即ち相接続する奇数箇の時点（簡単のために五点として説明しよう）に~~[illegible]~~就いて、二次式

$y = A+Bt+Ct^2$ を~~取る~~選ぶに、

$$\Sigma[y_i-(A+Bt_i+Ct_i^2)]^2 = \text{最小}$$

なるやうに、係数 a, b, c を取る。斯様にして定められた二次式が、與へられた時間の中央の点で取る値を以て、その点に相應する長期変動傾向の値と見做すのである。

今上と同様にして、五点（個の時）の中央を t_i として、$u = t - t_i$ とし、$y = a + bu + cu^2$ に於て、

$$\Sigma[y_i-(a+bu_i+cu_i^2)]^2 = \text{最小}$$

とすれば、

$\Sigma u_i = 0$, $\Sigma u_i^3 = 0$,

$\Sigma u_i^2 = 0^2+2\times1^2+2\times2^2 = 10$, $\Sigma u_i^4 = 0^4+2\times1^4+2\times2^4 = 34$

で、且つ第二節から

$5a + c\Sigma u_i^2 = \Sigma y_i$, $a\Sigma u_i^2 + c\Sigma u_i^4 = \Sigma u_i^2 y_i$

となる故、

$$a = \frac{\Sigma u_i^4\cdot\Sigma y_i - \Sigma u_i^2 y_i\cdot\Sigma u_i^2}{5\Sigma u_i^4-(\Sigma u_i^2)^2}$$

即ち $a = \frac{1}{70}[34\Sigma y_i - 10(4y_{-2}+y_{-1}+y_1+4y_2)]$

このaの値が即ち時の基点 $u=0$（元の五時点の中央 t_i）に~~[illegible]~~於ける長期変動傾向の値で

ある。言ひ換へれば、二次的移動平均とは、y_i の代りに、一種の平均値

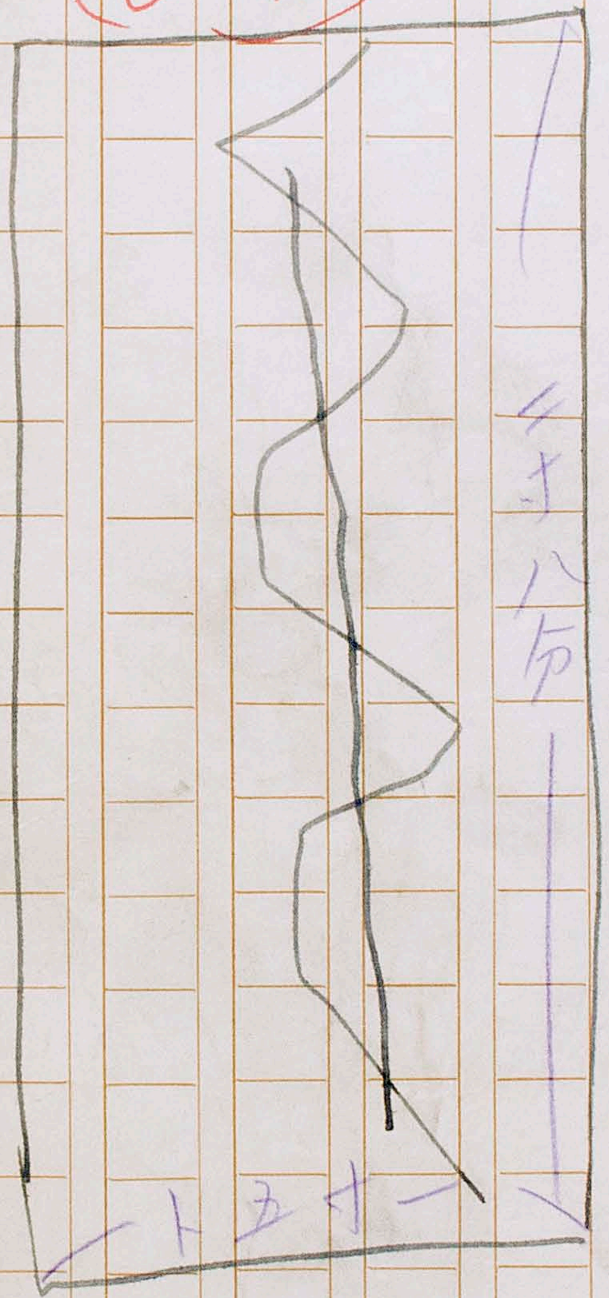
$$\frac{1}{35}\left[17y_i+12(y_{i-1}+y_{i+1})-3(y_{i-2}+y_{i+2})\right]$$

を採りつゝ、移動する方法である。

例、さきに本章第一節の終で取扱った生卵の價格について、一次的移動平均の例を示さう。次表に於ては、三個月づつの移動平均と、十二個月づつの移動平均が示されてゐる。十二は偶數であるから、十二個月の移動平均は、その中心の月を定めるに一寸都合が悪い。それで茲では、

年月	生卵1ダースの價格(仙)	三個月 和	三個月 平均	十二個月 和	十二個月 平均
1917					
Jan. 一月	55				
Feb. 二月	51	141	47		
Mar. 三月	35	125	42		
Apr. 四月	39	114	38		
May 五月	40	120	40		
June 六月	41	123	41		
July 七月	42	129	43	579	48
Aug. 八月	46	141	47	591	49
Sept. 九月	53	154	51	603	50
Oct. 十月	55	166	55	612	51
Nov. 十一月	58	177	59	616	51
Dec. 十二月	64	189	63	618	52
1918					
Jan. 一月	67	194	65	620	52
Feb. 二月	63	174	58	627	52
Mar. 三月	44	150	50	635	53
Apr. 四月	43	129	43	641	53
May 五月	42	128	43	650	54
June 六月	43	134	45	666	56
July 七月	49	146	49	683	57
Aug. 八月	54	162	54	691	58
Sept. 九月	59	177	59	679	57
Oct. 十月	64	197	66	683	57
Nov. 十一月	74	219	73	689	57
Dec. 十二月	81	230	77	700	58
1919					
Jan. 一月	75	207	69	711	59
Feb. 二月	51	174	58	719	60
Mar. 三月	48	148	49	725	60
Apr. 四月	49	150	50	729	61
May 五月	53	156	52	737	61
June 六月	54	164	55	744	62
July 七月	57	171	57	753	63
Aug. 八月	60	180	60		
Sept. 九月	63	195	65		
Oct. 十月	72	216	72		
Nov. 十一月	81	243	81		
Dec. 十二月	90				

或る月の移動平均の値は、その月と、それ以前の六個月と、それ以後の五個月の値の和の平均を見做して計算されてゐる。（即ち忠の月は平均の七個月目に取られて



第11図　本線は十二個月移動平均。第十図と比較せよ。

ゐる。

第11図は十二個月移動平均のグラフであるが、それは平滑にされた曲線であり、且つ甚だ直線に近いことを見る。

第4図と比較するなら、読者はこの移動平均が、最小自乗法によって得られた直線と、殆んど同一の縦線を有することを見出すであらう。（之れに反して、三個月移動平均は、甚だしい凹凸があって、十分に平滑化されてゐない。）

かくてこの特殊の例に於ては、十二個月移動平均によって、大体に於て、長期的変動傾向が分離されたと云へよう。

第五節　移動平均による長期的変動の分離。

これより長期的変動の分離に、移動平均を使用する一般的方法に就いて語りたい。問題を簡単にするために、吾々は一次的（即ち直線的）移動平均に限ることとする。

さて季節的変化、~~周期的~~循環的変化及び偶発的変化とは、元来何を意味するのか？　それ等の諸変動の特色を明らかにして、或る程度まで、その性質を予め規定するにあらざれば、吾々の研究は結局無意義のものに終るであろう。

吾々は先づ最も素朴的に

時系列　長期変動　季節変動　循環変動　偶発変動

$$y = \eta(t) + F(t) + \Psi(t) + \Phi(t) \quad \cdots\cdots (1)$$

と假定しよう。こゝに t は個月を単位として測られた時間を示してある。

次に、季節的変動を表はす函数 $F(t)$ は、十二個月を週期とする函数である上に、十二個月を通じての算術平均値は零である、と假定しよう。即ち数式で書けば

$$F(t+12) = F(t), \quad \sum_{t=1}^{12} F(t) = 0.$$

〔かゝる函数の簡単なる一例は、単弦振動

$$F(t) = a \cdot \sin \frac{2\pi}{12}t + b \cdot \cos \frac{2\pi}{12}t = R \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{12}t + \varepsilon\right)$$

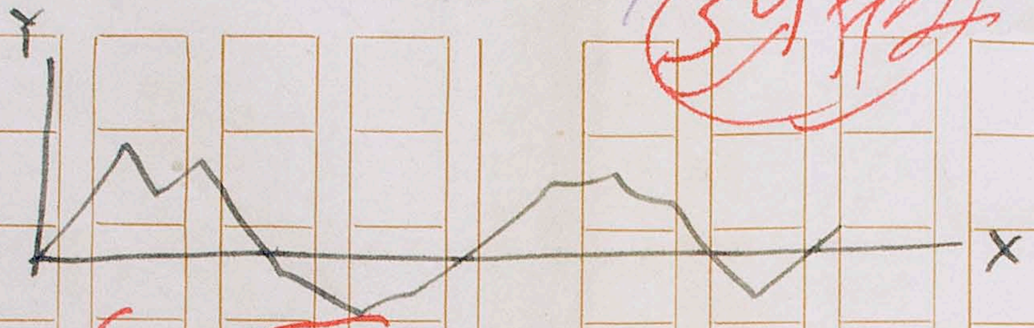
但し $a = R\cos\varepsilon$, $b = R\sin\varepsilon$ 〔$R = \sqrt{a^2+b^2}$, $\tan\varepsilon = \frac{b}{a}$〕

である。こゝに R は振幅、ε は位相と呼ばれる。〕

次に、循環的変動が、p 年なるたゞ一つの週期（*）（p は 1 より大なる整数）を有すると假定すれば、それを表はす函数 $\varphi(t)$ は、

$$\varphi(t + 12p) = \varphi(t), \quad \sum_{t=1}^{12p} \varphi(t) = 0.$$

なる性質を有する。



第12図 8を週期とする一つの函数

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	....
Y	0	3	1	2	-1	-2	-2	-1	0	3	1	....

* 八年の週期と三十三年の週期とを有つ最も簡単なる循環的変動の一つは、$a \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{12\times 8}t\right) + b \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{12\times 33}t\right)$ の如きものである。（この用語は、純粋数学に所謂二つの週期を有する函数とは、その意義を異にする。）

偶然的変動 $\Theta(t)$ に就いては、一般的には、何等の規定をも、茲には與へ得ない。たゞその各個月または数年間に就いての平均値——特に中央値——は、偶然的変動を弱めて、零に近い値を取らしめることを、注意しよう。

最後に、これまで吾々は別に、長期的変動傾向〜(t)に就て、何等の假定を設けなかった。今や(一次的)移動平均によって、長期的変動を分離せんとするに臨[redacted]んで、こゝに次の假定を設けよう。曰く

長期的変動〜(t)は、それについて一次式(即ち直線的)であると。

以上の諸假定のもとに、時系列について、十二個月づつの(一次的——以[redacted]後この語を省く)移動平均を取ると、如何なる結果を得るか。

先づ、この移動平均によって、それに就いての一次式、従て長期的変動の値は、不変に止まること、明かである(第四節)。但し念のため、十二個月移動平均について、少し詳しく説明しておく方が宜しいかと思ふ。元来、純理論的に——実際上の取扱いと無関係に——言へば、十二個月づつの移動平均[redacted]を、〜(t)に就いて行ふとは、例へばi月(iは一、二、……、十二の中の任意の一つの数)に於ける函数値〜(i)を、iを中心とする十二個月の函数値の平均、即ち

$\frac{1}{12}\left[x(i-\frac{11}{2})+x(i-\frac{9}{2})+\cdots+x(i-\frac{1}{2})+x(i+\frac{1}{2})+x(i+\frac{3}{2})+\cdots+x(i+\frac{11}{2})\right]$

で置換へることであった。併し、これは実際上取扱ひ得ない（又は取扱ひ難い）のであるから、その代りに、――第四節末の例で見た如く、

$\frac{1}{12}\left[x(i-6)+x(i-5)+\cdots+x(i-1)+x(i)+x(i+1)+\cdots+x(i+5)\right]$

を用ひるか、または

$\frac{1}{12}\left[x(i-5)+x(i-4)+\cdots+x(i-1)+x(i)+x(i+1)+\cdots+x(i+6)\right]$

を用ひるか、その他

$\frac{1}{12}\left[x(i-5)+x(i-4)+\cdots+x(i-1)+2\cdot x(i)+x(i+1)+\cdots+x(i+5)\right]$

等々の方法を用ひるのである。

今 $x(t)=A+Bt$（A、Bは定数）に就いて、上の四つの計算を行へば、夫々

$A+Bi$,　$A+Bi-\frac{1}{2}$,　$A+Bi+\frac{1}{2}$,　$A+Bi$

となる。（それで、この場合には第四の方法を使用するが、或は最も合理的であらう。）

注意。斯様な理論的研究上、大体の結果を見るには、和の代りに積分を用ひる方が早い。上の例では

$\frac{1}{12}\int_{i-6}^{i+6}(A+Bt)\,dt=\frac{1}{12}\left[At+\frac{1}{2}Bt^2\right]_{i-6}^{i+6}$

$=A+Bi$.

次に、季節的変動は、十二個移動平均によって、完全に除き去られる。なぜなら、連続する十二個月に亘る季節的変化 $\overline{F}(t)$ の和は零であるから。（数式で書けば $\sum\limits_{i-6}^{i+6} M\overline{F}(t)=0$ となる。）

循環的変動は、大体に於て、週期と位相には影響少なく、その振幅は平均によって弱められる。何故なら、

今循環的変動の上に及ぼす十二個移動平均の影響を推察するために、循環的変動を最も簡単な（併しながら代表的な）形にとって、

$$\varphi(t) = \sin\frac{2\pi}{12p}t$$

とおこう。iなる月に相当する十二個月移動平均の値は、近似的に

$$\frac{1}{12}\int_{i-6}^{i+6}\varphi(t)\,dt = \frac{1}{12}\int_{i-6}^{i+6}\sin\frac{2\pi}{12p}t\,dt = \frac{\sin\frac{\pi}{p}}{\frac{\pi}{p}}\cdot\sin\frac{2\pi}{12p}i$$

となる。そして $\sin\frac{\pi}{p}$ と $\frac{\pi}{p}$ との比は、1より大きくないから、（次表参照）循環的変動の振幅は、上の比だけ弱められる。（尚ほ此の比の値に就いて

p	$\dfrac{\sin\frac{\pi}{p}}{\frac{\pi}{p}}$
3	0.83
6	0.95
10	0.98
36	1.00

は、第28図（第六章第二節）と比較せよ。）

併し循環的変動の週期と位相とは、十二個月移動平均によって、不変に止まるのである。

~~$\frac{2\pi}{12}t$ $\frac{2\pi}{12}\int \sin\left(\frac{2\pi}{12}t\right)dt = -\cos\frac{2\pi}{12}t$ $\int \sin x\,dx = -\cos x$ $\sin\left(\frac{2\pi}{12p}t\right)$ となる。~~

ツメル

最後に、~~循環的変化~~偶然的変化については、簡単明瞭なる結果を得ることは不可能ではあるが、併し移動平均によって変化の程度が弱められ、幾分平~~増大なることは、明瞭であるが~~均的に零に近づくことは、言へるであらう。

それで、以上の仮定の下に於ては、十二個月づつの一次的移動平均~~値~~を取れば、季節的変動を除き去って、長期的変動と弱められた他の変動との結合を得ることになる。この結果を

$$y_i = (A + Bt) + \varphi'(t) + \theta'(t) \quad \cdots\cdots (2)$$

で表はさう。

一行ヒラク

更に、進んで長期的変動のみを分離するために、一年を時~~の~~間単位に取り、$12t =$ 月 と書けば、

$y' = (A + B'T) + \varphi'(T) + \phi'(T)$ (3)

となる。こゝに $B' = \frac{B}{12}$，$\varphi'(t) = \varphi'(T)$，$\Phi'(t) = \phi'(T)$ と置いたのである。（実際問題として、(2) から (3) に移るには、各々の年に就いて年平均即ち十二個月平均を取るべきである）。

さて、若し循環的変動の週期 p が既知の値であるならば、p 個年づつの（一次的）移動平均をもとめる。この場合に $A + B'T$ は T に就いての一次式である。次に連続する p 年に於ける $\varphi'(T)$ の和は零となる —— 上述の $\varphi(t)$ の性質を回想せよ —— と見做して、大差はないであろう。

~~*勿論、厳密に言へば、$\varphi(t)$ が有する p 年なる週期は、上述の計算即ち十二個月移動平均の実行によって、変化を受けるかも知れない。但し斯様な影響を研究することは、$\varphi(t)$ の上に尚ほ制限を加へざる限り、困難なことであるから、こゝでは此問題に触れないで置く。~~

それで、移動平均の結果、(3) は次の如くになる。

$y'' = (A + B'T) + \varphi''(T)$.

而も偶然的変動は平均の結果として、$\varphi''(T)$ の値を蓋々零に近づかしめるであらう。そ

れ故に、吾々は、大体に於て、

$$y'' = A + B'T = A + Bt$$

なるを見出す。即ち長期的変動傾向は、殆んど完全に分離されたのである。

しかし実際に於ては、一般的に言へば吾々は未だ周期pを知らないのであるから、こゝに述べた通りの、p年づつの移動平均は、事実上実行し得ないのである。それ故実際問題に臨んでは、数個年に亘る移動平均を求めてそれによって、満足するの外はないのである。

以上の方法は、計算が比較的簡単であるから、長期的変動を求める上に、実際屡々利用されてゐる。

此方法は、長期的変動傾向が直線的なるその假定の上に立つ。若しその假定を距ること遠いならば、上の結果はまた修正を要することとなる。*

* 例へば、$\frac{1}{12}\int_{t-6}^{t+6} t^2 dt = t^2 + 12$ となるから、長期的変動傾向として、$\eta = A + Bt + Ct^2$ と採れば、結果として、近似的に、$y'' = (A + Bt + Ct^2) + 12C$ となるを見るであらう。同様に、$\eta = A(1+\alpha)^t$ と採れば、近似的に $y'' = A(1+\alpha)^t \cdot \frac{(1+\alpha)^6 - (1+\alpha)^{-6}}{12 \log(1+\alpha)}$ となる。若しαの絶対値が小さくして、αに對してα^2を無視し得る場合には、$y'' = A(1+\alpha)^t = \eta$ となる。

6

参考書目 6ポ2リ 一行アキ

Running, Empirical formulas. New York.

Lipka, Graphical and mechanical computation. New York.

その他第一章末の邦文の書。

第三章　季節的変動

第一節　季節指数、正常態

吾々はこれより季節的変動の分離の問題を取扱はんとする。それに先だち、季節的変動の意義に就いて再考しよう。

暫く循環的変動と偶然的変化とを考への外に置けば、吾々は曩きに第二章第五節に於て、

$$\underset{\text{時系列}}{y} = \underset{\text{長期変動}}{\tau(t)} + \underset{\text{季節変動}}{F(t)}$$

と見做し、而して季節的変動の~~周期性~~性質として

$$F(t+12) = F(t), \quad \sum_{i=1}^{12} F(i) = 0$$

なることを考へたのであった。

しかるに多数の経済統計学者は、季節的変動なるものを、上のやうには解釈しないのである。彼等に従へば、季節的変動なるものは、長期的変動傾向の値が大なる（小なる）とき、大きく（小さく）なる（絶対値に於て）。従て季節的変動は、季節によって変るのみならず、また年によって変るのである。されば季節的変動それ自身を考へるよりも、それと長期的変動との相対比を考ふべきである。

なぜなら（$\dfrac{\Phi(t)}{\xi(t)}$ こそ、寧ろ、「年によっては不変であって、ただ季節のみによって変化する値」に近いものであらうから。

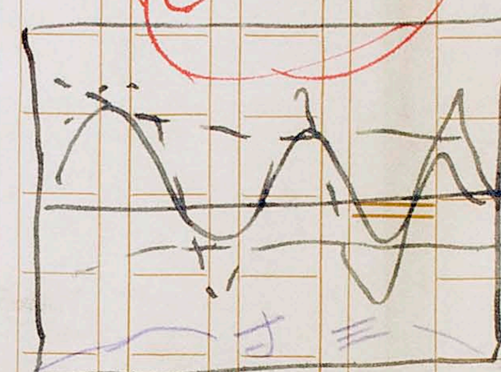
彼等は、かくして此 $\dfrac{\Phi(t)}{\xi(t)}$ ［$=\varphi(t)$ と置かう］の上に、基本的性質

$$\varphi(t+12)=\varphi(t),$$

$$\sum_{i=1}^{12}\varphi(i)=0$$

を附與する。（従て、その結果として、$\Phi(t)$ 自身は、かやう性質を持たないこととなるのである。（第13図を参照せよ。）以上の定義によって、吾々は

モジ小活



第13図

$y=e^{-t}\cdot\cos 2\pi t.$

この図に於ける此の函数を本文の $F(t)$ と思ひ、e^{-t} を $\xi(t)$, $\cos 2\pi t$ を $\varphi(t)$ と考へよ。但し周期は 1 である。

$$y=\xi(t)+\xi(t)\cdot\varphi(t)=\xi(t)\cdot[1+\varphi(t)]$$

を得る。ここに $1+\varphi(t)$ は、「年によっては不変であって、ただ季節のみによって変化する値」である。——それは $\varphi(t+12)=\varphi(t)$ なる式から直ぐ導かれる。——由て $1+\varphi(t)$ を季節指数と呼ぶ。（後に、本章第三節では、之に少し加工したものを、季節指数と呼んでゐる。）

かくて各月に於ける長期的変動傾向と其の季節的指数との積 $\xi(1+\varphi)$ は、「季節指数によって調節された長期的変動傾向」であって、循環的変動（及び偶然的変動）を除いた場合に於

けるＹ「時系列yの平常なる状態」であると考へ得る。この意味に於て、$\tilde{y}(1+\gamma)$ を時系列の「正常態」と称する。

さて循環的変化——本章に於ては、それより以後、特筆せざる限り、この語の中に、偶然的変化をも含めて呼ぶこととしよう——を考察に入れれば、

循環的変化 $= y -$ 正常態

となる。併し季節的変動について行つたと同様の見地から、この儘で循環的変化を測るよりも、その正常態に対する比

$$\frac{\text{循環的変化}}{\text{正常態}} = \frac{y-\tilde{y}(1+\gamma)}{\tilde{y}(1+\gamma)}$$

を以てする方がより至当であると考へられる。今この比は Ψ で表はせば

$$\Psi = \frac{y-\tilde{y}(1+\gamma)}{\tilde{y}(1+\gamma)}.$$

由て

$$y = \tilde{y}(1+\gamma)(1+\Psi)$$

を得る。これは上の規定から、Ψ は周期を有する循環的変動と偶然的変動との結合である。

斯様に γ、Ψ の意味を限定してから、吾々は季節的変化の分離即ち γ の決定の問題に移らう。

第二節 連鎖相対法の理論

前節に於て見たる如く、時系列は次の形を取ると考へよう。

$$y = \xi(t) + \xi(t)\cdot\varphi(t) + \xi(t)\cdot[1+\varphi(t)]\cdot\psi(t)$$

この場合には、たとひ長期的変動傾向 $\xi(t)$ が直線的であるとして、それを決定するには最小自乗法によるを可なりとする。若しこの場合に、十二個月移動平均の方法(第二章第五節)を用いるなら、一次では餘り效がない。二次用いて效が顯れて来るのであるから、甚だ不便であらう。

何故なら、十二個月移動平均を用いたとせよ。計算の簡單のために、

$$\varphi(t) = \sin\frac{2\pi}{12}t$$

(これは上の條件を満足する二の函数)と取れば、季節的変動即ち

$$\xi(t)\cdot\varphi(t) = (A+Bt)\sin\frac{2\pi}{12}t$$

は、十二個月移動平均によって、除去し得られないことを証明されるから。即ち便利のために、和の代りに、それと大差ない積分を用いて計算すると、a なる月に於ける季節的変動の移動平均は、近似的に

$$\frac{1}{12}\int_{a-6}^{a+6}(A+Bt)\sin\left(\frac{2\pi}{12}t\right)dt = \frac{12}{2\pi}B\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{12}a\right)$$

となって、零にはならない。これを除去するためには、今一回、十二個月移動平均を取るを要する。$\cos\frac{2\pi}{12}a$ は、十二個月変動平均によって、略ぼ零となる。

6

No. 58

これより以後の研究に於ては、少くも理論的には、長期変動傾向が指数函数即ち

$$z_t = A\cdot r^t$$

（A, r は定数）、〔第二章第三節参照〕なる形を取る場合に、最も好都合なのである。併し若しrが極めて1に近い値ならば、指数函数は殆んど直線と見做して差支ないのである。例へば

t	1	6	12	50	100
$(1+0.005)^t$	1.005	1.030	1.062	1.283	1.647
$1+0.005t$	1.005	1.030	1.060	1.250	1.500

一行ヒラク

以上の準備の後に季節指数の決定の問題に移らう。

今或る一年の月次を i で表はし（$i=1,2,3,\dots,12$）、その前年の十二月を假りに0で表はすことゝする。その年の十二個月に於ける時系列は

$$y_i = z_i(1+\rho_i)(1+\psi_i) \qquad (i=1,2,\dots,12)$$

であるから、

$$\frac{y_1}{y_0} = \frac{z_1}{z_0}\cdot\frac{1+\rho_1}{1+\rho_0}\cdot\frac{1+\psi_1}{1+\psi_0},$$

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1}\cdot\frac{1+\rho_2}{1+\rho_1}\cdot\frac{1+\psi_2}{1+\psi_1},$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{y_{12}}{y_{11}} = \frac{z_{12}}{z_{11}}\cdot\frac{1+\rho_{12}}{1+\rho_{11}}\cdot\frac{1+\psi_{12}}{1+\psi_{11}}.$$

となる。吾々は或る一年間に就いて、

$\frac{y_1}{y_0}, \frac{y_2}{y_1}, \ldots\ldots, \frac{y_{12}}{y_{11}}$

を考へたが、数年間に亘って、同様の比を作って見る。その場合に、$\frac{y_1}{y_0}$ の平均（例へば、年々に就いて取った）は何を意味するであらうか。

$\frac{y_1}{y_0}$ の数年間の平均とは、三つの比の乗積

$\frac{t_1}{t_0} \cdot \frac{1+g_1}{1+g_0} \cdot \frac{1+s_1}{1+s_0}$

の数年間の平均である。しかるに季節指数の定義により、$\frac{1+s_1}{1+s_0}$ は年によって変化することがない。――吾々はさう言ふやうに、季節指数の意味を定めたのであった。次に $\frac{t_1}{t_0}$ なる比は如何。若し長期的変動傾向が、毎月幾何級数的に一定の比によって変化するものならば、$\frac{t_1}{t_0}$ は年によって変ることがない。吾々は今後はかやうな場合のみ、即ち長期的変動傾向が、指数曲線（$t = A\alpha^{t}$）の形を取る場合のみに就いて考へよう。即ち此場合には長期的変動傾向は複利的に変化するから、