の回帰直線は

$$X-M_x = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y-M_y)$$

となり、Y に於ける X の回帰係数は

$$b_{x,y} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

となる。

由て r の絶対値は、之れ等二つの回帰係数の幾何平均に等しい。即ち $|r| = \sqrt{b_{y,x}\cdot b_{x,y}}$

最後に、極めて特殊の場合として、時系列(X)を時それ自身であると考へよう。其の場合には、時系列(Y)の長期的変動傾向として考へられた直線(第二章第一節)は、時それに於ける Y の回帰直線と一致する。何故なら、之等の二直線は、全く同じ方法によって求められたものであるから。

第四節　部分相関

多くの時系列について、それ等の間の相関関係が明らかになったと、統計学者は考へてゐる。私は之に對して種々の疑問を有するけれども、本篇に於ては、たゞ前節の考へ方を擴張して、三つの時系列の間の相関関係を、(同様の研究)世間並みの方法に従って説明するに止めよう。

UTSUYAMA　10×20

95

は、四つ、五つ、等の系列に就いても行はれるが、徒に複雑であるから、茲には之を~~略~~省く。

三つの時系列 (x_t)、(y_t)、(z_t) が、それぞれ標準化~~実値によって計算~~されたものとし、相互の間の相関係数 r_{xy}、r_{yz}、r_{zx} が計算されたとしよう。

先づ二つの系列の場合の平面的相関図を擴張して、(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), …, (x_n, y_n, z_n) を、空間の直角坐標に於ける n 個の点として表はさう。

今 x の方の値と y の方の値とを與へるものと見做さう。x 及び y の与へられた値に對して、z が平均的値に、如何なる値を取るかを考へよう。

簡単でもあり、また(二つの時系列の場合から推して)自然的でもある一つの解法として、次の方法を採らう。それは x、y 及び z の間の関係が、近似的に一次式(幾何学的に言へば平面)的であると假定し、最小自乗法によって

$$z = a + bx + cy$$

の係数 a、b、c を定めることである。即ち

$$S = \sum \left[z_t - (a + bx_t + cy_t)\right]^2 = \text{最小}。$$

の条件として、

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial c} = 0.$$

を得る。

~~*「x, y を二つの自変数であると見做す」といふことは、その二つの変数が「互に無関係である」、或は「$r_{xy}=0$ である」との意味ではない。x と y とは統計的に或る関係を有つ。その意味は、「x は一つの変数であり、y もまた一つの変数である」と解釈すれば、それで足る。~~

* その式に於て、最初から $y=0$ とおけば、$z=a+bx$ となって、二系列 x、z の間の問題に帰する。即ち r_{xz} は最初から空間の点を、$y=0$ なる平面に射影し、その射影の点について考へるのである。

さて上の第一式は

$$\sum\left[z_k-(a+bx_k+cy_k)\right]=0 \qquad \sum z_k-na-b\sum x_k-c\sum y_k=0$$

であるが、x_k, y_k, z_k が標準測定値で測られてゐることから、

$$\sum x_k=0,\quad \sum y_k=0,\quad \sum z_k=0,$$
$$\sum x_k^2=n,\quad \sum y_k^2=n,\quad \sum z_k^2=n.$$

故に $a=0$ ならざるを得ない。従って第二、第三の條件式は

$$\sum\left[z_k-(bx_k+cy_k)\right]x_k=0, \qquad \sum x_kz_k-b\sum x_k^2-c\sum x_ky_k=0,$$

及び

$$\sum\left[z_k-(bx_k+cy_k)\right]y_k=0, \qquad \sum y_kz_k-b\sum x_ky_k-c\sum y_k^2=0$$

となる。これを b について解けば

$$b=\frac{\sum x_kz_k\cdot\sum y_k^2-\sum y_kz_k\cdot\sum x_ky_k}{\sum x_k^2\cdot\sum y_k^2-\left(\sum x_ky_k\right)^2}=\frac{r_{xz}-r_{yz}\cdot r_{xy}}{1-r_{xy}^2},$$

$$C=\frac{\Sigma x_k^2\cdot\Sigma y_k z_k-\Sigma x_k y_k\cdot\Sigma x_k z_k}{\Sigma x_k^2\cdot\Sigma y_k^2-(\Sigma x_k y_k)^2}=\frac{r_{yz}-r_{xz}\cdot r_{xy}}{1-r_{xy}^2}$$

となる。但し、ここで吾々は

$r_{xy}=\frac{1}{n}\cdot\Sigma x_k y_k,\quad r_{yz}=\frac{1}{n}\cdot\Sigma y_k z_k,\quad r_{zx}=\frac{1}{n}\cdot\Sigma z_k x_k$

と置いたのである。

そこで求めんとする関係式は、

$$\boxed{z=b_{zx\cdot(y)}\cdot x+b_{zy\cdot(x)}\cdot y}$$

によって与えられる。但しx、yの係数は

$$\boxed{b_{zx\cdot(y)}=\frac{r_{zx}-r_{xy}\cdot r_{yz}}{1-r_{xy}^2},\quad b_{zy\cdot(x)}=\frac{r_{yz}-r_{zx}\cdot r_{xy}}{1-r_{xy}^2}}$$

を意味する。

さてこれはx、yの値を先きに与えて~~常数~~と見做した場合の平均的なるzの値を定める公式であり、幾何学的に言えば、x、yに於けるzの回帰平面の方程式である。そして、この場合に、yを暫く不変と見做し、xを単位1だけ増加すれば、zは$b_{zx\cdot(y)}$だけ増加する。またxを暫く不変と見做して、yを単位1だけ増加すれば、zは$b_{zy\cdot(x)}$だけ増加するのである。この二つの係数(b)を部分的回帰係数と呼ぶ。

同様にして、y, z を先きに與へた~~變數と見做した~~場合に、x の平均的な値を求める公式は

$$x = b_{xy.(z)}\cdot y + b_{xz.(y)}\cdot z$$

である。但し

$$b_{xy.(z)} = \frac{r_{xy} - r_{yz}\cdot r_{zx}}{1 - r_{yz}^2}, \quad b_{xz.(y)} = \frac{r_{zx} - r_{xy}\cdot r_{yz}}{1 - r_{zx}^2}$$

とおいたのである。

しかるに、茲で見る通り、$b_{zx.(y)}$ と $b_{xz.(y)}$ とは其の値を異にする。（しかし、分子は両者に共通であり、また分母は共に正数であるから、両者は同じ符号を有する。）由て（本章第三節の公式の一つ $r = \sqrt{b_{y,x}\cdot b_{x,y}}$ に倣ひ）、符号をも共に入れて、

$$\boxed{r_{xz.(y)} = r_{zx.(y)}} = \sqrt{b_{zx.(y)}\cdot b_{xz.(y)}} \boxed{= \frac{r_{zx} - r_{xy}\cdot r_{yz}}{(1 - r_{xy}^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(1 - r_{zx}^2)^{\frac{1}{2}}}}$$

とおく。そして $r_{xz.(y)}$ 即ち $r_{zx.(y)}$ を、「y を不変と見做したる場合に於ける x と z との間の部分的相関係数」と呼ぶのである。

この甚だ技巧的にして積鈍なる、部分的相関係数を用ひた一例を示さう。

イギリスの或る地方で、二十年間に亘って、次の三つのものが年々記録された。春季に於ける雨量(吋)X_t、春季に於て華氏四十二度以上に昇った日の最高温度の和Y_t、一エーカー当りの牧草収穫高(単位、ハンドレッド・ウェート)Z_t。それによれば

$M_x = 4.91$　$\sigma_x = 1.10$　$r_{x,y} = -0.56$

$M_y = 594$　$\sigma_y = 85$　$r_{y,z} = -0.40$

$M_z = 28.02$　$\sigma_z = 4.42$　$r_{z,x} = +0.80$

であった。

~~標準~~標準測定値に直して、

$$x = \frac{X - 4.91}{1.10},\quad y = \frac{Y - 594}{85},\quad z = \frac{Z - 28.02}{4.42}.$$

公式から

$$b_{zx.(y)} = \frac{0.80 - (-0.56)(-0.40)}{1 - (-0.56)^2},\quad b_{zy.(x)} = \frac{-0.40 - (-0.56) \times 0.80}{1 - (-0.56)^2}$$

を得る。之を回帰平面の方程~~公~~式に代入して整理すれば

$$Z = 9.31 + 3.37X + 0.00364Y$$

となる。之れ即ち雨量と温度とによって定められた収穫の平均的な値である。

また公式から

$r_{zx.(y)} = +0.759$, $r_{zy.(x)} = +0.097$, $r_{xy.(z)} = -0.436$

を得る。由て例へば温度を不変と見做したとき、収穫と雨量の間の相関係数は、+0.759である。

この複雑なる部分的相関係数と原の三つの相関係数との関係を、直観的に明瞭にするには、球面三角法の公式を利用するがよい。

半径1なる球面の上に、三つの点X、Y、Zを取り、二点づつ大円の弧で結んで、球面三角形を作る。(但し、弧の長さは皆0とπとの間のものを取る。)Y、Zを結ぶ弧の長さを α_{yz} とし、同様にZ、Xを結ぶ弧、X、Yを結ぶ弧をそれぞれ α_{zx}, α_{xy} とし、頂点Xに於ける角を X とすると、球面三角法によって、

$$\cos\alpha_{yz} = \cos\alpha_{xy}\cdot\cos\alpha_{zx} + \sin\alpha_{xy}\cdot\sin\alpha_{zx}\cdot\cos X$$

なることが知られてゐる。

しかるに相関係数の値は -1 と $+1$ との間にあるから、

$$\cos\alpha_{yz} = r_{yz},\quad \cos\alpha_{xy} = r_{xy},\quad \cos\alpha_{zx} = r_{zx}$$

なるやうに、球面三角形を定めると、

$$\sin\alpha_{xy} = (1-r_{xy}^2)^{\frac{1}{2}},\quad \sin\alpha_{zx} = (1-r_{zx}^2)^{\frac{1}{2}}$$

から、

$$\cos X = \frac{r_{yz} - r_{xy}\cdot r_{zx}}{(1-r_{xy}^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(1-r_{zx}^2)^{\frac{1}{2}}}$$

を得る。由て点Xに於ける頂角の餘弦は、xを不変と見做した場合に於ける yとzとの間の部分的相関係数に等しいことになる。

このことから、部分的相関係数の値が、-1 と $+1$ との間にあることが知られる。

次に、問題を変更して、xおよびyを結合せる一体と見做したとき、これとzとの間の相関を測るには如何にすべきか？

この問題は~~は~~も、普通極めて技巧的に解かれたものとしてゐる。即ちそれは第三節の公式 $r^2 = 1 - s^2_{y.x}$ に類似せる一種の式を求めんとするに帰する。

さきに x、y ~~を自変数と見做し~~ に於ける之の回帰平面を定めたとき、この平面に對する、与へられたる空間のn個の点 $(x_1, y_1, z_1), \dots, (x_n, y_n, z_n)$ の散布度は、

$$S_{z,xy} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum\left[z_k - (b_{zx.(y)}\cdot x_k + b_{zy.(x)}\cdot y_k)\right]^2}$$

によって測られる。之を代数計算によって変形し行けば、遂に

$$(S_{z,xy})^2 = 1 - \frac{r_{zx}^2 + r_{zy}^2 - 2r_{xy}r_{yz}r_{zx}}{1 - r_{xy}^2}$$

に到達する。さて

$$\frac{r_{zx}^2 + r_{zy}^2 - 2r_{xy}r_{yz}r_{zx}}{1 - r_{xy}^2}$$