$$\frac{1}{k^2-m^2} > \frac{1}{k^2-(m-1)^2} > \frac{1}{k^2-(m-2)^2} > \cdots,$$

$$\frac{1}{(m+1)^2-k^2} > \frac{1}{(m+2)^2-k^2} > \frac{1}{(m+3)^2-k^2} > \cdots.$$

由てa_mの絶対値$|a_m|$に就ては

$$|a_m| > |a_{m-1}| > |a_{m-2}| > \cdots,$$

$$|a_{m+1}| > |a_{m+2}| > |a_{m+3}| > \cdots.$$

次に、吾々は次の不等式を持つ。

$$\frac{m}{k^2-m^2} > \frac{m-1}{k^2-(m-1)^2} > \frac{m-2}{k^2-(m-2)^2} > \cdots,$$

$$\frac{m+1}{(m+1)^2-k^2} > \frac{m+2}{(m+2)^2-k^2} > \frac{m+3}{(m+3)^2-k^2} > \cdots,$$

今その中一つ、例へば

$\frac{m}{k^2-m^2} > \frac{m-1}{k^2-(m-1)^2}$ を証明するには $mk^2 - m(m-1)^2 > (m-1)k^2 - m^2(m-1)$ なることを、従て $k^2 + m(m-1) > 0$ なることを示せばよい。而るにそれは自明のことである。従てb_mの絶対値に就て

$$|b_m| > |b_{m-1}| > |b_{m-2}| > \cdots,$$

$$|b_{m+1}| > |b_{m+2}| > |b_{m+3}| > \cdots.$$

この性質あるによって、フーリエ係数が（絶対値に於て）最大なる所を探せば、これに周期Tを求める鍵がある。

ワメ〜

今整数mをkに近い値とするとき、吾々は更に進んで、その試みの整数mに對應する振動

$$a_m \cos mt + b_m \sin mt$$

の振幅（これをR_mで表はし、試みの振幅と呼ばう）と、眞正の振幅R_Tと~~■~~を比較しよう。

$$R_m^2 = a_m^2 + b_m^2$$

であるから、$k-m=x$とおけば

$$R_m^2 = \left(\frac{2m}{m+k}\right)^2 \cdot R_T^2 \cdot \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2 \cos^2(\pi x+\varepsilon) + \left(\frac{2k}{m+k}\right)^2 \cdot R_T^2 \cdot \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2 \sin^2(\pi x+\varepsilon).$$

となる。

さて試みの整数mを、相當に大きな數であると假定しよう。kはmに近い數であるから、この假定のもとに、

$$\frac{2m}{m+k} = \frac{2k}{m+k} = 1$$

と見做し得る。由て

$$R_m^2 = R_T^2 \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2 \cos^2(\pi x+\varepsilon) + R_T^2 \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2 \sin^2(\pi x+\varepsilon).$$

即ち

$$\left(\frac{R_m}{R_T}\right)^2 = \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2. \quad \text{但し} \ (x = k-m)$$

に到達する。

しかるに、右辺の式$\left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2$は、既に本章第二節に於て遭遇した所の形であるから、そこから

吾々は次の結果を得る。(第28図 ~~[illegible]~~ を見よ)。

x が0より遠ざかるに従て、R_n は R_Π に比して急激に小さくなり、$-1 < x < +1$ 以外の範囲では、R_n は R_Π に對して無視し得るほどに小さくなる。

最後に、a_m, a_{m+1} の値から、k の値、從て週期 $\Pi = \frac{2\pi}{k}$ を求める方法を考へよう。上の如く $k - m = x$ とおき、且つ m を相當(試みの整數)に大きな數と假定する。a_m, a_{m+1} の値は

$$a_m = \frac{2k}{k+m} R_\Pi \frac{\sin \pi x}{\pi x} \sin(\pi x + \varepsilon),$$

$$a_{m+1} = -\frac{2k}{k+m+1} R_\Pi \frac{\sin \pi x}{\pi(1-x)} \sin(\pi x + \varepsilon)$$

となるから、

$$\frac{a_m}{a_{m+1}} = -\frac{k+m+1}{k+m} \cdot \frac{1-x}{x}$$

となり、之は

$$\frac{a_m}{a_{m+1}} = -\frac{1-x}{x}$$

と見做し得る。同様にして

$$\frac{b_m}{b_{m+1}} = -\frac{1-x}{x}.$$

No.

これ等の式から、xが求められ、従て $\xi=\Xi+x$ として右ぎ、更ん週期Tが決定される。

注意一。以上の理論は実ん簡單んして明快であるが、しかし実際問題んあつては、上ん假定した如き簡単な函数の形 $f(t)=R_T\cdot\varepsilon\left(\frac{2\pi}{T}(t+\xi)\right)$ を取らぬのである。従てターナーの方法を、その儘の形で採用することに對しては、勿論疑問の餘地が殘されてある。

実際、第五章第二節ん於て與へた一例（第二十一、二の図）を見るん、そこんある函数は折線であって、明らかに2πを週期とし、その他の週期を持たないのである。

しかるん其のフーリエ係数は

$$a_0=a_1=a_2=a_3=\cdots\cdots=0,$$

$$b_1=\frac{4}{\pi},\quad b_2=0,\quad b_3=-\frac{4}{9\pi},\quad b_4=0,\quad b_5=\frac{4}{25\pi},$$

$$b_6=0,\quad b_7=-\frac{4}{49\pi},\quad b_8=0,\quad b_9=\frac{4}{81\pi},\ldots$$

である。係数b_mの絶對値の最大なるものがb_1であることから、$\Xi=1$、従て週期は2πであると、豫想されるが、これは事実と一致する。しかし符号の変化のことなどは、寧ろ上述の理論の適用範圍の狭いことを、暗示するものゝ如く

想はせる。極端に言へば、週期解析は正弦曲線(餘弦曲線)の形を有する循環のみを、探索するのである。

注意二。フーリエ係数は、積分からでなく、和の形として其の近似値を計算するを要する。

例。ムーアはこの方法を一八一八―一九一三年間のサウエルベック物價指數に適用して、物價の循環週期を考究した。その場合には、明瞭に長期變動傾向*の存在が認められるけれども、ムーアは之を除去せずに、そのまゝの形で、ターナーの方法に掛けたのである。

年次	指數	年次	指數	年次	指數	年次	指數
1818	142	1842	91	1866	102	1890	72
1819	121	1843	83	1867	100	1891	72
1820	112	1844	84	1868	99	1892	68
1821	106	1845	87	1869	98	1893	68
1822	101	1846	89	1870	96	1894	63
1823	103	1847	95	1871	100	1895	62
1824	106	1848	78	1872	109	1896	61
1825	117	1849	74	1873	111	1897	62
1826	100	1850	77	1874	102	1898	64
1827	97	1851	75	1875	96	1899	68
1828	97	1852	78	1876	95	1900	75
1829	93	1853	95	1877	94	1901	70
1830	91	1854	102	1878	87	1902	69
1831	92	1855	101	1879	83	1903	69
1832	89	1856	101	1880	88	1904	70
1833	91	1857	105	1881	85	1905	72
1834	90	1858	91	1882	84	1906	77
1835	92	1859	94	1883	82	1907	80
1836	102	1860	99	1884	76	1908	73
1837	94	1861	98	1885	72	1909	74
1838	99	1862	101	1886	69	1910	78
1839	103	1863	103	1887	68	1911	80
1840	103	1864	105	1888	70	1912	85
1841	100	1865	101	1889	72	1913	85

五号ゴ

*ムーアは長期的變動、循環的變動などの意味を、第二章第五節の初めに与へたやうに採ってゐる。しかし週期解析そのものは、第三章第五節に於ける意味での循環的變化の上に適用する方が、寧ろ至当であらう。

6

さて試みの整数mを決定するために、彼は$m=1,2,3,\ldots,24$についてフーリエ係数までを採り、その各々の場合$a_1, a_2, \ldots, a_{24}$; $b_1, b_2, \ldots, b_{24}$および振幅の平方$R_1^2, R_2^2, \ldots, R_{24}^2$を計算したのであった。

m	周期(年) $\frac{96}{m}$	a_m	b_m	R_m^2	m	周期(年) $\frac{96}{m}$	a_m	b_m	R_m^2
1	96.0	−3.46	+10.60	124.42	13	7.4	+3.12	−0.11	9.74
2	48.0	+11.27	+7.96	190.40	14	6.9	+2.12	+1.77	7.62
3	32.0	+1.08	+0.76	1.73	15	6.4	+0.61	+0.17	0.41
4	24.0	+2.95	+0.70	9.17	16	6.0	+1.67	+0.29	2.86
5	19.2	+4.18	+3.28	28.23	17	5.6	+0.88	+0.72	1.30
6	16.0	−1.08	+3.46	13.13	18	5.3	+0.59	+2.03	4.48
7	13.7	+0.78	+0.76	1.19	19	5.0	+0.04	+0.66	0.44
8	12.0	+1.85	+0.73	3.95	20	4.8	+0.29	+0.75	0.65
9	10.7	+1.18	−0.02	1.40	21	4.6	+1.38	+0.48	2.14
10	9.6	+2.00	−0.92	4.86	22	4.4	+0.03	+1.64	2.68
11	8.7	+0.61	+3.76	14.52	23	4.2	+0.80	+0.63	1.03
12	8.0	+1.36	−0.51	2.12	24	4.0	+0.30	−0.10	0.10

この表を眺めつゝ、

R^2に大なる値を与へる整数 m の値として、ムーアは（2π即ち360°を以て96年と見做して）

m	週期 = $\frac{96年}{m}$
1	96年
2	48年
5階	(24−16)年
12階	(8.7−7.4)年

を採った。

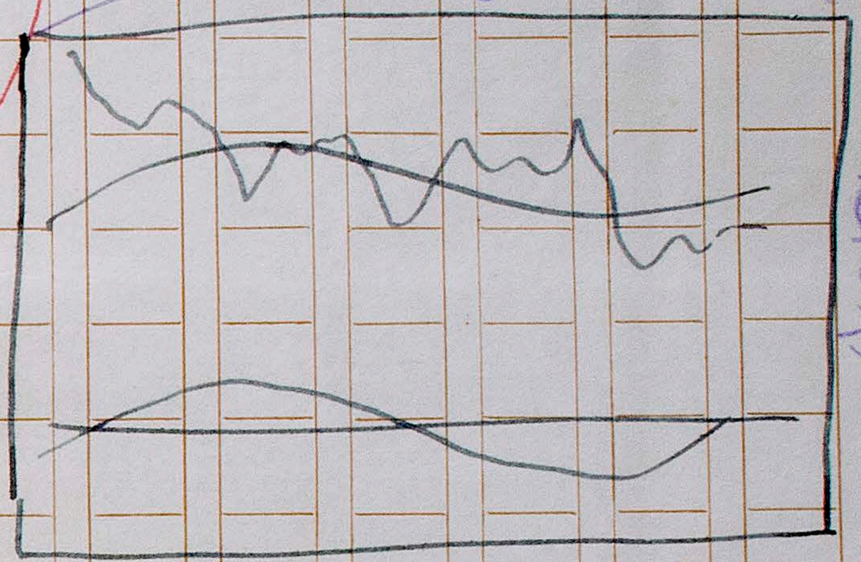
この中最初の三つ、即ち96年、48年、及び19.2（$=\frac{24+16}{2}$）年の週期は、物価の長期変動傾向に属するものと、ムーアは考へた。（a_1とa_2との間に符号の変化がある。a_4からa_6の間にも符号の変化がある）。

以上の三つの外に、m が6の場合即ち16年のものは、96年の六分の一に当る——言ひ換へれば、16年の週期を六回繰返せば96年の週期に当る——もののみならず、R_6も相当に大きい（それは係数a_6附近の符号に注意せよ）から、これをも勘定の内に入れる。

かくして吾々は、一八一八年を原点とし、2πを96年に相当する様に時の単位を定めて、（即ち$\frac{2\pi}{96}$年を時の単位に取って）、次の式を得る。

No.

拾

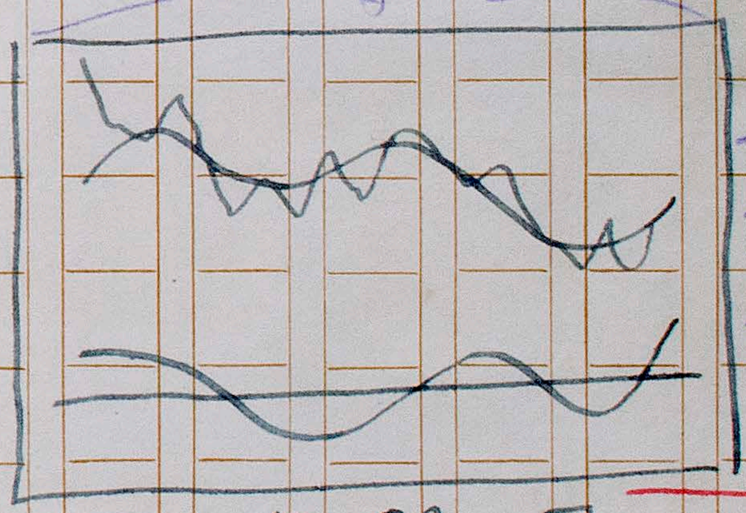


第 31 図

6

上の太線 $y = 88.6 + 11.2 \sin(t + 342^\circ)$.

下の線 $y = 11.2 \sin(t + 342^\circ)$.

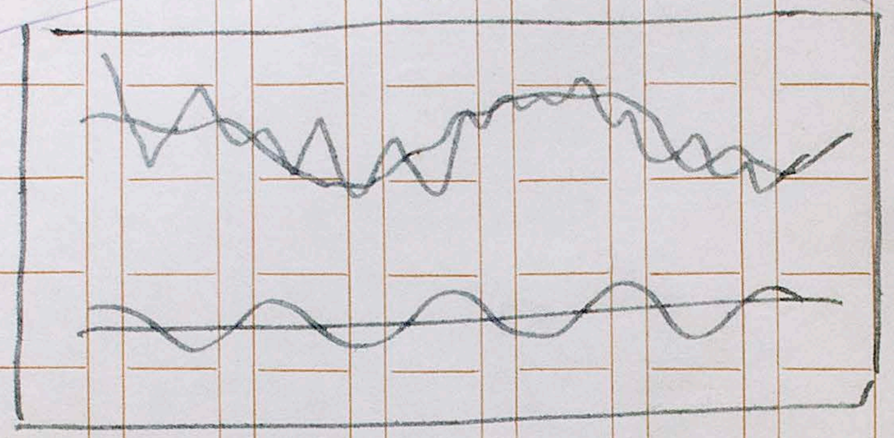


第 32 図

6

上の太線 $y = 88.6 + 11.2 \sin(t + 342^\circ) + 13.8 \sin(2t + 55^\circ)$.

下の線 $y = 13.8 \sin(2t + 55^\circ)$.

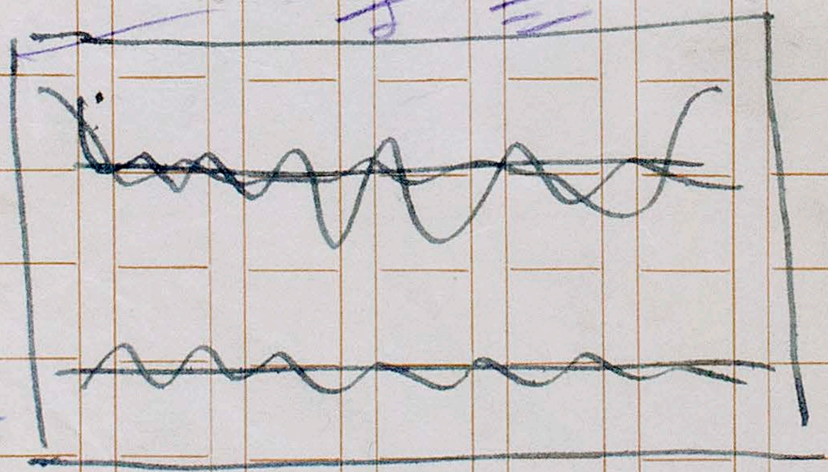


第 33 図

6

上の太線 $y = 88.6 + 11.2 \sin(t + 342^\circ) + 13.8 \sin(2t + 55^\circ) + 5.3 \sin(5t + 52^\circ)$.

下の線 $y = 5.3 \sin(5t + 52^\circ)$.



第 34 図

6

上の太線 $y = 88.6 + 11.2 \sin(t + 342^\circ) + 13.8 \sin(2t + 55^\circ) + 5.3 \sin(5t + 52^\circ) + 3.6 \sin(6t + 343^\circ)$.

下の線 $y = 3.6 \sin(6t + 343^\circ)$.

6

149

$$y = 88.6 + 11.2 \sin(t+342^\circ) + 13.8 \sin(2t+55^\circ) + 5.3 \sin(5t+52^\circ) + 3.6 \sin(6t+343^\circ)$$

でこのグラフが第34図であり、この曲線を以てムーアは物価の長期変動傾向を表はすものと、見做したのである。(また此方程式の最初の二項、三項、四項を取ったもの、グラフは、夫々第31図、第32図、第33図に示されてゐる)。

今この方程式によって、物価指数yを計算し、これと実際の物価指数との偏差を求めると、次の表を得る。この偏差は、与へられた実数から長期変動傾向を除去したもの——この場合、物価は年平均であるから、季節的変化は最初から除いてあるものと見做し得よう——であるから、循環的変動と不規則変動とを併合してゐるのである。

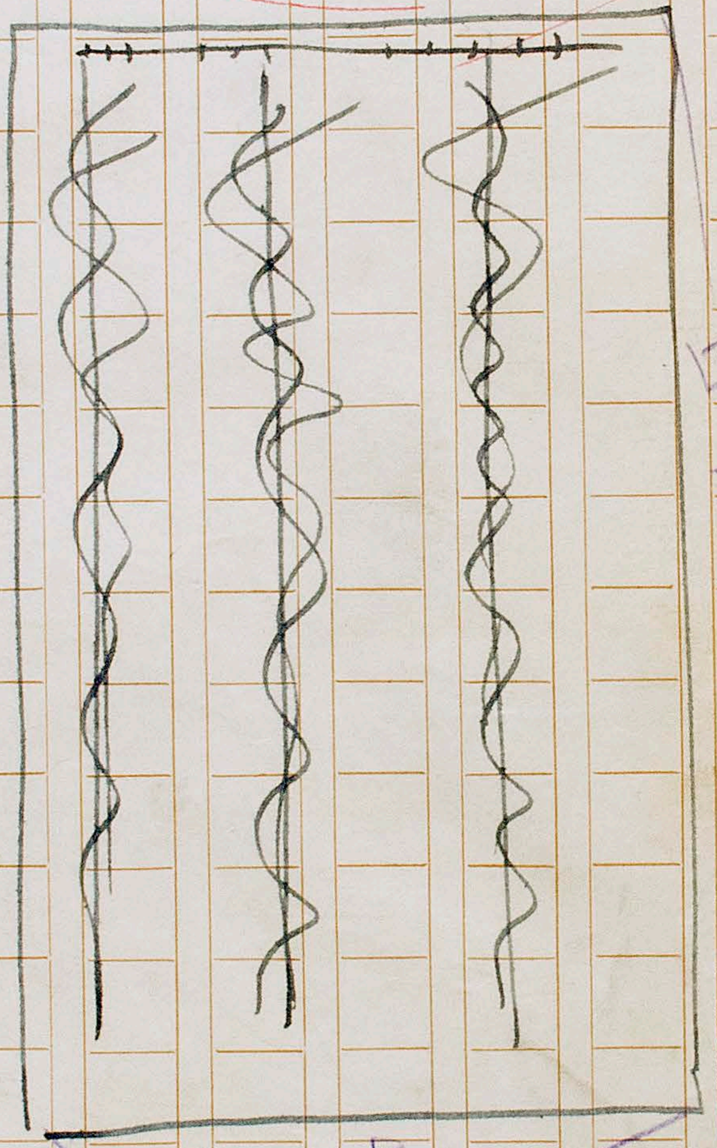
そこで最後に、今一つの注意すべき周期として、約8年 $\left(=\frac{8.7+7.4}{2}\right)$ のものを見出す。実際、丁度8年の周期の振幅は小さいが、8.7年及7.4年のもの、振幅は大きい。(それは係数Aの符号

第35図

上の太き線　$y = 3.8 \sin(11t + 9°) + 3.1 \sin(13t + 92°)$

中央の太き線　$y = 3.8 \sin(11t + 9°)$

下の太き線　$y = 3.1 \sin(13t + 92°)$



年次	殘り（偏差）	年次	殘り（偏差）	年次	殘り（偏差）	年次	殘り（偏差）
1818	+42.4	1842	— 1.2	1866	+ 3.9	1890	+ 7.7
1819	+17.7	1843	— 5.7	1867	+ 1.2	1891	+ 8.5
1820	+ 5.5	1844	— 0.9	1868	— 1.0	1892	+ 5.2
1821	— 2.6	1845	+ 5.3	1869	— 3.2	1893	+ 5.2
1822	— 8.4	1846	+ 9.7	1870	— 6.6	1894	— 0.5
1823	— 6.3	1847	+17.0	1871	— 2.8	1895	— 2.4
1824	— 1.7	1848	+ 0.2	1872	+ 5.9	1896	— 4.7
1825	+11.6	1849	— 4.8	1873	+ 8.2	1897	— 5.3
1826	— 2.4	1850	— 4.1	1874	+ 0.3	1898	— 5.0
1827	— 2.4	1851	— 9.0	1875	— 4.3	1899	— 2.5
1828	+ 0.4	1852	— 9.5	1876	— 3.3	1900	+ 3.2
1829	— 1.3	1853	+ 3.7	1877	— 1.9	1901	— 2.9
1830	— 1.8	1854	+ 7.3	1878	— 6.3	1902	— 4.5
1831	— 0.4	1855	+ 2.5	1879	— 7.5	1903	— 4.7
1832	— 3.6	1856	+ 1.0	1880	+ 0.5	1904	— 4.1
1833	— 2.8	1857	+ 3.6	1881	+ 0.3	1905	— 2.4
1834	— 5.6	1858	—10.9	1882	+ 2.0	1906	+ 2.1
1835	— 5.3	1859	— 7.9	1883	+ 2.7	1907	+ 4.1
1836	+ 3.0	1860	— 2.1	1884	— 0.7	1908	— 4.4
1837	— 6.2	1861	— 2.2	1885	— 2.4	1909	— 5.8
1838	— 1.5	1862	+ 1.8	1886	— 2.9	1910	— 4.8
1839	+ 3.2	1863	+ 4.8	1887	— 1.7	1911	— 6.5
1840	+ 4.9	1864	+ 7.2	1888	+ 2.3	1912	— 5.7
1841	+ 4.5	1865	+ 3.3	1889	+ 6.1	1913	—10.2

の変化もある。）そして此等の二つの振動の合成

$$y = 3.8\sin(11t + 9°) + 3.1\sin(13t + 92°)$$

は、極めてよく前述の偏差を一致するのである。（第34図）。

それ故に9.7年乃至7.4年なる二つの周期の合成──或は凡そ8年を周期に持つものこそ、物価指数の正しい循環週期であると、ムーアは結論したのであった。（本章末の参考書目中の最後の書をみよ）

一行アケ

第五節　循環的変動の相関係数

二つの時系列の循環的変動が、周期解析によって分離されたとする。そして、これ等が（簡単のために）例へば、二つの同じ週期と一つの互に異る週期とを含むものとし、その循環的変動が、それぞれ

$$Y = A_0 + (A_k \cos kt + B_k \sin kt) + (A_m \cos mt + B_m \sin mt) + (A_p \cos pt + B_p \sin pt),$$

$$Y' = A'_0 + (A'_k \cos kt + B'_k \sin kt) + (A'_m \cos mt + B'_m \sin mt) + (A'_q \cos qt + B'_q \sin qt)$$

で表はされたとしよう。pとqとは異る整数であ

る。

今Y、Y'を標準測定値~~に~~で測るために、標準偏差σ_Y、$\sigma_{Y'}$を計算する。(算術平均はA_0、A_0'である。)

$$y=\frac{Y-A_0}{\sigma_Y},\quad a_m=\frac{A_m}{\sqrt{2}\cdot\sigma_Y},\quad b_m=\frac{B_m}{\sqrt{2}\cdot\sigma_Y},\ \ldots\ldots,$$

$$y'=\frac{Y'-A_0'}{\sigma_{Y'}},\quad a_m'=\frac{A_m'}{\sqrt{2}\cdot\sigma_{Y'}},\quad b_m'=\frac{B_m'}{\sqrt{2}\cdot\sigma_{Y'}},\ \ldots\ldots$$

とおけば(第五章第二節参照)、

$$y=(a_k\cdot\sqrt{2}\cos kt+b_k\cdot\sqrt{2}\sin kt)+(a_m\cdot\sqrt{2}\cos mt+b_m\cdot\sqrt{2}\sin mt)$$
$$+(a_p\cdot\sqrt{2}\cos pt+b_p\cdot\sqrt{2}\sin pt),$$

$$y'=(a_k'\cdot\sqrt{2}\cos kt+b_k'\cdot\sqrt{2}\sin kt)+(a_m'\cdot\sqrt{2}\cos mt+b_m'\cdot\sqrt{2}\sin mt)$$
$$+(a_q'\cdot\sqrt{2}\cos qt+b_q'\cdot\sqrt{2}\sin qt)$$

となる。この二式を~~掛け合~~辺々相乗じて、0から2πまでtに就て積分~~する~~し、

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\sqrt{2}\cos kt)^2dt=1,\quad \int_0^{2\pi}\cos kt\sin mt\,dt=0,$$

$$\int_0^{2\pi}\cos kt\cos mt\,dt=0,\quad \int_0^{2\pi}\sin kt\sin mt\,dt=0,\ \ldots\ldots$$

等を参考すると、

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}yy'\,dt=(a_ka_k'+b_kb_k')+(a_ma_m'+b_mb_m')$$

を得る。しかるに此の式の左辺は、yとy'との間の相関係数に外ならない(第五章第一節)。

No.

故に二つの循環的変動 Y、Y' の間の相関係数 $r[Y,Y']$ は、

$$r[Y,Y'] = (a_k a'_k + b_k b'_k) + (a_m a'_m + b_m b'_m)$$

$$= \frac{1}{2\sigma_Y\sigma_{Y'}}\left[(A_k A'_k + B_k B'_k) + (A_m A'_m + B_m B'_m)\right]$$

によりて與へられる。こゝに顕はれたフーリエ係数は、共通の周期に関係ある項から来り、異る周期の項のフーリエ係数は、こゝに顕はれないことを見よ。

6

一字アケ

参考書目

Brunt, The combination of observations. Cambridge.

その他 Carse and Shearer (前掲). Whittaker and Robinson (前掲).

ムーア『経済循環期の統計学的研究』「蜷川虎三氏訳」(大鐙閣)

H. L. Moore, Generating economic cycles. New York.

— 了 —

別頁

略歴

明治十八年七月山形県酒田町に生る。

明治三十八年二月東京物理学校卒業。九月より東京帝国大学理学部化学選科に一年間在学。

明治四十四年四月東北帝国大学理学部（数学科）助手。

大正五年八月理学博士の学位を受く。

大正六年四月塩見理化学研究所（数学部）研究員。大阪醫科大学（豫科数学）教授。

大正八年十二月より大正十一年一月まで海外留学（パリ滞在）。

大正十四年六月塩見理化学研究所長。

大正十五年五月大阪医科大学（豫科）教授を辞す。

著書の中から

著訳書及び論文の大部分は、数学に属するもので、本全集とは餘りに縁遠いから、こゝにはたゞ、統計、経済、社會方面と、比較的直接に交渉を有するもののみを掲げておく。

統計的研究法　大正十四年　積善館

圖計算及び圖表　大正十二年　山海堂

ザンデン、実用解析学（共訳）　昭和三年　山海堂

数学教育の根本問題　大正十三年　イデア書院

階級社會の数学（近刊）　岩波書店