリテ

$$G_2-K_2\leqq\pi(G_1-K_1)(1-\mu).$$

$$\cdots\cdots\quad\cdot\quad\cdots\cdots$$

$$G_{p-1}-K_{p-1}\leqq\pi(G_{p-1}-K_{p-1})(1-\mu).$$

$$|\varphi_p(\alpha)|\leqq\pi^2(1-\mu)(G_{p-2}-K_{p-2})$$

$$\leqq\pi^p(1-\mu)^{p-1}(G-K).$$

$$\therefore\left|\frac{\varphi_p(\alpha)}{(2\pi)^p}\right|\leqq\frac{G-K}{2}\left(\frac{1-\mu}{2}\right)^{p-1}.$$

$$\int_{(\xi)} \left\{ \frac{\varphi_1}{2\pi} + \frac{\varphi_2}{(2\pi)^2} + \cdots\cdots \right\} \frac{d \log\frac{1}{r}}{dn} d\sigma = -\varphi_1(\xi) - \frac{\varphi_2}{2\pi} - \cdots\cdots$$

$\varphi +$

$\| $ $2\pi\, u(x,y)$

→

$\frac{1-\mu}{2} < 1$. $\quad\therefore$ $\sum \frac{\varphi_p(\alpha)}{(2\pi)^p}$ ハ uniform convergence ナリ

故ニ $u(x,y)$ ナル integral ハ exist シ, term by term ニ integrate スルコヲ得. 故ニ コノ series ニ $\frac{d\log\frac{1}{r}}{dn}$ ヲ term by term ニ掛ケテ, 然ル后 term by term ニ integrate シテモ converge ナリ

integral $C \int_{(\xi)} \varphi_p \frac{d\log\frac{1}{r}}{dn} d\sigma$ ハ Laplace Eq. ヲ満足スレバ, 即チ $u(x,y)$ ノ each term ガ Laplace Eq. ヲ満足スレバ, $u(x,y)$ モマタ然リ. 故ニ $u(x,y)$ ハ G ナル Gebiet 中ニテハ Harmonic Function ナリ.

コレヨリ G ノ中ノ点ヨリ Rand ニ如何ナル道ヲ通リテ近ヅクモ, $\varphi(\xi)$ ナル value ヲトルコヲ prove セン。

$$\Phi_x = \int_{(\xi)} \varphi \frac{d}{dn}\left(\log\frac{1}{r}\right) d\sigma$$

$$\Phi_{j\xi} = \Phi_\xi + \pi\,\varphi(\xi), \qquad \Phi_{a\xi} = \Phi_\xi - \pi\,\varphi(\xi).$$

Φ ノ代ハリニ $2\pi\, u(x,y)$.

φ ノ代ハリニ $\varphi + \frac{\varphi_1}{2\pi} + \frac{\varphi_2}{(2\pi)^2} + \cdots\cdots$

ヲ ~~[illegible]~~ 入レタリトセバ

$$2\pi u_{j\xi} = 2\pi u_\xi + \pi\left\{\varphi^{(\xi)} + \frac{\varphi_1^{(\xi)}}{2\pi} + \cdots\cdots\right\}$$

$$2\pi u_{a\xi} = 2\pi u_\xi - \pi\left\{\varphi(\xi) + \frac{\varphi_1(\xi)}{2\pi} + \cdots\cdots\right\}$$

$$\therefore\quad u_{j\xi} - u_{a\xi} = \varphi(\xi) + \frac{\varphi_1(\xi)}{2\pi} + \frac{\varphi_2(\xi)}{(2\pi)^2} + \cdots$$

外ヨリ Rand ニ近ヅク時

$$\frac{1}{(2\pi)^p}\int_{(\xi)} \varphi_p \frac{d\log\frac{1}{r}}{dn} d\sigma = -\frac{1}{(2\pi)^p}\varphi_{p+1}(\xi).$$ by p. 18.

$$\therefore\quad 2\pi u_{a\xi} = -\varphi_1(\xi) - \frac{\varphi_2(\xi)}{2\pi} - \cdots\cdots\cdots$$

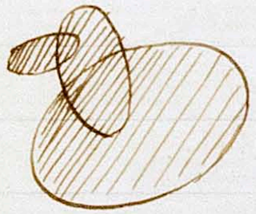
$\therefore u_{j\xi} = \varphi(\xi).$

故ニ u ナル function ハ internal point ヨリ Rand ニ近ヅク時 $\varphi(\xi)$ ナル Grenze Wert ヲ取ル。

故ニ S ナル Gebiet ガ Convex ナル case ノ Randwert aufgabe ハ出来タルナリ。

コハ逆ニ Integral Eq. ノ solution ト称フルモ可ナリ。

Gebiet ガ Concave ナル時, コノ方法ハ Apply スルヿ能ハズ; コノ case ニハ Gebiet ヲ combine シテ実行スルナリ.



Neumann, Schwarz.

Picard, Traite de Analyse.

Chapter II.

Solution of Fredholm.

Second kind ノ integralequation ノ solution ヲ 始メテ ヤリタルハ

C. Neumann, Über die Methode des arithmetischen Mittels. Leipziger Abhandlungen. Bd. 13. (1887)

ナリ。次デ

Fredholm, Sur une nouvelle méthode pour la résolution de problème de Dirichlet. Öfversecht of Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlinger 57 (1900)

ibid, Sur une classe l'equations fonctionelles. Acta Mathematica. 27 (1903)

Fredholm ノ solution ヨリ Neumann ノ solution ヲ 出シタルハ

Kellogg, Zur Theorie der Integralgleichungen. Göttinger Nachrichten (1902).

$$\varphi(x) + \lambda \int_0^1 f(x, \xi)\varphi(\xi)\, d\xi = \psi(x)$$

ψ ト f トヲ 知リテ φ ナル function ヲ 求メントス

$$D = 1 + \lambda \int_0^1 f(x_1, x_1)\, dx_1 + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{\lambda^n}{n!} \int_0^1\int_0^1 \cdots \int_0^1 f\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} dx_1 \cdots dx_n$$

$$+ \cdots\cdots$$

Hadamard Satz. (1893). 或ル Determinant ノ value ハ
コノ Determinant ノ each element ヲ conjugate element ニテ
substitute シテ得タル Determinant ト. ヱトノモノトノ product
ヲ作リ, ソノ Diagonal term ノ square root ヨリモ大ナラズ.

$$\left| f\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \right| > \sqrt{n^n \,\overline{F}^{2n}}.$$

Q ナル Quadratic form ヲ作ル.

$$Q = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n)^2 + (a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n)^2 + \cdots + (a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n)^2$$

$$= \sum A_{ik}\, x_i x_k, \qquad i, k = 1, 2, \cdots n.$$

$$A_{ik} = A_{ki}.$$

$$A_{11} = a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 + \cdots + a_{n1}^2, \;\cdots\; A_{nn} = a_{1n}^2 + a_{2n}^2 + \cdots + a_{nn}^2.$$

$$Q = \alpha_1 x_1^2 + 2x_1 X_1 + R.$$

R ノ中ニハ x_1 ヲ contain セズ, X_1 ハ $x_2 \cdots x_n$ ノ homogen. Linear form, R ハ全ジ arguments ノ quadratic form ナリ.

$$Q = \alpha_1 \underbrace{\left(x_1 + \frac{X_1}{\alpha_1}\right)}_{\text{linear form of } x_1 \cdots x_n}{}^2 + \Big(\underbrace{R - \frac{X_1^2}{\alpha_1}}_{\text{quadratic f. of } x_2 \cdots x_n}\Big).$$

ニ又ニ $\quad R - \dfrac{X_1^2}{\alpha_1} = \alpha_2 (x_2 + \beta x_3 + \cdots)^2 + (x_3 \cdots x_n)_2.$

$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$

$$Q = \alpha_1 (x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n)^2 + \alpha_2 (x_2 + \alpha_{23}x_3 + \cdots + \alpha_{2n}x_n)^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2.$$

コノ α ハ皆 real constant ナリ。

然ルニ Q ハ positive ノ definite form ナルヲ以テ, $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ ハ
皆 positive マタハ zero ナラザルベカラズ。

今 $x_1 = 1, \quad x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$ トセバ $\qquad A_{11} = \alpha_1.$

$x_2=1$. トモテ他ヲ0トセバ

$$A_{22}=\alpha_1\alpha_{12}^2+\alpha_2 \geqq \alpha_2.$$

同様ニ $A_{33}=\alpha_1\alpha_{13}^2+\alpha_2\alpha_{23}^2+\alpha_3 \geqq \alpha_3.$

$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots \qquad A_{nn} \geqq \alpha_n.$

コレ等ハ皆 positive ナルヲ以テ $\quad A_{11}A_{22}\cdots A_{nn} \geqq \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n.$

Q ノ Discriminant

$$=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}^2$$

$$\begin{cases} y_1 = x_1+\alpha_{12}x_2+\alpha_{13}x_3+\cdots\cdots+\alpha_{1n}x_n \\ y_2 = \qquad x_2+\cdots\cdots+\alpha_{2n}x_n \\ \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots \\ y_n = \qquad \alpha_{nn}x_n \end{cases}$$

ナル Linear transformation ヲ施セバ

$Q=\alpha_1y_1^2+\alpha_2y^2+\cdots+\alpha_ny_n^2.$ トナリ、コノ Discriminant ハ

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ & & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_n \end{vmatrix}$$ ニ等シ。

コレハ $= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot a_{12} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & \alpha_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{nn} \end{vmatrix}^2.$

$$=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n.$$

$$\therefore \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \leqq A_{11}A_{22}\cdots A_{nn}.$$

今 $\quad |a_{ik}| \leqq F. \quad i,k=1,2,\cdots n$

ナル inequality ガ hold スルトセバ

$A_{11}=a_{11}^2+a_{21}^2+\cdots+a_{n1}^2 \leqq nF^2. \qquad A_{nn}=a_{1n}^2+a_{2n}^2+\cdots \leqq nF$

$\therefore \quad A_{11} A_{22} \cdots\cdots A_{nn} \leqq n^n F^{2n}.$

故ニ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \leqq \sqrt{n^n F^{2n}}.$

$$\left| f\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 \cdots & y_n \end{pmatrix} \right| \leqq \sqrt{n^n} . F^n.$$

コレヨリ

~~故ニ~~ D ハ λ ノ power series トシテ uniformly convergent ナリ。

[proof 略ス]　D ハ λ ノ Ganz transcendente Funktion ナリ。

今 $D_1(\xi,\eta) = f(\xi,\eta) + \lambda \int_0^1 f\begin{pmatrix} \xi, & x_1 \\ \eta, & x_2 \end{pmatrix} dx_1 + \frac{\lambda^2}{2!} \int_0^1\!\!\int_0^1 f\begin{pmatrix} \xi & x_1 & x_2 \\ \eta & x_1, & x_2 \end{pmatrix} dx_1 dx_2$

$+ \cdots\cdots$

トスレバ

$$D_1(\xi,\eta) = f(\xi,\eta) . D - \lambda \int_0^1 f(\xi,\tau) D_1(\tau . \eta) d\tau. \quad \cdots\cdots (1)$$

[コノ proof ハ Bôcher, Integral Equation p. 35 ト全一ナル故略ス]

サテ $\varphi(x) + \lambda \int_0^1 f(x,s) \varphi(s) ds = \Psi(x).$

今 $\underline{\Phi(x) = \Psi(x) D - \lambda \int_0^1 D_1(x,t) \Psi(t) dt}$ ナル Φ ヲ作リ,

Φ ヲ上ノ Integral equation 中ニ Substitute スレバ

$$\Phi(x) + \lambda \int_0^1 f(x,s) \Phi(s) ds = \Psi(x) \; D - \lambda \int_0^1 D_1(x,t) \Psi(t) dt$$
$$+ \lambda \int_0^1 f(x,s) \left[\Psi(s) D - \lambda \int_0^1 D_1(s,t) \Psi(t) dt \right] ds$$
$$= \Psi(x) . D - \lambda \int_0^1 \Psi(t) dt \left[D_1(x,t) - f(x,t) . D + \lambda \int_0^1 D_1(s,t) f(x,s) ds \right.$$

By (1), $D_1(x,t) = f(x,t) D - \lambda \int_0^1 f(x,\tau) D_1(x,t) d\tau$

故ニ $D_1(x,t) - f(x,t) D + \lambda \int_0^1 f(x,s) D_1(s,t) ds = 0.$

故ニ Φ ハ Integral eq. $\underline{\Phi(x) + \lambda \int_0^1 f(x,s) \Phi(s) ds = \Psi(x) . D}$ ヲ満ス。 $\cdots (2)$

Zero points of D.

$D=0$, $\lambda=\lambda_0$. multiplicity of zero ヲ ν トス。 $D^{(\lambda)}$ ハ Ganz tranzendente fn. ナルヲ以テ ~~zero~~ ∞ point ハ タダ $\lambda=\infty$ ノ時ニ限ル

$$D(\xi, \eta) = (\lambda-\lambda_0)^{\nu} \cdot D_0(\xi, \eta). \quad D_0 \neq 0 \quad \lambda=\lambda_0$$

ニ次ニ $$D_1(\xi, \eta) = (\lambda-\lambda_0)^{\nu_1} \cdot D_1'(\xi, \eta). \quad D_1' \neq 0. \quad \lambda=\lambda_0$$

ナリトス。

サテ $$\frac{dD}{d\lambda} = (\lambda-\lambda_0)^{\nu-1} \cdot D_0'. \quad D_0' \neq 0. \quad \lambda=\lambda_0$$

シカルニ $$\int_0^1 D_1(\xi, \xi)\, d\xi = \frac{dD}{d\lambda}.$$ ナルヲ以テ

$$\int_0^1 D_1(\xi, \xi)\, d\xi = (\lambda-\lambda_0)^{\nu-1} \cdot D_0'.$$

$$\therefore \int_0^1 D_1'(\xi, \eta)\, d\xi = (\lambda-\lambda_0)^{\nu-\nu_1-1} \cdot D_0'.$$

Left hand ハ finite, D_0' ハ λ ノ如何ニカカワラズ zero ナラズ。然ルニ若シ $(\lambda-\lambda_0)$ ノ exp. $\nu-\nu_1-1$ ガ negative ナリトセバ, $\lambda=\lambda_0$ トナル(ト) Right hand ハ ∞ トナル。 然ルニ $\nu_1 \leqq \nu-1$. ナラザルヲ得ズ:

サテ $$\Phi(x) = \psi(x) \cdot D - \lambda \int_0^1 D_1(x,t)\, \psi(t)\, dt.$$

ナルカラ, $\Phi(x)$ ノ中ニ contain サル、 $\lambda-\lambda_0$ ノ multiplicity ハ ($\nu-1 \geqq \nu_1$) 一般ニハ, at most ν_1 ナリ。

今 上ノ式(2)ヲ $(\lambda-\lambda_0)^{\nu_1}$ ニテ divide シ, $\lambda=\lambda_0$ トオケバ; identically ニ vanish セザル Function Φ_1 ヲ得。

$$\underline{\Phi_1(x) + \lambda_0 \int_0^1 f(x,s)\, \Phi_1(s)\, ds = 0.} \quad \cdots\cdots (3)$$

故ニ λ_0 ガ若シ $D=0$ ノ Root ナル時ハ, Integral equation (2) ノ右辺ヲ zero トオキタル equation (3) ガ, 0 ト ~~zero~~ 異ナル function Φ_1 ニヨリテ satisfy セラル。

~~[illegible]~~ 若シ (3) ヲ satisfy スル non-vanishing root λ_0 ガ exist セザ

The given equation: $\varphi(x)+\lambda\int_0^1 f(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi=\psi(x)$.

ルトキハ, λ_0 ハ $D=0$ ナル equation ノ zero point ニアラズ。

今若シ $D=0$ ナラシムベキ λ_0 ガナキ時ニハ, (2) ノ両辺ヲ D ニテ divide シテ

$$\frac{\Phi(x)}{D}+\lambda\int_0^1 f(x,\xi)\cdot\frac{\Phi(\xi)}{D}d\xi=\psi(x).$$

$D\neq 0$ for λ.

故ニ $\frac{\Phi(x)}{D}$ ハ $\varphi(x)+\lambda\int_0^1 f(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi=\psi(x)$ ナル Integral equation ノ一ノ solution ナリ。

p. 24 $\Phi(x)$ ノ Definition-equation ヨリ

$$\frac{\Phi(x)}{D}=\psi(x)-\lambda\int_0^1\frac{D_1(x,t)}{D(\lambda)}\psi(t)dt.$$

$D_1(x,t)$ 及ビ $D(\lambda)$ ハ共ニ λ ノ power series ナリ。

若シ parameter λ ガ $D=0$ ノ solution ナラザルトキハ, 上式ハ即チ given Integral equation ノ solution ナリ。而シテ λ ガ $D=0$ ノ solution ナルヤ否ヤハ

$$\varphi(x)+\lambda\int_0^1 f(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi=0$$

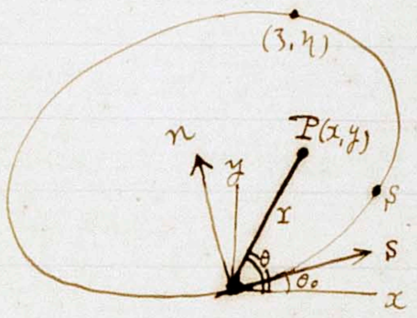
ガ non-vanishing function ニヨリテ, satisfy セラルルカ否カニヨリテ定マル。即チ コノ Integral eq. ガ non-vanishing solution ヲ有セザルヲ知ルトキハ, コノ λ ハ $D=0$ ノ root ニアラズ。

コレニテ Fredholm ノ solution ハ得ラレタリ。

Chapter II.a.
Application to Dirichlet's Problem.

[Whole curve ノ長サヲ 1トス]

Gebiet S ノ Rand ガ Double point ヲ有セザルモノトシ、ソノ上ノ点ヲ (ξ,η) トス.



Rand上 s 点ノ Doppelbelegung ノ Dichtigkeit ヲ $\frac{\varphi(s)}{\pi}$ トスレバ $P(x,y)$ ノ Potential $w(x,y)$ ハ

$$w(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\varphi(s)\,\frac{\partial\log\frac{1}{r_{Ps}}}{\partial n}\,ds$$

Co-ordinate ヲ (x,y) ヨリ (s,n) ニ移ス。

$$x+iy=re^{i\theta},\quad s+in=re^{i(\theta-\theta_0)}.$$

$$\log r_{P,s}+i(\theta_{P,s}-\theta_0)=\log(s+in).$$

$\log r_{P,s}+i\theta_{Ps}$ ハ $s+in$ ノ analytic function ナリ, 即チ

$$\log r_{P,s}+i\,\theta_{P,s}=f(s+in).$$

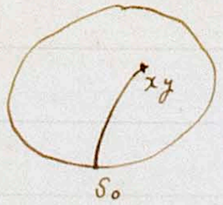
$$\therefore\quad \frac{\partial\log r}{\partial s}=\frac{\partial\theta}{\partial n},\quad \frac{\partial\log r}{\partial n}=-\frac{\partial\theta}{\partial s}.\quad \frac{\partial\log\frac{1}{r}}{\partial n}=-\frac{\partial\log r}{\partial n}.$$

コレヲ Substitute スレバ

$$w(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\varphi(s)\,\frac{\partial\theta_{P,s}}{\partial s}\,ds.$$

而ルニ $\quad tg\,\theta_{P,s}=\frac{y-\eta}{x-\xi}.$

$$\therefore\quad w(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\varphi(s)\frac{\partial}{\partial s}\operatorname{arctg}\frac{y-\eta}{x-\xi}\,ds.\quad\cdots\cdots(1)$$



今 (x,y) ヲバ、或ル道ヲ通リテ、Rand上ノ s_0 ニ近ヅクル時ハ、

$$w_{j s_0}=\varphi(s_0)+\frac{1}{\pi}\int_0^1\varphi(s)\frac{\partial}{\partial s}\left(\operatorname{arctg}\frac{\eta(s_0)-\eta(s)}{\xi(s_0)-\xi(s)}\right)ds.$$

今 $\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial s}\operatorname{arctg}\frac{\eta(s_0)-\eta(s)}{\xi(s_0)-\xi(s)} = f(s_0, s)$, トオケバ

$$w_{js_0} = \varphi(s_0) + \int_0^1 \varphi(s)\, f(s_0, s)\, ds. \quad \text{......} (2)$$

$\lambda = 1$, $s_0 = x$, w_{js_0} ガ known function トスレバ, コハ Integral equation ト全一ナリ。

先ヅ parameter 1 ガ $D=0$ ノ root ナリヤ否ヤヲ究ル。若シ 1 ガ $D=0$ ノ root ニアラズトセバ, 吾人ノ Integral equation ハ solution ヲ有ス。

コレガ為メニハ, 吾人ハ Fredholm ノ Theorem ニ従テ, homogeneous equation

$$0 = \varphi(s_0) + \int_0^1 \varphi(s)\, f(s_0, s)\, ds$$

ヲ研究セン。先ヅ $w_{s_0} = \int_0^1 \varphi(s)\, f(s_0, s)\, ds.$ from (1)

$$\therefore \quad \varphi(s_0) + w_{s_0} = 0.$$

(2) ヨリ $\qquad \varphi(s_0) + w_{s_0} = w_{js_0}.$

故ニ $\qquad w_{js_0} = 0.$ ナルコトガ follows ス。

即チ w ハ Internal 外ヨリ Rand ニ来ル時, Rand 上ノ Value ガ 0 ナリ。然ルニ w ハ Laplace Eq. ヲ satisfy スル continuous f. ナルヲ以テ, Gebiet S ノ中ニ於テハ到ル処 zero ナラザルベカラズ。

今 $$\nu = \int_{x_0 y_0}^{xy} \left\{ -\frac{\partial w}{\partial y}dx + \frac{\partial w}{\partial x}dy \right\}$$

ナルベク ν ヲ determine スル時ハ, $w(x,y) + i\nu(x,y)$ ハ $x+iy$ ノ analytic function ナリ。而シテ今ノ場合ニ於テ $w + i\nu$ ハ constant ナリ。

之カルニ Analytic function ガ 或ル finite Gebiet 中ニテ constant ナル時ハ、analytic continuation ヲ ヤリ得ル間ハ、到ル処 zero ナリ。然ルニ w ナル function ハ Rand ノ上マデモ zero ナリ。即チ w itself ガ zero ナラザルベカラズ。然ルニ $w_{s_0}=0$. ガ follow ス。

之カルニ $\varphi(s_0)+w_{s_0}=0.$ ∴ $\varphi(s_0)=0.$ [always]

即チ homogeneous eq. $\varphi(s_0)+\int_0^1\varphi(s)f(s_0,s)ds=0$ ノ solution ハ 必ズ vanishing function ナリ。即チ コノ Equation ハ non-vanishing ~~function~~ solution ヲ有セズ。然ルニ Fredholm Theorem ニヨリテ parameter 1 ハ $D=0$ ノ root ニアラズ。

然ルニ $\varphi(s)=\dfrac{\Phi(s)}{D}$. ト置ケバ $\varphi(s)$ ハ 吾人ノ Integral Equation ノ solution ナリ。

今ノ proof ニテハ、Gebiet ガ convex ナルヲ要セズ；マタ Gebiet ガ 重ナリ合ッテモ 可ナリ。

Chapter III.

Hilbert's Investigations.

Fredholm ノ次ギニ Hilbert, Göttinger Nachrichten. (1904-6) ト Mitt
及ビ Schmidt, Dissertation = Math. Ann. Bd. 63-64 (1907)
ガ来ル。

Hilbert's Theorem: 一般ノ equation ハ Kern ガ symmetric function ノ case ニ reduce スルコトヲ得。

Proof. $$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_0^1 K(s,t)\varphi(t)\,dt.$$

variable s ヲ t, t ヲ r ニテ substitute スレバ

$$f(t) = \varphi(t) - \lambda \int_0^1 K(t,r)\varphi(r)\,dr.$$ コレニ $K(t,s)\,dt$ ヲ カケテ $\int$ スレ

$$\int_0^1 K(t,s) f(t)\,dt = \int_0^1 K(t,s)\varphi(t)\,dt - \lambda \int_0^1\int_0^1 K(t,s)K(t,r)\varphi(r)\,dr\,dt$$

コレニ λ ヲ 掛ケテ $f(s)$ ヨリ 引ケバ

$$\begin{aligned} f(s) - \lambda \int_0^1 K(t,s) f(t)\,dt &= \varphi(s) - \lambda \int_0^1 K(s,t)\varphi(t)\,dt - \lambda \int_0^1 K(t,s)\varphi(t)\,dt \\ &\quad + \lambda^2 \int_0^1\int_0^1 K(t,s)K(t,r)\varphi(r)\,dr\,dt. \\ &= \varphi(s) - \lambda \int_0^1 \varphi(t)\,dt \left[K(s,t) + K(t,s) - \lambda \int_0^1 K(r,s)K(r,t)\,dr\right]. \end{aligned}$$

s ノミノ function $f(s) - \lambda \int_0^1 K(t,s) f(t)\,dt$ ヲ $F(s)$ トオキ,
$K(s,t) + K(t,s) - \lambda \int_0^1 K(r,s)K(r,t)\,dr$ ヲ Q トオケバ

$$F(s) = \varphi(s) - \lambda \int_0^1 Q(s,t)\varphi(t)\,dt.$$

トナル。 $F(s)$ ハ known function ナリ, $Q(s,t)$ モ known functi

ニシテ ξ ト t トニ付キテ symmetric ナリ。

サレバ Theorem ハ prove セラレタリ。

Conversely ニ, 此 equation ヲ satisfy スル $\varphi(\xi)$ ハ 元トノ equation ヲ satisfy スト云フコトハ, follows セズ:

$$f(\xi) = \varphi(\xi) - \lambda\int_0^1 K(\xi,t)\varphi(t)\,dt. \qquad K(\xi,t) = K(t,\xi)$$

ヲバ; Hilbert's Integralgleichung ト云フ。

Linear algebraic Equations.

$$K_{pq} = K\left(\tfrac{p}{n}, \tfrac{q}{n}\right) \qquad p, q = 1, 2, \ldots n.$$

$$Kxy = K_{11}\, x_1 y_1 + K_{12}\cdot x_1 y_2 + K_{21}\cdot x_2 y_1 + \cdots\cdots + K_{nn}\cdot x_n y_n.$$

$$= \sum_{p,q} K_{pq}\, x_p x_q.$$

$K_{pq} = K_{qp}$. ナルコトハ K ガ symmetric ナルコトヨリ follows ス。

$$\varphi_p = \varphi\left(\tfrac{p}{n}\right), \qquad f_p = f\left(\tfrac{p}{n}\right).$$

$$\begin{cases} K x_1 = K_{11} x_1 + K_{12} x_2 + K_{13} x_3 + \cdots\cdots + K_{1n} x_n. \\ K x_2 = K_{21} x_1 + K_{22} x_2 + K_{23} x_3 + \cdots\cdots + K_{2n} x_n. \\ \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots \\ K x_n = K_{n1} x_1 + K_{n2} x_2 + K_{n3} x_3 + \cdots\cdots + K_{nn} x_n. \end{cases}$$

$$[x, y] = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots\cdots + x_n y_n.$$

$$\underline{K_{xy} = [Kx, y] = [Ky, x]}$$

Proof: $[Kx, y] = Kx_1\cdot y_1 + Kx_2\cdot y_2 + \cdots\cdots + Kx_n\cdot y_n$

$$= (K_{11}\cdot x_1 + K_{12}\cdot x_2 + \cdots + K_{1n} x_n) y_1 + \cdots\cdots + (K_{n1} x_1 + \cdots + K_{nn} x_n) y_n$$

斯カル時ハ $K_{pq} = K_{qp}$ ヨリ $\qquad = K_{xy}$.

ヲ得。

$$
A \left\{
\begin{aligned}
f_1 &= \varphi_1 - l\cdot(K_{11}\cdot\varphi_1 + K_{12}\cdot\varphi_2 + \cdots + K_{1n}\cdot\varphi_n) = \varphi_1 - lK\varphi_1 \\
f_2 &= \varphi_2 - l\cdot(K_{21}\cdot\varphi_1 + K_{22}\cdot\varphi_2 + \cdots + K_{2n}\cdot\varphi_n) = \varphi_2 - lK\varphi_2 \\
&\cdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \\
f_n &= \varphi_n - l\cdot(K_{n1}\cdot\varphi_1 + K_{n2}\cdot\varphi_2 + \cdots + K_{nn}\cdot\varphi_n) = \varphi_n - lK\varphi_n
\end{aligned}
\right.
$$

ヲ作ル。コハ φ ニ對スル non homogeneous linear equation ニシテ, $f_1, f_2, \cdots f_n$, $K_{11}, K_{12}, \cdots$ ガ given ナル時, $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n$ ヲ unknown quantity トシテ solve スルトス。

$$
d(l) = \begin{vmatrix}
1-lK_{11} & -lK_{12} & \cdots & -lK_{1n} \\
-lK_{21} & 1-lK_{22} & \cdots & -lK_{2n} \\
-lK_{31} & -lK_{32} & 1-l_{33} \cdots & -lK_{3n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-lK_{n1} & -lK_{n2} & \cdots & 1-lK_{nn}
\end{vmatrix}
= \text{Discriminant of the Quadratic form } [x,x]-lK_{xx}.
$$

ヨリ Bordered determinant ヲ作ル。

$$
D\left(l, \genfrac{}{}{0pt}{}{x}{y}\right) = \begin{vmatrix}
0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\
y_1 & 1-lK_{11} & -lK_{12} & \cdots & -lK_{1n} \\
y_2 & -lK_{21} & 1-lK_{22} & \cdots & -lK_{2n} \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
y_n & -lK_{n1} & -lK_{n2} & \cdots & 1-lK_{nn}
\end{vmatrix}
$$

コノ determinant 中ニテ, $y_1, y_2, \cdots y_n$ ノ代ハリニ, ソレゾレ $Ky_1, Ky_2 \cdots Ky_n$ ヲ代入セルモノヲ $D\left(l, \genfrac{}{}{0pt}{}{x}{Ky}\right)$ ニテ示セバ; コノ三ツノ determinant ノ間ニ次ノ relation 存在ス。

$$
D\left(l, \genfrac{}{}{0pt}{}{x}{Ky}\right) = \begin{vmatrix}
0 & x_1 & \cdots & x_n \\
K_{11}y_1 + \cdots + K_{1n}y_n & 1-lK_{11} & \cdots & -lK_{1n} \\
K_{21}y_1 + \cdots + K_{2n}y_n & -lK_{21} & \cdots & -lK_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
K_{n1}y_1 + \cdots + K_{nn}y_n & -lK_{n1} & \cdots & 1-lK_{nn}
\end{vmatrix}.
$$

コノ determinant ニ l ヲカケル, ソレニハ first row ニ l ヲカケル。

次ニ each col ニソレゾレ $y_1, y_2, \cdots y_n$ ヲカケテ加フレバ

$$l\,D\left(l, {x \atop Ky}\right) = \begin{vmatrix} [xy] & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & 1-lk_{11} & -lk_{21} & \cdots & -lk_{n1} \\ y_2 & -lk_{21} & 1-lk_{22} & \cdots & -lk_{n2} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n & -lk_{n1} & -lk_{n2} & \cdots & 1-lk_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= [xy]\,d(l) + D\left(l, {x \atop y}\right).$$

マタ $\underline{l\,D\left(l, {x \atop Ky}\right) = [xy]\,d(l) + D\left(l, {x \atop y}\right)}$ (1)

$\underline{A}$ ノ式ニ $y_1, y_2 \cdots y_n$ ヲカケテ add スレバ

$$[f, y] = [\varphi, y] - l\,[K\varphi, y].$$

故ニ equation $\underline{A}$ ヲ satisfy スル φ ハ上ノ equation ヲ satisfy ス。

$[x, y] = [y, x]$ ナルヲ以テ, $[K\varphi, y] = [Ky, \varphi]$.

サレニ $[f, y] = [\varphi, y] - l\,[\varphi, Ky]$ (2)

ヲ satisfy スル如クニ φ ヲ determine スレバ可ナリ。

(1) ト (2) トヨリ

$$[x, y] = -\frac{D\left(l, {x \atop y}\right)}{d(l)} + l\,\frac{D\left(l, {x \atop Ky}\right)}{d(l)}. \qquad (3)$$

今 $d(l) \neq 0$ ナリト assume ス.

(3) ハ x, y ニツキテ identical relation ナルヲ以テ

$$[f, y] = -\frac{D\left(l, {f \atop y}\right)}{d(l)} + l\,\frac{D\left(l, {f \atop Ky}\right)}{d(l)}.$$

$$[f, y] = -\left[\frac{D\left(l, {f \atop \eta}\right)}{d(l)}\right]_{\eta = y} + l\left[\frac{D\left(l, {f \atop \eta}\right)}{d(l)}\right]_{\eta = Ky}.$$ $\eta_1, \eta_2 \cdots$ ノ代リニ $y_1, y_2 \cdots$

$$[\varphi, y] = [\varphi, \eta]_{y = \eta}.$$

$[\varphi, \eta]$ ノ代リニ $-\dfrac{D\left(l, {f \atop \eta}\right)}{d(l)}$ ガ入リ来ル。サレニ

$[\varphi, y] = -\dfrac{D\left(l, {f \atop y}\right)}{d(l)}$. ト取レバ、quantity ハ identical =

ニ satisfy セラル。

故ニ $d(l) \neq 0$ ナルトキハ, コノ y ノ coefficient ガ $y_1, y_2, \ldots y_n$ ト ナル。コレハ一ツノ solution ナリ。 original equation ハ linear ナル故, コレヨリ外ニ solution ハナシ。

次ニ $d(l)=0$ ナル case:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{l}-K_{11} & -K_{12} & \cdots & -K_{1n} \\ -K_{21} & \frac{1}{l}-K_{22} & \cdots & -K_{2n} \end{vmatrix} = 0.$$

$d(l)=0$ ノ Roots ハ 皆 real quantities ニシテ, コレヲ $l^{(1)}, l^{(2)}, \ldots l^{(n)}$ トシ, コレ等ノ root ハ 皆 different ナリト assume ス.

$$d'(l) = \begin{vmatrix} -K_{11} & -K_{12} & \cdots & -K_{1n} \\ -lK_{21} & 1-lK_{22} & \cdots & -lK_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -lK_{n1} & -lK_{n2} & \cdots & 1-lK_{nn} \end{vmatrix} + \cdots\cdots + \begin{vmatrix} 1-lK_{11} & -lK_{12} & \cdots & -lK_{1n} \\ -lK_{21} & 1-lK_{22} & \cdots & -lK_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -K_{n1} & -K_{n2} & \cdots & -K_{nn} \end{vmatrix}.$$

$$n\,d(l) - l\,d'(l) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -lK_{21} & 1-lK_{22} & \cdots & -lK_{2n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1-lK_{11} & -lK_{12} & \cdots & -lK_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots\cdots + \begin{vmatrix} 1-lK_{11} & -lK_{12} & \cdots & -lK_{1n} \\ -lK_{21} & 1-lK_{22} & \cdots & -lK_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}. = d_{11}(l) + d_{22}(l) + \cdots + d_{nn}(l)$$

$$\therefore \quad \underline{d_{11}(l) + d_{22}(l) + \cdots + d_{nn}(l) = n\,d(l) - l\,d'(l)}.$$

今 $l = l^{(h)}$ ナル root ヲ l ニ代入スレバ

$$d_{11}(l^{(h)}) + d_{22}(l^{(h)}) + \cdots + d_{nn}(l^{(h)}) = -l^{(h)} d'(l^{(h)}).$$

$l^{(h)}$ ハ 決シテ zero ナルコトナシ, 何トナレバ $d(l)$ ノ中ニテ $l=0$ トスルトキハ

determinant ノ diagonal term 丈ケガ皆1トナリ 他ハ0トナルトシテ, コノ determinant ハ zero ナラザルヲ以テナリ。

$d'(l^{(h)})$ ハ, $d(l)$ ノ root ガ皆 simple root ナルニヨリ, vanishセザル quantity ナリ, 故ニ 上ノ equation ノ左位リノ unterdeterminant ノ中ニテ 少クモ 一ツハ zero ナラザルモノアリ。

即チ $d(l)$ vanish スル時ニハ, ソノ first order ノ minor ノ中ニテ 0 トナラザルモノアリ