

With the Author's Compliments

SUR LE MOUVEMENT D'UNE PARTICLE DANS LE
CHAMP D'UN NOYAU CHARGÉ

By

K. OGURA

[REPRINTED FROM PROCEEDINGS OF THE PHYSICO-MATHEMATICAL SOCIETY OF JAPAN,
3RD SER., VOL. 6, No. 8, 1924]

*Sur le Mouvement d'une Particule dans le Champ
d'un Noyau chargé⁽¹⁾.*

Par Kinnosuke OGURA.

[Lu 1^{er} avril, 1923.]

1. MM. Nordström et Jeffery⁽²⁾ ont trouvé l'expression de l'intervalle élémentaire autour d'un noyau chargé :

$$ds^2 = c^2 f^2 dt^2 - \frac{1}{f^2} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (1)$$

où

$$f^2 = 1 - \frac{2kM}{c^2 r} + \frac{kE^2}{c^4 r^2},$$

k étant la constante de gravitation, M la masse et E la charge.

M. Jeffery a étudié encore le mouvement d'un électron dans ce champ, en supposant que la masse m (au repos à l'infini) et la charge $-e$ de cet électron sont très petites. D'après lui, les équations du mouvement dans le plan $\theta = \frac{\pi}{2}$ sont

$$\frac{d^2 r}{ds^2} - \frac{f'}{f} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 - r f^2 \left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2 + c^2 f^3 f' \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 = - \frac{E e f^2}{c m r^2} \frac{dt}{ds}, \quad (2)$$

$$\frac{d}{ds} \left(r^2 \frac{d\phi}{ds} \right) = 0, \quad (3)$$

$$f^2 \frac{dt}{ds} = \frac{r(W + mc^2) + Ee}{mc^3 r}, \quad (4)$$

f' désignant $\frac{df}{dr}$ et W une constante.

Posons maintenant

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r}, \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = \ddot{r}, \quad \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi},$$

(1) Ce travail a été publié dans "Japanese Journal of Physics," t. 3, No. 4-6. Pour quelques-uns des résultats de cette Note, voir K. Ogura, C. R., 173 (1921), 348, 407.

(2) G. Nordström, Proc. Acad. Amsterdam, 20 (1918), 1236; G. B. Jeffery, Proc. Roy. Soc., A. 99 (1921), 123. Voir aussi H. Weyl, 'Raum, Zeit, Materie,' 4^e éd. (1921), 236.

3. Si l'on introduit la fonction de Lagrange généralisée définie par

$$L = T_2 - V = mc^2 + \frac{Ee}{r} - mc^2 \left(f^2 - \frac{1}{c^2 f^2} \dot{r}^2 - \frac{r^2}{c^2} \dot{\phi}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (18)$$

on a les équations de Lagrange généralisées :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \quad (19)_1$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0. \quad (19)_2$$

Car, nous obtenons, de la définition (18),

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \dot{\phi} \left(f^2 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{mP}{f^2} \dot{\phi}.$$

Donc l'équation du mouvement (8) devient (19)₂.

Ensuite nous avons

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{m}{f^2} \dot{r} \left(f^2 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{mP}{f^4} \dot{r},$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{mP}{f^4} \ddot{r} + m \left(\frac{P'}{f^4} - 4 \frac{P f'}{f^5} \right) \dot{r}^2$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial r} &= -\frac{Ee}{r^2} - \frac{mc^2}{2} \left(f^2 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial r} \left(f^2 - \frac{v^2}{c^2} \right) \\ &= -\frac{Ee}{r^2} - \frac{mc^2 P}{2f^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(f^2 - \frac{1}{c^2 f^2} \dot{r}^2 - \frac{r^2}{2} \dot{\phi}^2 \right) \\ &= -\frac{Ee}{r^2} - \frac{mc^2 P f'}{f} + \frac{mPr}{f^2} \dot{\phi}^2 - \frac{m P f'}{f^5} \dot{r}^2. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'équation (7) nous donne (19)₁.

D'après le théorème bien connu du calcul des variations, il suit, des équations (19)₁ et (19)₂, que le principe d'Hamilton généralisé est valable dans notre cas, à savoir :

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0, \quad (20)$$

t_0, t_1 étant deux valeurs données.

4. Définissons maintenant les composantes de la quantité de mouvement par

$$p_r = \frac{\partial T_2}{\partial \dot{r}}, \quad p_\phi = \frac{\partial T_2}{\partial \dot{\phi}}. \quad (21)$$

Nous avons alors

$$p_r = [m] \frac{\dot{r}}{f^2}, \quad p_\phi = [m] r^2 \dot{\phi}; \quad (22)$$

puis

$$\dot{r} p_r + \dot{\phi} p_\phi = [m] v^2 = T_1 + T_2.$$

En intégrant cette équation, nous obtenons

$$\int p_r dr + p_\phi d\phi = \int [m] v^2 dt,$$

ou

$$\int p_r dr + p_\phi d\phi = \int (T_1 + T_2) dt. \quad (23)$$

C'est la relation fondamentale pour l'intégrale d'action généralisée

$$S = \int (T_1 + T_2) dt. \quad (24)$$

M. Bohr a déjà employé cette intégrale dans le cas de la relativité restreinte⁽¹⁾.

D'après cette définition, nous avons

$$\frac{\partial S}{\partial r} = p_r, \quad \frac{\partial S}{\partial \phi} = p_\phi. \quad (25)$$

Finalement, si $H(r, \phi, p_r, p_\phi)$ désigne la fonction d'Hamilton, c'est-à-dire

$$H = V(r) + T_1(r, \phi, p_r, p_\phi)^{(2)}, \quad (26)$$

il est facile d'établir la formule

$$\dot{r} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} + \dot{\phi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - L = H \quad (27)$$

et les équations canoniques d'Hamilton généralisées :

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_r}, & \frac{d\phi}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_\phi}, \\ \frac{dp_r}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial r}, & \frac{dp_\phi}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \phi} (= 0). \end{aligned} \quad (28)$$

(1) N. Bohr, *ibid.*, 132.

(2) Dans ce cas H et T_1 ne dépendent pas de ϕ .

7. Utilisons maintenant les raisonnements de M. Sommerfeld⁽¹⁾.

Dans l'équation (30) les coordonnées r , ϕ se séparent. Puisque ϕ est cyclique, nous avons

$$\frac{\partial S}{\partial \phi} = \text{const.} = p;$$

et la condition des quanta nous donne

$$2\pi p = nh,$$

h étant la constante de Planck et n un nombre entier quelconque. Par suite, on obtient

$$\frac{\partial S}{\partial \phi} = \frac{nh}{2\pi}.$$

L'équation (30) devient alors

$$f^2 \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 = m^2 c^2 \left[\frac{1}{f^2} \left(1 + \frac{W + \frac{eE}{r}}{mc^2} \right)^2 - 1 \right] - \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 r^2},$$

ce qui peut se mettre sous la forme

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \sqrt{A + 2 \frac{B}{r} + \frac{C}{r^2} + \frac{D}{r^3} + \dots}; \quad (31)$$

et en considérant

$$f^2 = 1 - \frac{2kM}{c^2} \frac{1}{r} + \frac{kE^2}{c^4} \frac{1}{r^2},$$

nous trouvons

$$B = B' + \Delta B, \quad C = C' + \Delta C, \quad D = D' + \Delta D, \quad \dots,$$

$$A = 2mW + \frac{W^2}{c^2}, \quad B' = mE \left(1 + \frac{W}{mc^2} \right),$$

$$C' = -\frac{n^2 h^2}{4\pi^2} + \frac{e^2 E^2}{c^2}, \quad D' = -\frac{4k^2 M m^2 E^2}{c^4} \left(1 + \frac{W}{mc^2} \right)^2,$$

$$\dots \dots \dots;$$

$$\Delta B = kMm \left(1 + \frac{W}{mc^2} \right)^2 + \frac{2kMmW}{c^2} + \frac{kMW^2}{c^4},$$

$$\Delta C = \frac{8kMmEe}{c^2} \left(1 + \frac{W}{mc^2} \right) + \frac{4k^2 M^2 m + 4k^2 M^2 m^2 - kE^2 m^2}{c^2} \left(1 + \frac{W}{mc^2} \right)^2 + \frac{kW}{c^4} (4kM^2 - E^2) \left(2m + \frac{W}{c^2} \right),$$

$$\Delta D = -\frac{8k^3 M^2 m^2}{c^4} \left(1 + \frac{W}{mc^2} \right)^2 + \dots,$$

(1) A. Sommerfeld, *Atombau und Spektrallinien*, 3^e éd. (1922), 736 et 670.

On sait que

$$1 + \frac{W}{mc^2} = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{n^2} \left(\frac{E}{e} \right)^2}, \quad \left(\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc} \right) \quad (32)$$

approximativement⁽¹⁾ et la quantité $\frac{\alpha^2}{n^2} \left(\frac{E}{e} \right)^2$ est très petite. On peut montrer que

$$\left| \frac{\Delta B}{mE} \right| < 10^{-12}.$$

Car, si l'on remarque que

$$e = 3 \times 10^{10}, \quad h = 6,55 \times 10^{-27}, \quad k = 6,7 \times 10^{-8}, \quad e = 4,774 \times 10^{-10}, \\ m = 9,00 \times 10^{-28}, \quad M = 1,652 \times 10^{-24}, \quad E = Ne \quad (N = 1, 2, \dots),$$

on a

$$\frac{kM}{eE} < \frac{7}{11N} \times 10^{-12},$$

$$\left| \frac{kMW}{c^2 eE} \right| = \left| \frac{kMm}{eE} \cdot \frac{W}{mc^2} \right| < \frac{kMm}{eE} < 10^{-39},$$

$$\frac{kMW^2}{mEe^4} = \frac{kMm}{eE} \left(\frac{W}{mc^2} \right)^2 < 10^{-39}.$$

Nous pouvons donc prendre B' au lieu de B . De même, il est possible de prendre C' , D' , ... au lieu de C , D , ... respectivement.

Pour l'atome semblable à l'hydrogène, il suffit de prendre, au plus, les quatre termes de la série dans l'équation (31). Par conséquent, nous obtenons

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \sqrt{A + 2 \frac{B'}{r} + \frac{C'}{r^2} + \frac{D'}{r^3}};$$

et la condition des quanta correspondante à la variable r devient

$$-2\pi\sqrt{-1} \left(\sqrt{C'} - \frac{B'}{\sqrt{A}} - \frac{B'D'}{2C'\sqrt{C'}} \right) = n'h, \quad (33)$$

n' étant un nombre entier quelconque. Mais, d'après (32), on peut montrer que le terme $\frac{B'D'}{C'\sqrt{C'}}$ est très petit par rapport à $\sqrt{C'}$ et à $\frac{B'}{\sqrt{A}}$; nous avons donc

$$-2\pi\sqrt{-1} \left(\sqrt{C'} - \frac{B'}{\sqrt{A}} \right) = n'h \quad (34)$$

au lieu de (33). C'est précisément la formule de M. Sommerfeld.

(1) Sommerfeld, *ibid*, 577.

Ainsi, nous sommes arrivés à la conclusion suivante : *L'influence de la gravitation est pratiquement négligeable pour la formule de Sommerfeld dans la théorie des spectres (obtenue en partant de la théorie de la relativité restreinte).*

Institut Shiomi, Ôsaka.