$r_1 = r_0(1+\alpha)$,　$r_{12} = r_0(1+\alpha)^{12}$.

最後に、$\frac{1+\varphi_1}{1+\varphi_0}$なる比が来る。この比は、循環的変化(偶然的変化を含めた)に属するものであって、明らかに年によって変る。しかし普通の場合にφ_1, φ_0は-0.2%から$+0.2\%$位の範囲にあって、1に比して小なる値であるから、n年間に於ける上の比の平均は、殆んど

$$\frac{1}{n}\Sigma\frac{1+\varphi_1}{1+\varphi_0} = \frac{1}{n}\Sigma[1+(\varphi_1-\varphi_0)] = \frac{1}{n}[n+\Sigma(\varphi_1-\varphi_0)]$$

$$= 1 + \frac{1}{n}\Sigma(\varphi_1-\varphi_0)$$

であり、nが少しく大なるときは、殆んど$\frac{1}{n}\Sigma(\varphi_1-\varphi_0) = 0$と見做し得よう。(若し$\varphi$が偶然的変化を含まず、且つnが循環期の週期に等しい場合には、完全に$\Sigma\varphi_1 = 0$, $\Sigma\varphi_0 = 0$)。それ故に、普通の場合には、比$\frac{1+\varphi_1}{1+\varphi_0}$の平均値を1と見做しても、大差は無いであろう。—以上の所論に於て、若し算術平均の代りに中央値を採るなら、偶然的変化を除く上に、一層好ましいであろう。

さて以上の仮定が許される場合には、n個年に亘る$\frac{x_1}{x_0}$の平均値—之をl_1で表はす—は、

$$l_1 = \frac{1}{n}\Sigma\frac{x_1}{x_0} = \frac{r_1}{r_0}\cdot\frac{1+\varphi_1}{1+\varphi_0}\cdot\frac{1}{n}\Sigma\frac{1+\varphi_1}{1+\varphi_0} = \frac{r_1}{r_0}\cdot\frac{1+\varphi_1}{1+\varphi_0}$$

となる。同様の仮定の下に、$\frac{x_2}{x_1}$の平均値をl_2で表はし、以下之に倣へば、次の結果を得る。

$$l_1 = \frac{r_1}{r_0}\cdot\frac{1+\varphi_1}{1+\varphi_0},\quad l_2 = \frac{r_2}{r_1}\cdot\frac{1+\varphi_2}{1+\varphi_1},\quad \cdots,\quad l_{12} = \frac{r_{12}}{r_{11}}\cdot\frac{1+\varphi_{12}}{1+\varphi_{11}}$$

UTSUYAMA　10×20

No. 61

由て $c_1=l_1,\ c_2=l_1l_2,\ c_3=l_1l_2l_3,\ \ldots$

とおけば $c_{12}=\frac{l_{12}}{l_0}\cancel{\cdot\frac{1+\rho_{12}}{1+\rho_0}}$ （ρは十二個月を周期とする故、$\rho_{12}=\rho_0$）

$=\frac{l_{12}}{l_0}=(1+\alpha)^{12}$.

また $c_i=\frac{l_i}{l_0}\cdot\frac{1+\rho_i}{1+\rho_0}=(1+\alpha)^i\cdot\frac{1+\rho_i}{1+\rho_0}$.

故に $a_i=\frac{c_i}{(1+\alpha)^i}$ とおけば、$a_i=\frac{1+\rho_i}{1+\rho_0}$

となる。由て $i=1,2,\ldots,12$ とし、a_i なる數の十二個月に於ける算術平均をMとすれば

$$M=\frac{1}{12}\sum a_i=\frac{1}{12}\sum\frac{1+\rho_i}{1+\rho_0}=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{1+\rho_0}\sum(1+\rho_i)$$

$$=\frac{1}{12(1+\rho_0)}\left(12+\sum\rho_i\right)$$ （十二個月に就いての ρ_i の平均は零なるが故）

$$=\frac{1}{1+\rho_0}.$$

従て

$$\frac{a_i}{M}=1+\rho_i$$

これ即ち季節指數に外ならぬ。

由て吾々は、上述の假定を許すならば、以上の計算によって、季節指數を求め得ることを學んだのである。

第三節　実際上の計算

これより実際の計算に就いて、少し丁寧に上の方法を叙述しよう。

次の方法では、其等の九年間に就いての平均を求めるのに、算術平均を取らずに、その中央値を採用してゐる。それは偶然的変化をより多く除かんが為めであり、理論的には大差はないのである。

一。各の月（例へば一九二〇年三月）の統計数値を、直ぐ其の前の月（即ち一九二〇年二月）の数値で除し、その商を其の月（即ち一九二〇年三月）の對前月比と呼ぶこととする。（パーソンズは之を link relatives と呼んだ）。吾々は各の月に就いて、その對前月比を作ることを要する。

二。一月の對前月比の度数分布表を作れ（即ち上の比を大きさの順に従て分類する）。同様に、二月のそれ、……、十二月のそれを作れ。

三。各月の對前月比の度数分布表から、各月の對前月比の中央値を求め、之をそれぞれ l_1. l_2. l_3. …… l_{11}. l_{12} とする。これ等の値は、各月の直前の月に對する変動を平均的に表はすものである。

四。併し一定の月を基準とする指数を作らなければ、各月の中央値を其の儘で比較し難いから、例へば十二月を基準の月に取り、十二月の中央値を1と見做して、順々に

$$c_1 = l_1,$$
$$c_2 = c_1 l_2 = l_1 l_2,$$
$$c_3 = c_2 l_3 = l_1 l_2 l_3,$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$
$$c_{11} = c_{10} l_{11} = l_1 l_2 l_3 \cdots l_{10} l_{11}$$
$$c_{12} = c_{11} l_{12} = l_1 l_2 \cdots l_{10} l_{11} l_{12}.$$

なる数 $c_1, c_2, \cdots, c_{11}, c_{12}$ を作る。之を連鎖相對数(chain relatives)と呼ぶ。

五。この最後の数 c_{12} は、一般に、(十二月の中央値として採れる) 1 とはならずに、1 との間に喰違ひを生ずる。この喰違ひは十二個月間に生じたものであるから、何等かの方法で、この喰違を幾分かづつ各月に分配して、調節せねばならない。

パーソンズは此の喰違を、長期的変動傾向に基づく十二個月間の~~増加（或は減少）~~変化を考へた。それで其の長期的変動に基づく毎月の変化率を α とし、前年十二月の中央値を1とし、一月のそれは $(1+\alpha)$, 二月は $(1+\alpha)^2$, ……, 十二

月は $(1+\alpha)^{12}$ と在る。由て

$$(1+\alpha)^{12} = c_{12}.$$

この式から、對數によって、$1+\alpha$ を計算する。そこで修正された連鎖相對數として

一月	二月	三月	……	十一月	十二月
$a_1=\frac{c_1}{1+\alpha}$,	$a_2=\frac{c_2}{(1+\alpha)^2}$,	$a_3=\frac{c_3}{(1+\alpha)^3}$,	……,	$a_{11}=\frac{c_{11}}{(1+\alpha)^{11}}$,	$a_{12}=\frac{c_{12}}{(1+\alpha)^{12}}$ $(=1)$

を採用する。

六。この修正連鎖相對數は十二月を基準としたものであるが、實際上一個年の平均を一〇〇%とする様に調節する方が、より合理的である。由て平均をMとすれば $M=\frac{1}{12}\Sigma a_i$ で、調節した最後の値は

一月	二月	……	十一月	十二月
$S_1=\frac{100a_1}{M}$,	$S_2=\frac{100a_2}{M}$,	……,	$S_{11}=\frac{100a_{11}}{M}$,	$S_{12}=\frac{100a_{12}}{M}$

之を各月の季節指數と稱する。(こゝで S_i は前節の理論に於ける $1+s_i$ を百倍したものである。)

以上の計算は、對數を用ひれば比較的簡単に、實行し得られる。次の表のやうに、この表に於て、$1+\alpha$ は

$$12\log(1+\alpha) = \log c_{12} = \log l_1 l_2 \cdots l_{12}$$
$$= \log l_1 + \log l_2 + \cdots + \log l_{12}$$

として、その對數が与へられる。$1+\alpha$ そのものゝ値

を計算することは、必要である。

月次	中央値	中央値の對數	對數の修正	順々の和	逆對數	季節指數
一月	l_1	$\log l_1$	$\log l_1 - \log(1+d)$	$\log l_1 - \log(1+d)$	a_1	s_1
二月	l_2	$\log l_2$	$\log l_2 - \log(1+d)$	$\log l_1 l_2 - 2\log(1+d)$	a_2	s_2
…	…	…	…	…	…	…
十二月	l_{12}	$\log l_{12}$	$\log l_{12} - \log(1+d)$	$\log l_1 l_2 \cdots l_{12} - 12\log(1+d)$	a_{12}	s_{12}
合計		$\log l_1 l_2 \cdots l_{12}$			Σa_i	
12で割った商		$\log(1+d)$			M	

例へば米国主要鉄道の總收入の季節的変化を求めよう。次の表に於て、收入の単位は十万ドルである。（クラム及びパットンによる。）

年	一月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月
1903	397	356	411	417	413	407	428	441	449	476	438	422
1904	380	377	417	406	407	409	395	435	463	479	471	454
1905	405	374	454	438	449	456	448	484	506	532	521	510
1906	496	465	511	460	499	501	510	541	541	588	557	560
1907	536	496	565	567	592	571	588	609	597	638	574	533
1908	469	426	487	470	458	469	459	525	552	581	550	534
1909	490	467	542	517	519	535	555	600	612	642	638	595
1910	558	538	624	594	594	594	582	568	642	666	650	629
1911	614	567	646	625	648	642	638	688	698	725	685	676
1912	592	620	667	641	666	681	706	765	752	822	769	748
1913	697	655	704	680	724	718	740	779	782	823	750	728
1914	664	596	709	677	675	713	720	761	762	752	678	670

先づ對前月比の表を作る。~~此表では比が百倍されて居る。~~

年	一月/十二月	二月/一月	三月/二月	四月/三月	五月/四月	六月/五月	七月/六月	八月/七月	九月/八月	十月/九月	十一月/十月	十二月/十一月
1903	....	0.90	1.15	1.01	0.99	0.99	1.05	1.03	1.02	1.06	0.92	0.96
1904	0.90	0.99	1.10	0.97	1.00	1.01	0.97	1.10	1.06	1.03	0.98	0.96
1905	0.89	0.92	1.21	0.97	1.02	1.02	0.98	1.08	1.05	1.05	0.97	0.98
1906	0.97	0.94	1.01	0.90	1.08	1.00	1.02	1.06	1.00	1.09	0.95	1.01
1907	0.96	0.93	1.14	1.00	1.04	0.96	1.03	1.04	0.98	1.07	0.90	0.93
1908	0.88	0.91	1.14	0.97	0.98	1.02	0.98	1.14	1.05	1.05	0.95	0.97
1909	0.92	0.95	1.16	0.96	1.00	1.03	1.04	1.08	1.02	1.05	0.99	0.93
1910	0.94	0.96	1.16	0.95	1.00	1.00	0.98	0.98	1.13	1.04	0.98	0.97
1911	0.98	0.92	1.14	0.97	1.04	0.99	0.99	1.08	1.02	1.04	0.95	0.99
1912	0.88	1.05	1.08	0.96	1.04	1.02	1.04	1.08	0.98	1.09	0.94	0.97
1913	0.93	0.94	1.08	0.97	1.06	0.99	1.03	1.05	1.00	1.05	0.91	0.97
1914	0.91	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....

次に對前月比の値を、各月別に、その大さの順に従って分類する。（即ち變數分布表を作る）。

$\frac{一月}{十二月}$ $\frac{二月}{一月}$ $\frac{三月}{二月}$ $\frac{四月}{三月}$ $\frac{五月}{四月}$ $\frac{六月}{五月}$ $\frac{七月}{六月}$ $\frac{八月}{七月}$ $\frac{九月}{八月}$ $\frac{十月}{九月}$ $\frac{十一月}{十月}$ $\frac{十二月}{十一月}$

吾々は此表から、對前月比の値が何に季節によって影響するかを見出し得るのでる。

次にこの表を基として、對前月比の中央値を求める。更に中央値を基として前述の計算形式に従て、季節指數を求めると、次表の如くである。（但し對數の中で、例へば log 0.92 = 9.9638−10 である。）

月	中央値	對數	修正對數	順次の和	逆對數	季節指數 %
January	0.92	9.9638	9.9617	9.9617	0.916	93
February	0.94	9.9731	9.9710	9.9327	0.856	87
March	1.14	0.0569	0.0548	9.9875	0.972	99
April	0.97	9.9868	9.9847	9.9722	0.938	96
May	1.02	0.0086	0.0065	9.9787	0.952	97
June	1.00	0.0000	9.9979	9.9766	0.948	97
July	1.02	0.0086	0.0065	9.9831	0.962	98
August	1.08	0.0334	0.0313	0.0144	1.034	106
September	1.02	0.0086	0.0065	0.0209	1.049	107
October	1.05	0.0212	0.0191	0.0400	1.097	112
November	0.95	9.9777	9.9756	0.0156	1.037	106
December	0.97	9.9868	9.9847	0.0003	1.001	102
合計		50.0255			11.762	
÷12		0.0021			0.980	

表の中では、この10を省いて書いてあることに注意を要する。従て第三欄の和として 50.0255 とあるは、實は 50.0255−50 = 0.0255 を意味するのである）。

注意。その例では、αは極めて小なる値である。實際 $\log(1+\alpha) = 0.0021$ から $1+\alpha = 1.0049$ を得る。從て $(1+\alpha)^{\frac{1}{12}}$ は殆んど $1+\frac{1}{12}\alpha$ に等しい。（本章第二節を見よ）それで此場合は $(1+\alpha)^{\frac{1}{12}}$ を $1+\frac{1}{12}\alpha$ として計算すれば、對數表を用ひずとも、簡單な計算で済ませ得た筈である。

第四節　季節的變化の分離に關する別法

しかしパースンズの方法は計算が可なり面倒なるため、他の諸種の方法が行はれてゐるが、こゝに其の典型的なもの、一つに就いて説明しよう。

吾々は第二章第五節に於て、時系列を

$$y = \xi(t) + \eta(t) + \zeta(t) \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

と置いた。こゝに $\zeta(t)$ は循環的變動と偶然的變動との合成を表はす。そして吾々は季節的變化 $\eta(t)$ の週期性を入れ、且つ長期的變動 $\xi(t)$ が直線 $A+Bt$ であるとの假定の下に、十二個月づつの移動平均によって、$\eta(t)$ を除き去り、

$$y' = \xi(t) + \zeta(t) \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$

を得たのであった。

No. 68

さて(1)と(2)とから、

$$\frac{y}{y'}=\frac{\eta(t)+F(t)+\Psi(t)}{\eta(t)+\Psi'(t)}=\frac{1+\frac{F(t)}{\eta(t)}+\frac{\Psi(t)}{\eta(t)}}{1+\frac{\Psi'(t)}{\eta(t)}}$$

しかる実際問題に於ては、$\Psi'(t)$は$\eta(t)$に比べて、その値(絶対値に於て)甚だ小なることを普通とするのみならず、$F(t)$, $\Psi(t)$も$\eta(t)$に比して小である。由て近似的に

$$\frac{y}{y'}=1+\frac{F(t)}{\eta(t)}+\frac{\Psi(t)-\Psi'(t)}{\eta(t)}\cdots\cdots(3)$$

と書くことが出来る。

今或る年の一つの月(例へば二月)を中心とし、前後n個年の同じ月次(二月)のみについて、$\frac{y}{y'}$の平均を採り、この平均値を與へられた中央の二月の値に置き換へよう。然らば、この平均によって、左辺の$\frac{\Psi(t)-\Psi'(t)}{\eta(t)}$は殆んど零に近づくと見做し得られよう。(この推論は、循環的変動の性質から考へて言へよう。)~~嚴密は殆んど不可能かも知れないが。~~

さて吾々はこの平均として、特に中央値を選んだとする。$F(t)$の周期性から、その二月に於ける値は、上の平均(中央値)を取ることによって、不変に止まる。

また $\frac{P_{(t)}}{\bar{P}_{(t)}}$ 即ち $\frac{P_{(t)}}{\Sigma P_{(t)}/12}$ の値も、中央値を取ることによって不変に止まる。なぜなら、この分数値は(の増大)もと共に、順々に、増大するか又は減小するか、或はその一方であるから。

それなのに、斯様な中央値を取ることによって、吾々は近似的に

$\frac{P_{(t)}}{\bar{P}_{(t)}}$ の平均 $= 1 + \frac{P_{(t)}}{\bar{P}_{(t)}}$ ……(十)

を得る。しかるにこの左辺は、本章第一節に於て $1+e_{(t)}$ と書かれたものであって、実に季節指数に外ならないのである。(形式的には)

私は前に「形式的には」と述べた。なぜなら、吾々は、$P_{(t)}$ が周期性を有することから出発を始めたのであるから、斯様にして定められた(形式的)季節指数は、年によって変化するからである。

ツメル

この困難を避けるための、ジョルダンの方法に於ては、~~理論上季節指数~~式(3)に於て、突然 $P_{(t)}$ の周期性を否定し、却って $\frac{P_{(t)}}{\bar{P}_{(t)}} = 1+e_{(t)}$ の周期性*を仮定せんとするものの如くである。即ちジョルダンは

各月の並びを数年に亙って計算し、各月の並びの中央値を（月次に依って別々に）求め、之を以て季節指数に採用したのであった**。

*若し最初から $\varphi(t)$ の週期性を認めて、$y = \tau(t) + \tau(t)\cdot\varphi(t) + \cdots$ とおけば、十二個月移動平均に依って、$\tau(t)\cdot\varphi(t)$ の項を除き得べからざることは、既に本章第二節に於て説明した所である。

**小林新氏『経済統計学』、二八八頁を見よ。

以上の外に、簡単な長期的変動または季節的変動を求める、種々の実際案が行はれているが、それ等を明瞭に、解析的に説明することは、却って困難なものが多いやうに私には考へられるから、それ等は總て他日の研究に讓ることにした。

第五節　修正時系列

さて長期的変動傾向と季節指数とを知った上で、長期的変動と季節的変動とを、時系列の中から除去することを要する。

吾々は既に本章第一節に於て、循環的変動(偶然的変動をも含めて)を測るに

$$c = \frac{y - z(1+s)}{z(1+s)}$$

即ち

$$\frac{y}{z(1+s)} - 1$$

を以てした。この函数は、時系列の中から、長期的変動と季節的変動とを除去したものと考へられるから、之を修正時系列と呼ぶ。

若し本章第三節に於て示した様に、$1+s$ の代りに、季節指数として $s\%$ を用いるならば、s を先ず百分比に直しておく方が便利である。即ち

ゴチ　循環時系列の縦軸 $= \dfrac{\frac{y}{z}\%}{s\%} - 1$.

ウメル

また実際普通の場合には、s の値は大抵 -0.5 から $+0.5$ までの間にあるから、

$$\frac{y - z(1+s)}{z(1+s)}$$

の代りに、

$$\frac{y - z(1+s)}{z}$$

を用いる。

即ち

$$\frac{y}{z} - (1+s)$$

或は

ゴチ　$\frac{y}{z}\% - s\%$

6

を用いてする、大差はないのである。それで、普通は、この最後の形を、「季節変動によって修正せる長期変動傾向からの百分比偏差」と呼んで、之を修正時系列の意味に使用する人が多いのである。

例へば、前例米国鉄道總收入の修正時系列をもとめよう。先づ与へられた時系列の表から、長期変動傾向を直線と見做し、最小自乗法によって、その値~~a~~とcを定めると

$$\tilde{y}=543.25(1+0.00454t)\quad(原点1907年12月)$$

を得る。（かくして定められた0.00454と、上にもとめたα=0.00454とが、近い値なることに注意せよ）。その表から計算によってもとめられた$\tilde{y}$の値の一部分が次の表の第三欄に載せられてある。また第四欄は$y/\tilde{y}$の百分比、第五欄は（第三節の方法）で計算した季節指数（百分比）、第六欄は修正時系列

年月	總收入（単位十万ドル）y	長期傾向 $\tilde{y}$	$y/\tilde{y}$ (%)	s (%)	$y/\tilde{y}-s$ (%)	循環
1908 一月 Jan.	469	545.7	86	93	−7	−1.2
二月 Feb.	426	548.1	78	87	−9	−1.5
三月 Mar.	487	550.6	88	99	−11	−1.8
四月 Apr.	470	553.0	85	96	−11	−1.8
五月 May	458	555.5	82	97	−15	−2.5
六月 June	469	557.9	84	97	−13	−2.2
七月 July	459	560.4	82	98	−16	−2.7
八月 Aug.	525	562.9	93	106	−13	−2.2
九月 Sept.	552	555.3	98	107	−9	−1.5
十月 Oct.	581	567.8	102	112	−10	−1.7
十一月 Nov.	550	570.2	96	106	−10	−1.7
十二月 Dec.	534	572.7	93	102	−9	−1.5
1909 一月 Jan.	490	575.1	85	93	−8	−1.3
二月 Feb.	467	577.6	81	87	−6	−1.0
三月 Mar.	542	580.0	93	99	−6	−1.0
四月 Apr.	517	582.5	89	96	−7	−1.2

No.

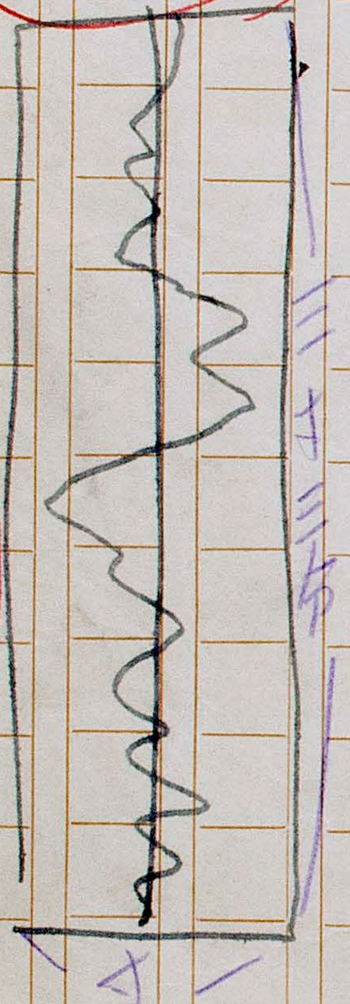
を示したものである。

尚ほ読者の参考のため、全部に亘れる季節(百分比)を、こゝに掲げておく。

年	一月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月
1903	100	89	102	103	101	99	104	106	107	112	104	99
1904	89	88	96	93	93	93	89	98	103	106	104	100
1905	89	81	98	94	96	97	95	102	106	111	108	105
1906	102	95	104	93	100	100	102	107	107	116	109	109
1907	104	96	108	108	112	108	111	114	111	118	106	98
1908	86	78	88	85	82	84	82	93	98	102	96	93
1909	85	81	93	89	89	91	94	101	108	107	106	99
1910	92	89	102	97	97	96	94	91	103	106	103	100
1911	97	89	101	97	101	99	98	106	107	111	104	102
1912	89	93	100	96	99	101	104	112	110	120	112	108
1913	101	94	101	97	103	102	105	110	110	115	105	101
1914	92	82	97	93	92	97	98	103	103	101	91	89

次表は全部に亘れる修正せる系列ゼーロ(百分比)で、第 年図はそのグラフである。

年	一月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月
1903	7	2	3	7	4	2	6	0	0	0	−2	−3
1904	−4	1	−3	−3	−4	−4	−9	−8	−4	−6	−2	−2
1905	−4	−6	−1	−2	−1	0	−3	−4	−1	−1	2	3
1906	9	8	5	−3	3	3	4	1	0	4	3	7
1907	11	9	9	12	15	11	13	8	4	6	0	−4
1908	−7	−9	−11	−11	−15	−13	−16	−13	−9	−10	−10	−9
1909	−8	−6	−6	−7	−8	−6	−4	−5	−4	−5	0	−3
1910	−1	2	3	1	0	−1	−4	−15	−4	−6	−3	−2
1911	4	2	2	1	4	2	0	0	0	−1	−2	0
1912	−4	6	1	0	2	4	6	6	3	8	6	6
1913	8	7	2	1	6	5	7	4	3	3	−1	−1



第14図

6

UTSUYAMA

10×20

さて斯くして作られた修正时系列は、循環的変化の外に、不規則な変化をも含んでゐる。統計学者の大多数の人々は、循環的変化から偶然的な要因による不規則変化を、これ以上分離し得ないと考へ、この二種の変化の結合した全体のもの、それ自身を循環的変化として、取扱ふのが普通である。しかし循環的変化に對しては全く異つた解釋の仕方もある。それについては第六章を読まれたい。

第六節 修正时系列の比較

二つの循環的変化を比較するには、その二つのグラフを比較する方が宜しい。(横線は月で追はれた时間を表はしてゐる)。

一。二つの循環的変化の振幅(振動の幅)そのものを比較したいならば、縦線として、修正时系列(百分比)そのものを用ふるがよい。第六図は、上述の米国の鉄道總收入と、ブラッドストリートの物價指數を、共に修正时系列として比較したものである。(ブラッドストリートの物價指