Graphical method.

昭和16年　東京物理学校
における講演原稿

用器. 方眼紙, 物指し, セルロイド製三角定規, 数個. コンパス, 分度器

graphical method. (図計算と計算図表)

目標

作図として計算　　実用解析 < 数値解 / 図 〃 / 機械 〃

最も簡単な例　加減乗除　$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$　$\sqrt{ab} = x$

グラフで方程式を解く.

長所. 直観的で 一目瞭然. 大きな誤りを冒すことが少い. 方法は 機械的作図で簡単.

短所. 誤差が大きい. よく頑張って 小さい図計算では (計算尺と同じ位) 大体 0.3 %.

四桁の對数表は 0.03 % — 0.05　$\left(\frac{\delta x}{x}\right)$　相對誤差は

~~参考書~~

誤差の範囲

	0.1 %	1 %
$\sin x = x$	$-4°.4 < x < 4°.4$	$-14°.0 < x < 14°.0$
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!}$	$-33°.0 < x < 33°.0$	$-59°.0 < x < 59°.0$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$	$-22°.0 < x < 22°.0$	$-37°.2 < x < 37°.2$
$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2}$	$-0.08 < x < 0.10$	$-0.24 < x < 0.32$
$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x}{2}$	$-0.04 < x < 0.06$	$-0.15 < x < 0.17$
$(1+x)^{-1} = 1 - x$	$-0.03 < x < 0.03$	$-0.10 < x < 0.10$

~~Part I. graphical analysis.~~

Part I. graphical ~~calculation~~ analysis

参考書

Runge, Graphical methods.

Mehmke, Leitfaden zum graphischen Rechnen.

* Willers, Methoden der praktischen Analysis

ザンデン (Sanden), 実用解析学 (小倉, 近藤)

小倉, 図計算及び図表

* Lipka, Graphical and mechanical computation.

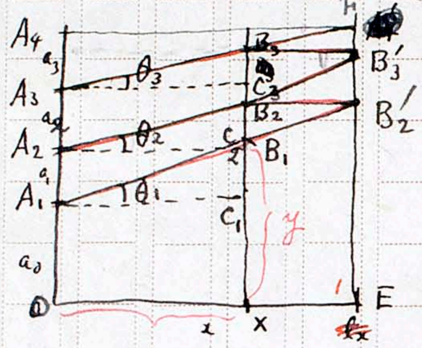
Chapter I. Rational integral functi[on].

l_a 単位の長さ

$\uparrow \rightarrow l_x$

§1. ~~Rational integral function~~ polynomials

(1) Segner (1761) $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$.



$\tan\theta_3 = a_3$, $\overline{C_3B_3} = \overline{A_3C_3}\tan\theta_3 = x a_3$.

$\overline{C_2C_3} = a_2$

$\therefore\ \overline{C_2B_3} = a_2 + x a_3$.

$\tan\theta_2 = (a_2 + a_3 x)$. $\overline{C_2B_2} = A_2C_2 \tan\theta_2$
$= (a_2 x + a_3 x^2)$

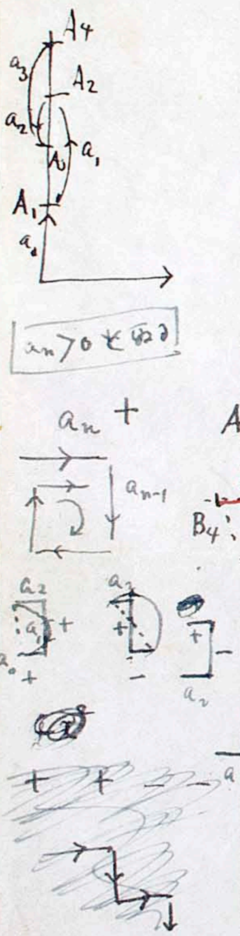
$\therefore\ \overline{C_1B_2} = (a_1 + a_2 x + a_3 x^2)$.

$\tan\theta_1 =$

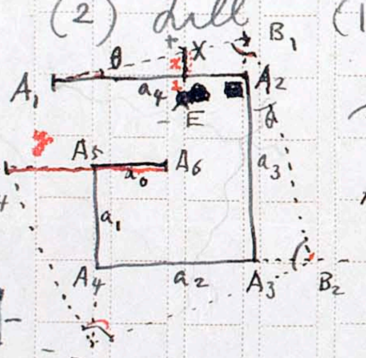
$C_1B_1 = (a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3)$.

$XB_1 = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) = y$

xを動かせば curve を得る.



(2) Lill (1867)



$\overline{EX} = x$.

$\tan\theta = x$.

$A_2B_1 = A_1A_2 \cdot \tan\theta = a_4 x$.

$B_1A_3 = a_3 + a_4 x$. $A_3B_2 = (a_3 + a_4 x)x$.

$A_4B_2 = a_2 + a_3 x + a_4 x^2$.

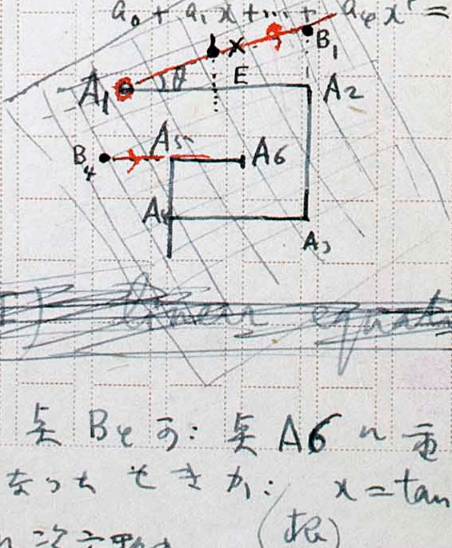
$A_5B_3 = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$.

$\underline{A_6B_4} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$.

§2 algebraic equations

(1) Lill (1867)

$a_0 + a_1 x + \cdots + a_4 x^4 = 0$ である。



~~II. Linear equation~~

$A_6B_4 = 0$ となるような $\overline{EX} = x$ が root.

直角折線 $A_1A_2 \cdots A_6$ を紙の上に書き、その上に薄い方眼紙を載せ、ピンをもって点A_1を留め、この点の周りに方眼紙を回転させる。

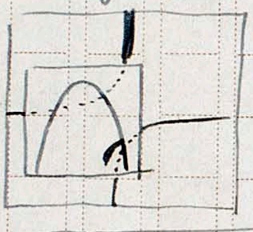
方眼紙の縦横線を利用し、A_1B_1の方向 — 即ちA_1を通る方眼紙上の直線の方向 — が変わるにつれて、点B_4の位置がどの様に移動するかに注意しながら、点B_4が点$A6$に重なるように方眼紙を回転する。B_4がOに重なったときが $x = \tan\theta$ 根 である。

三角定規(n次方程式ならn−1個の)を用いてもよい。

(2) Intersection of curves.

$x^3 + bx^2 + cx = d.$

$\begin{cases} y = x^2 + bx + c & \cdots \quad y = x^2 \\ xy = d \end{cases}$ を薄い線で書いておく.



実験問題

(1) 曲線 $y = x^3 + 4x^2 + 3x - 2$ $(-1 < x < 1)$ を画け

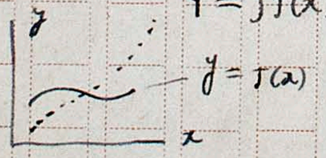
(2) $y = x^5 - 4x^3 + x^2 - 2$ を画け

(3) $4x^3 + 8x^2 - x - 2 = 0$ を解け $(x = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -2)$

(4) $x^5 + 6x^3 + 5x^2 + 10x - 18 = 0$

Chapt. II. Graphical differentiation and integration

§3 Graphical integration.



$Y = \int f(x)dx$ 長さの単位をきめる。

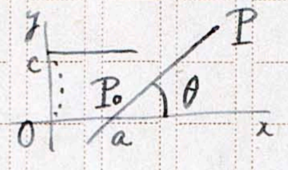
図は $y = f(x)$ が曲線で与えられたとき, その integral curve

$Y = \int f(x)dx$

を, 作図のみによって描くこと.

Massau (1878)

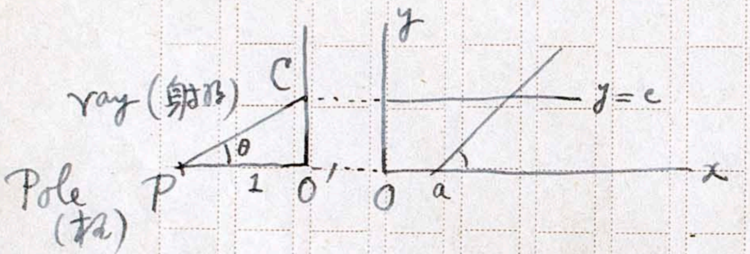
1° 函数: const. の場合 $f(x)=c$.



$$Y=\int_a^x c\,dx = c(x-a)$$ (a は任意定数)

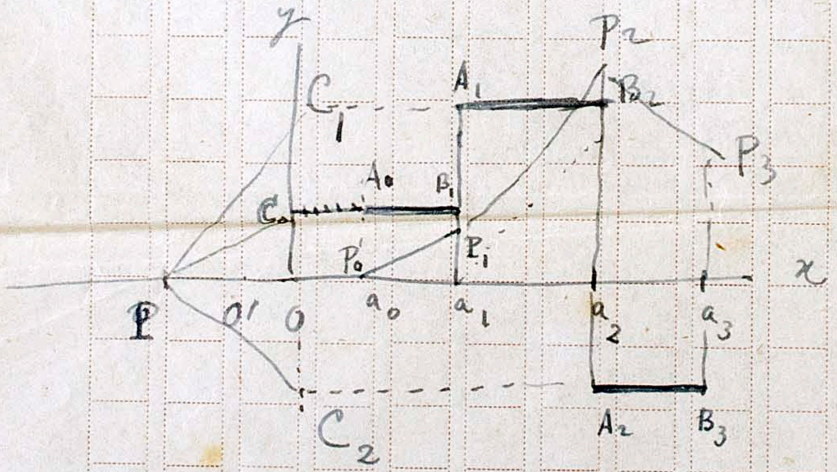
$\tan\theta = c$

作図を系統的にするための 方向図 を作る.



2° Step-curve 階段函数 の積分曲線

$f(x)=c_0$	$a_0<x<a_1$
$=c_1$	$a_1<x<a_2$
$=c_2$	$a_2<x<a_3$
$=\cdots$	



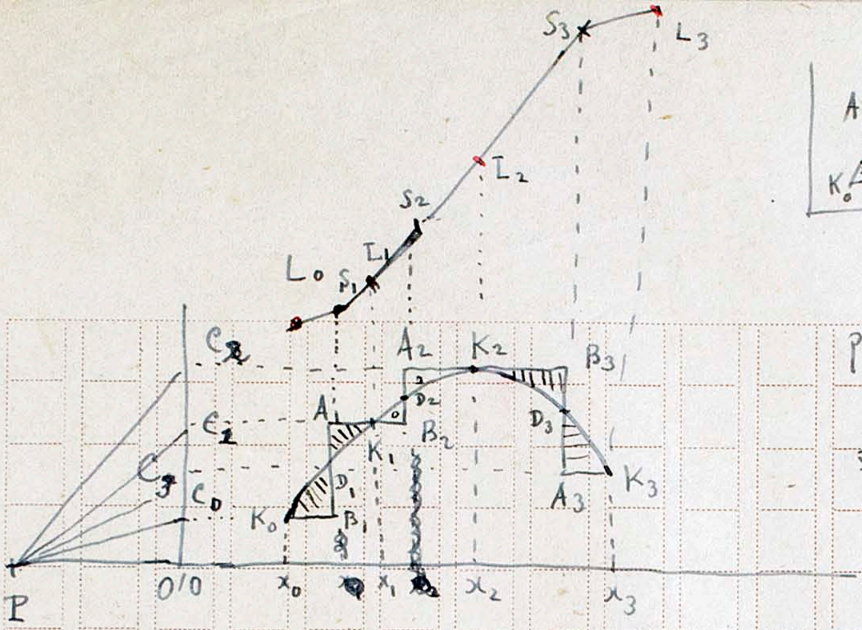
$\int_{a_0}^x f(x)\,dx$ は $a_0<x<a_1$ では, P_0P_1.

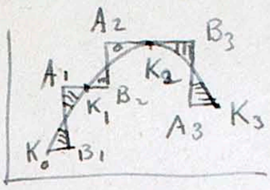
$a_1<x<a_2$ では

$$\int_{a_0}^x f(x) = \int_{a_0}^{a_1} f(x)\,dx + \int_{a_1}^x f(x)\,dx = \overline{a_1P_1} + \int_{a_1}^x f(x)\,dx$$

積分曲線は 折線 $P_0P_1P_2P_3\cdots$

3° 一般の函数を積分するには, 先づ, よく似た函数のグラフ の代用となる 階段形を作る がよい. (普通 二つの方法があるが, 一方だけ説明する.)





階段線 $K_0K_1K_2K_3$ を作る。その條件(1) x 軸に平行な線は $A_1B_2, A_2B_3\cdots$ は任意にとつてよい。

(2) y 軸に平行な線分 $B_1A_1, B_2A_2,\cdots$ の位置は限定される。左右両側の面積が等しいやうに。

4°. 階段線の積分折線 $L_0S_1S_2\cdots$ を画け。

5°. ところで(修正) (1) $f(x)$ の積分と階段線の積分とは、$x=x_0, x_1, x_2, x_3$ に於ては互いにそれぞれ等しい値を有すべきである。なぜなら

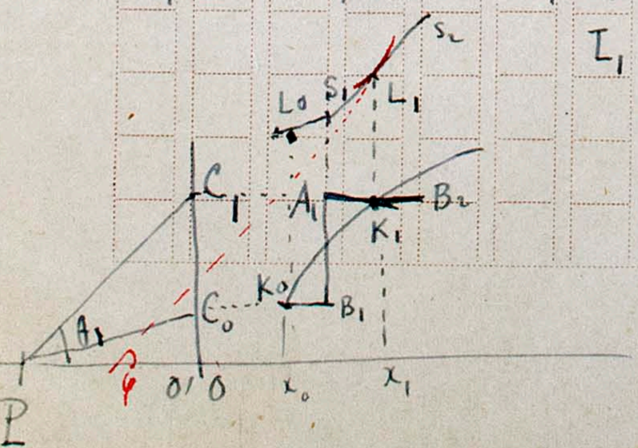
$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \text{面積 } K_0D_1K_1x_1x_0$$

$$= \text{矩形}$$

$$= \text{階段線 } K_0B_1A_1K_1 \text{ の積分.}$$

故に $f(x)$ の積分曲線を画くには、階段線の積分折線上の点 L_0, L_1, L_2, L_3 を通るやうにすべきである。

(2) $f(x)$ の積分曲線は、L_0, L_1, L_2, L_3 に於いて積分折線に切する。



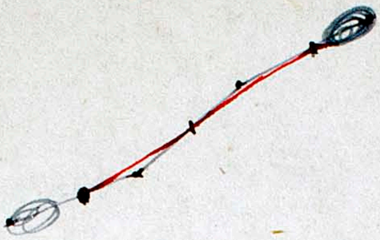
L_1 に於ける積分曲線の切線が x 軸となす角を φ とすると

$$Y = \cancel{y_0 +} \int_{x_0}^{x} f(x)dx \qquad \tan\varphi = \frac{dY}{dx}$$

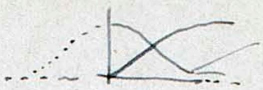
$$= f(x) = \overline{K_1x_1}$$

しかるに L_1 に於ける積分折線の方向は PC_1 に平行 $\tan\theta_1 = \overline{O'C_1}$ しかるに

$$\overline{K_1x_1} = \overline{O'C_1} \qquad \therefore \varphi = \theta_1.$$



Ex. 1. $Y=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}dx$ probality integral



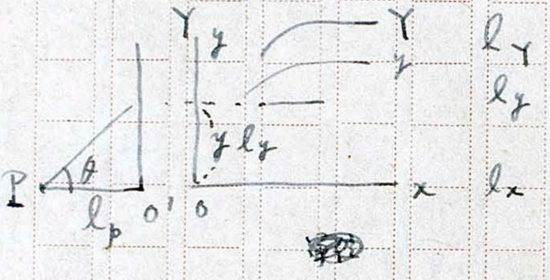
$y=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$ probality curve.

Ex. 2. $Y=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$. elliptic integral (of the first kind) ($k=0,\ 0.5,\ 0.8,\ k=1.$)

これによって積分曲線を描かいする。

$\boxed{\text{注意}}$。この方法は案外精密なので、integraph と同程度である。

II. 長さの単位の変更



$Y=\int f(x)dx=\int y\,dx$

の曲線と x 軸とのなす角 θ は

$$\tan\theta=\frac{d(Y\cdot l_Y)}{d(x\cdot l_x)}=\frac{l_Y}{l_x}\frac{dY}{dx}$$

$$=\frac{l_Y}{l_x}\cdot y$$

方向図では $\tan\theta=\frac{y\cdot l_y}{l_p}$.

故に $\frac{l_y}{l_p}=\frac{l_Y}{l_x}$.

III. 面積を求めるには planimeter の方が便利である。

問題

(1) 汽車の運賃

賃率

	1 km
0–80	1.56 銭
80–160	1.06
160–320	0.87
320–480	0.75
480–640	0.69
640–800	0.63

(2) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

x	$\frac{1}{x}$	$\log_e x$
1	1.000	0.000
2	.500	0.693
3	.333	1.099
4	.250	1.386
5	~~.167~~ .200	1.609
6	.167	1.792
7	.143	1.946
8	.125	2.080
9	.111	2.197
10	.106	2.303

(2) $\int_1^x \frac{dx}{x}$ $(1 < x < 10)$

を描いて, $\log_e x$ と比較せよ.

(3) $\int_0^\theta \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta$ $0 < k^2 < 1.$

ellip. integral of the 2nd kind

(4) $li = \int \frac{dx}{\log_e x}$.

integral logarithmic funct.

$x = 100$ のとき
$y = 30.126$

$100 \leqq x \leqq 10000$

素数の数

(3) $\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx$ (integral sine)

(4) $\int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx$ (Fresnel integral)
sin

~~graphical differentiation~~

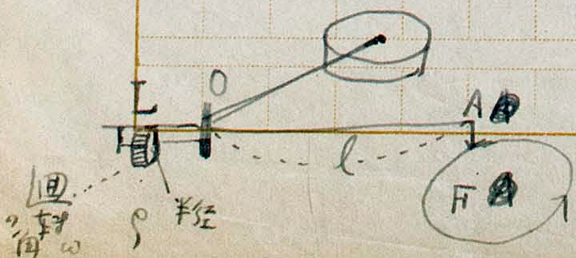
(5) (5) 運動する物体の速さ v(m) は時 t (秒) に対し

路程 $s = \int_0^t v\,dt$

t	0	2.0	4.0	5.5	7.0	9.5	11.0	12.5	15.0	17.5
v	0	3.2	6.4	8.5	9.5	12.0	13.0	13.8	14.2	15.0

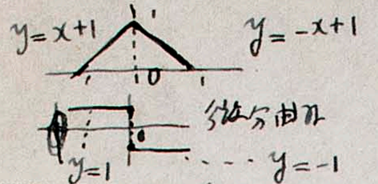
(6) planimeter の練習

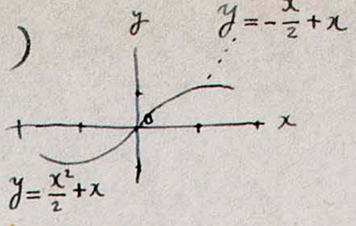
スウィスの技師
1856 Amsler's polar-planimeter



$F = l\rho.\omega$

微分係数存在の條件 (Weierstrass)



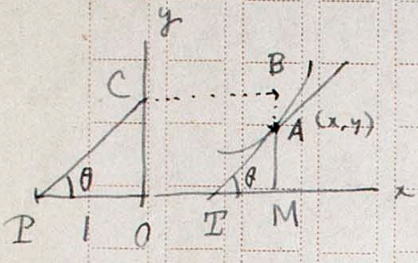


§4. graphical differentiation.

$y=f(x)$ が曲線で与へられたとき 作図のみによって, differential curve

$$\eta = f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

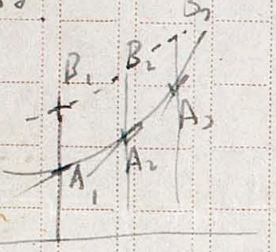
を画くこと.



A (x, y) における切線 AT, θ

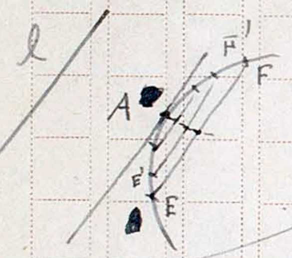
$\frac{dy}{dx} = \tan\theta$, $\eta = \tan\theta$

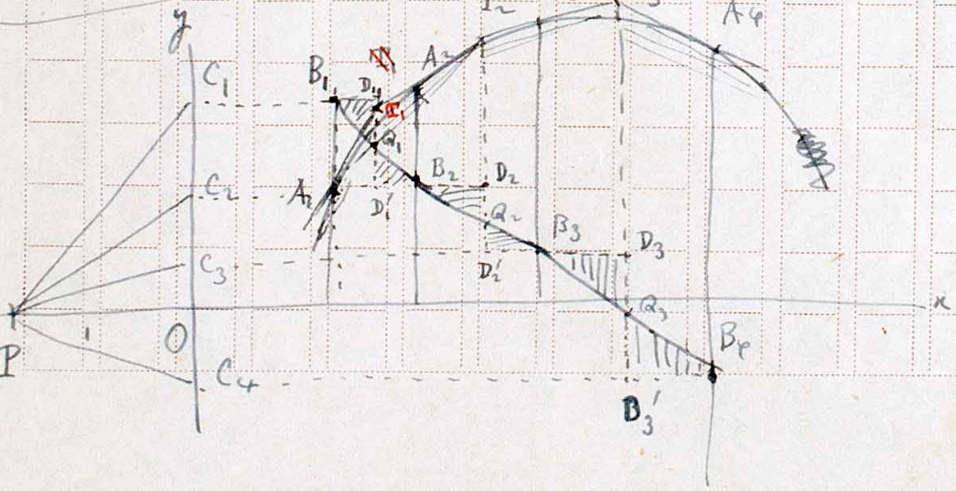
BM = η とすれば B は微分曲線上の点である



曲線上の与へられた点において、それぞれ切線を引くことは、技術的に困難である.

寧ろ点の間隔を狭く方が便である。一つの方向 l をとってそれに平行な切線の切点をよむ。





$B_1, B_2, B_3, B_4 \cdots$ を追求する.

微分曲線を作るには,

三角形 ― を等しくする。

やて B_1Q_1, $B_2'Q_2B_2$, Q_3B_3 ... を ~~…~~ 引く、

階段線

~~B_1D_1~~

B_1D_1, $D_1'B_2D_2$

~~B_2D_2'~~, $D_2'B_3D_3$, を引き

この方法の欠点

1. 凹凸の多い curve については、切点 $A_1, A_2, \cdots$ の作図に、誤差が生ずる。

2. たとい階段形を作っても、点 $B_1, B_2, \cdots$ の選び方で、全く任意的なるを免れない。

Ex.

微分曲線を画け

1. $y = \sin x$

2. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{3}{2}$

y' y''

1. $y = e^{-x}$

2. $y = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}$,

元の curve の max. min. point of inflexion

微分曲線の x軸を截る点, max. min.

§5. curve-length.

curvometer.

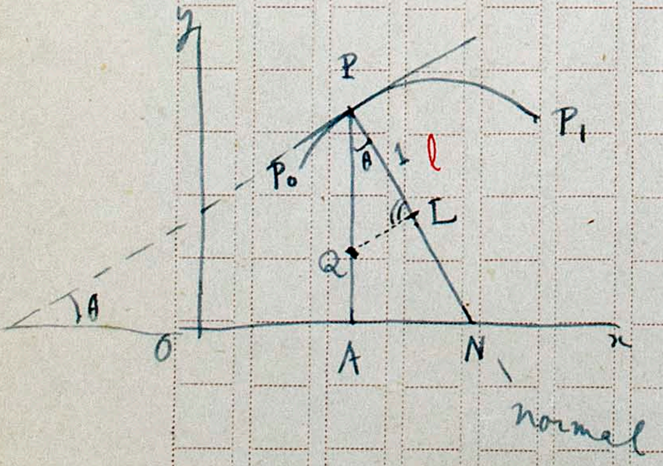
よい精密な機械はない。

微分と積分で画ける。

$y = f(x)$,

$$s = \int \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

$f'(x) = \tan\theta$.



$ds = \frac{dx}{\cos\theta}$.

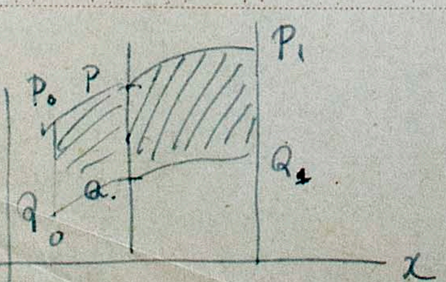
PN は作図し得られる

(実際は θ をよって、それに対応する切点P を求めるがよい。)

PN の上に 単位の長さ PL = 1 を取る。 ℓ

$PQ = \frac{1}{\cos\theta}$ ℓ 故に $ds = \overline{PQ} \cdot dx$ $\frac{1}{\ell}$

$$S = \frac{1}{\ell}\int \overline{PQ} \cdot dx.$$



故に curve-length P_0PP_1 を求めることも、面積を求めることに帰する。

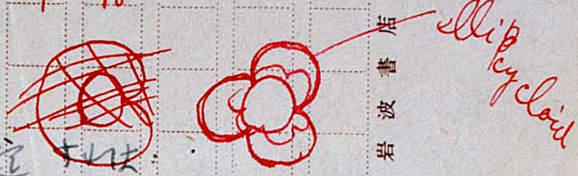
graphical integrat. によるがよい。

(planimeter).

Ex.

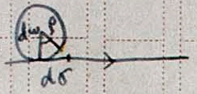
$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1.$ の周の長さ

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1.$



岩波書店 (16×25)

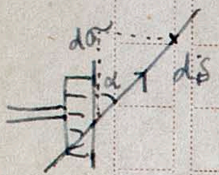
車輪の回転について。



滑らずに動かるものと假定すれば

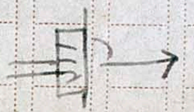
$$d\sigma = \rho . d\omega, \qquad \sigma = \rho\omega.$$

しかるに σ は必ずしも 車が実際進んだ路程ではない。それは 車の平面（の地面への正射影）と進路とが一致する場合に限る。



$$d\sigma = ds . \cos\alpha$$

$$\rho\, d\omega = ds \cos\alpha.$$



$\alpha=90^\circ$ ならば 車は回転せずに移動する

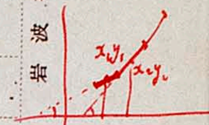
なお $\alpha=0$ ならしめるためには、予め軌道を作っておくとか、近くには適当に大なる重さをつけておく。

ω から s をおしはかる measuring wheel (curvometer) を精密に製作することは困難である。

Chapt. III. graphical solutions of differential equations.

§6. Ordinary dif. equation of the first order.

Massau's method.



幾何学的考察

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$ $f(x,y)$ は一価函数と仮定する。

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \qquad x^2 + y^2 = a^2.$$

原始條件

initial condition

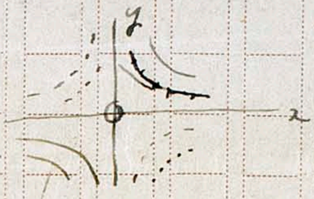
$(x = x_0, y = y_0$ を与へる)

積分曲線.

$(x = 0, y = 0$ singular point を除く).

linear element.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$



$$xy = a$$

graphical solution の欠点.
(numerical solution)

analytical solution の長所

analytical solution の欠点

$$\frac{dy}{dx} = 1 + xy. \qquad y = e^{\frac{x^2}{2}}\left[\cancel{c}\,a + \int e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right]$$

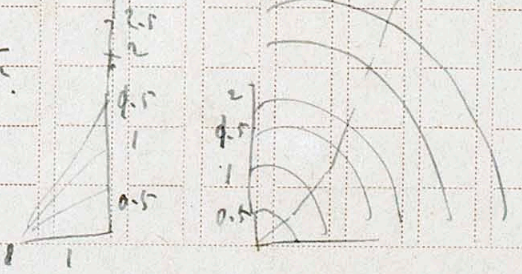
Massau (1885)

$f(x, y) = c_1, c_2 \cdots$

isoclinal.

Ex 1. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 + y^2}.$

$\left(\begin{array}{l} x_0 = 0.30, \\ y_0 = 0.37 \end{array}\right)$

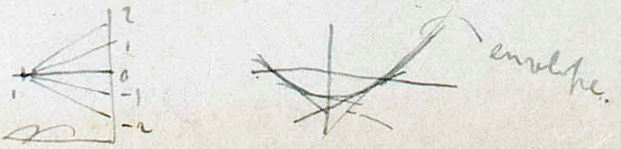


Ex. 2. Clairaut

$F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$

$\frac{dy}{dx} = c.$

$$y = x\frac{dy}{dx} + \varphi\left(\frac{dy}{dx}\right). \qquad \text{isoclinal } y = cx + \varphi(c) \text{ 直線}$$

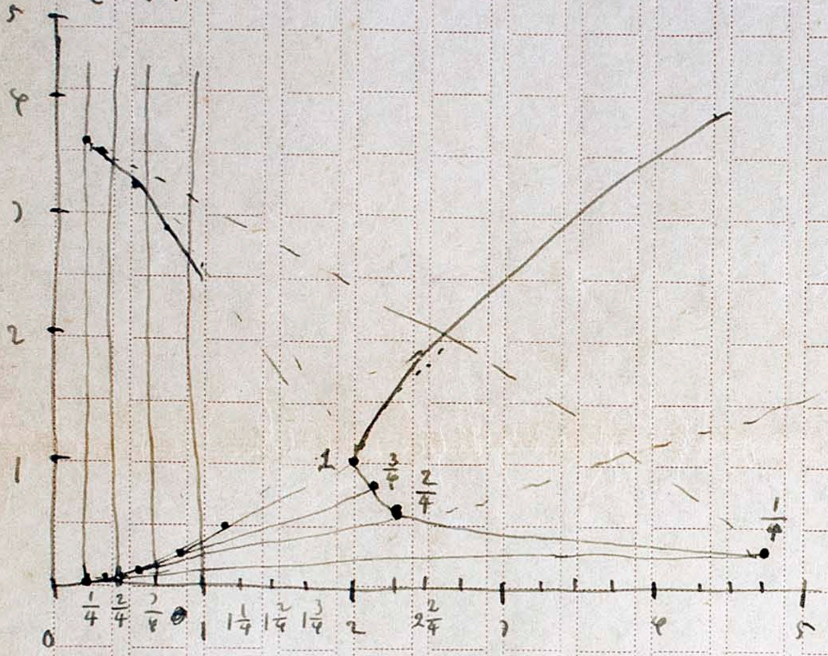


|| 積分曲線.

§ 7. Czuber's method (1899)

Ex. $\dfrac{dy}{dx} + xy = x^2.$ $\qquad y = e^{-\frac{x^2}{2}}\left[a + \int x^2 e^{\frac{x^2}{2}} dx\right].$

$\begin{cases} \xi = x + \dfrac{1}{x} \\ \eta = x. \end{cases}$



$\begin{cases} \xi = \dfrac{2}{4} + \dfrac{4}{2} = 2\dfrac{2}{4} \\ \eta = \dfrac{2}{4}. \end{cases}$

$\begin{cases} \xi = 4\dfrac{1}{4} \\ \eta = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-x}{y+x}.$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{x^2+y^2}.$

(3) $\dfrac{dy}{dx} = x - \dfrac{y}{x}.$

(4) $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = xy - 1.$

(5)

i. 定点(a, b)を通る直線の群

ii. ~~x軸と一定の角をなす直線の群~~

iii. 定点(a, b)を中心とする円周の群

を積分曲線とする第一階微分方程式の最も一般な形を作れ.

問題

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}.$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{x-2}{y+1}\right)^2$

3. $y^2 \dfrac{dy}{dx} = x^2.$

4. $\dfrac{dy}{dx} = xy + 1.$

5. Poincaré (1881), Liebmann, Kamke (1930)

6. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a_2 x + b_2 y + \cdots}{a_1 x + b_1 y + \cdots}$ singular point $(x=0, y=0)$ の附近の積分曲線の形

$\Delta = (a_1 - b_2)^2 + 4 a_2 b_1$

$\Delta = 0$		Knoten		$\dfrac{dy}{dx} = 2\dfrac{y}{x}$	$y = ax^2$
$\Delta > 0$	$a_1 b_2 - a_2 b_1 > 0$	Knoten		$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$	$xy = a$
$\Delta > 0$	$a_1 b_2 - a_2 b_1 < 0$	Sattel			
$\Delta < 0$	$a_1 + b_2 \neq 0$	Strudel		$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x-y}$	$\sqrt{x^2+y^2} = a \cdot e^{\tan^{-1}\frac{y}{x}}$, $r = ae^{\theta}.$
$\Delta < 0$	$a + b_2 = 0$	Wirbel		$\dfrac{dx}{dx} = -\dfrac{x}{y}$	$x^2+y^2 = a^2$