となる。

またnが偶数の場合には、tの値が……、$-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}, \ldots\ldots$ となって、分数の計算を要するから、この不便を除くために、$t' = 2t$ 即ち $t = \frac{t'}{2}$ とおけば、$t' = \ldots, -3, -1, +1, +3, \ldots$ となり、$b = \frac{\sum t'y}{\sum t'^2}$ となる。

係数aは中央縦線と呼ばれる。それはtが零なるときのyの値、即ち時系列の時の中央に於ける長期傾向の値である。またbは増加率と呼ばれる。それはtが一単位増加するときに生ずる、長期傾向の増加を示す。

6

例へば米国に於て一九一七年から一九一九年の鶏卵一ダースの価格(単位セント)は、表の如くであった。その価格の長期的変動傾向を求めよう。一九一八年七月を時の基準とし、一個月を時の単位に採る。(実際は三十六個月あるから $n=36$ であるが、計算を簡単にするために、一九一七年一月を省いて、$n=35$ とした。その省略は、長期傾向の上には、殆んど影響を與へないであらう。)その場合には

經濟學全集二十冊い印

經濟學全集二十册い印

この表一頁ニ収める

6号または七号

印刷の都合上、表の位置、前後の文章を少し変えてもよし

第五図に於て見る如く、長期的変動は殆んど直線的であると擬定される。由て上述の計算を行つて、

年	月	鶏卵一ダースの価(仙) y_i	時 t_i	t_iy_i	t_i^2	長期変動の縦線 $\bar{y}$	偏差 $y_i-\bar{y}$
1917	二月	51	− 17	− 867	289	42.4	+ 8.6
	三月	35	− 16	− 550	256	43.2	− 8.2
	四月	39	− 15	− 585	225	44.0	− 5.0
	五月	40	− 14	− 560	196	44.8	− 4.8
	六月	41	− 13	− 533	169	45.6	− 4.6
	七月	42	− 12	− 504	144	46.4	− 4.4
	八月	46	− 11	− 506	121	47.2	− 1.2
	九月	53	− 10	− 530	100	48.0	+ 5.0
	十月	55	− 9	− 495	81	48.8	+ 6.2
	十一月	58	− 8	− 464	64	49.6	+ 8.4
	十二月	64	− 7	− 448	49	50.4	+ 13.6
1918	一月	67	− 6	− 402	36	51.2	+ 15.8
	二月	63	− 5	− 315	25	52.0	+ 11.0
	三月	44	− 4	− 176	16	52.8	− 8.8
	四月	43	− 3	− 129	9	53.6	− 10.6
	五月	42	− 2	− 84	4	54.4	− 12.4
	六月	43	− 1	− 43	1	55.2	− 12.2
	七月	49	0	0	0	56.0	− 7.0
	八月	54	+ 1	+ 54	1	56.8	− 2.8
	九月	59	+ 2	+ 118	4	57.6	+ 1.4
	十月	64	+ 3	+ 192	9	58.4	+ 5.6
	十一月	74	+ 4	+ 296	16	59.2	+ 14.8
	十二月	81	+ 5	+ 405	25	60.0	+ 21.0
1919	一月	75	+ 6	+ 450	36	60.8	+ 14.2
	二月	51	+ 7	+ 357	49	61.6	− 10.6
	三月	48	+ 8	+ 384	64	62.4	− 14.4
	四月	49	+ 9	+ 441	81	63.2	− 14.2
	五月	53	+ 10	+ 530	100	64.0	− 11.0
	六月	54	+ 11	+ 594	121	64.8	− 10.8
	七月	57	+ 12	+ 684	144	65.6	− 8.6
	八月	60	+ 13	+ 780	169	66.4	− 6.4
	九月	63	+ 14	+ 882	196	67.2	− 4.2
	十月	72	+ 15	+ 1,080	225	68.0	+ 4.0
	十一月	81	+ 16	+ 1,296	256	68.8	+ 12.2
	十二月	90	+ 17	+ 1,530	289	69.6	+ 20.4
計		1,960		+2,872	3,570		

ツメん

ツメん

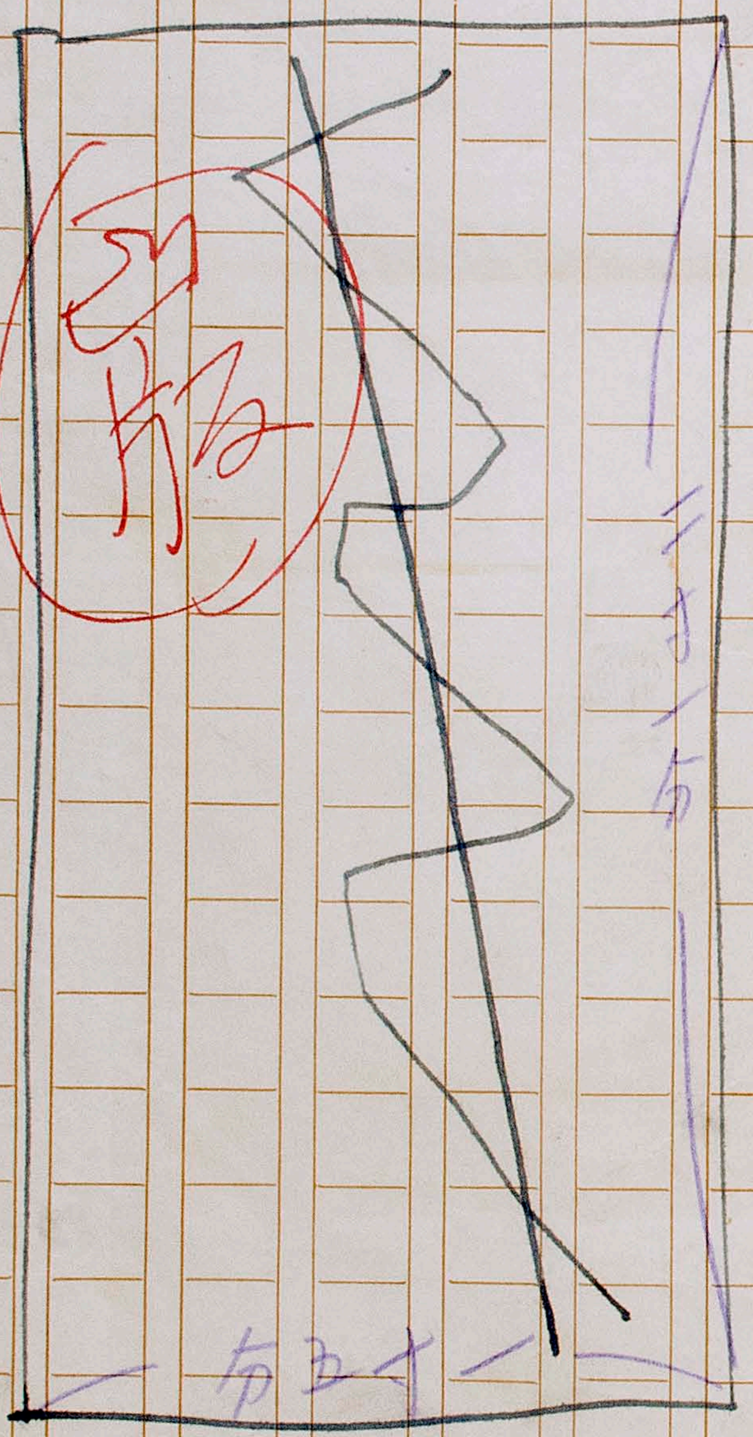
經濟學全集二十册い印

6 No. 26

$n=35$, $\sum y_i = 1{,}960$, $\sum t_i y_i = 2{,}872$, $\sum t_i^2 = 3{,}570$ なる故、

$a=\frac{1960}{35}=56$, $b=\frac{2872}{3570}=0.8$.

由て長期的傾向は $y = 56+0.8t$ である。例へば一九一七年十一月に於ける鶏卵の価の傾向は $y = 56+0.8\times(-8) = 49.6$ 仙である。しかるに実際その月の価は $y_{-8}=$ 58仙であるから、その間の偏差は $y_{-8}-y = 58-49.6 = +8.4$ 仙である。



印刷の都合によって、この図モウトウ前へなってもよし。但し後へならぬ様願ひます

第4図

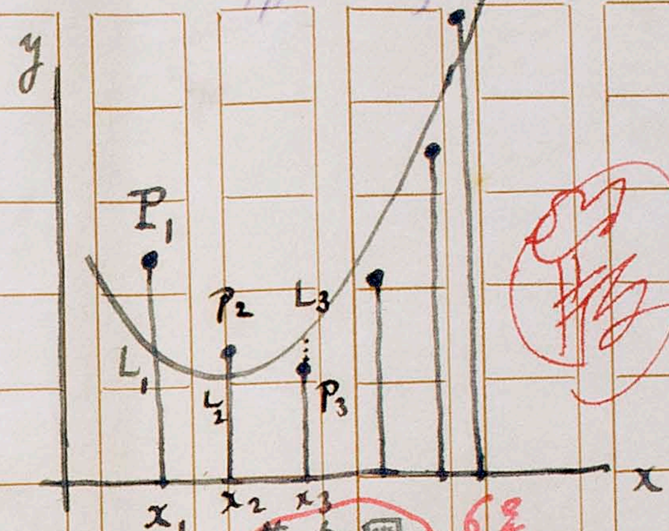
太き線は長期的変動を表はす

第二節　拋物線の当嵌め（二次、三次、…）

時系列が直線的でなく、寧ろ拋物線的な場合には、「与へられたる諸点P_1、P_2、…、P_nの間を縫ふて通る平均的拋物線」とも呼ばれるべき、一つの拋物線を引くがよい。即ち（二次の）拋物線の方程式を

$$y = a + bx + cx^2$$

とすれば、点P_1、P_2、…の拋物線からの偏差P_1L_1、P_2L_2、…は夫々



第5図

$$Y_1 - y_1 \text{ 即ち } Y_1 - (a + bx_1 + cx_1^2),$$

$$Y_2 - y_2 \text{ 即ち } Y_2 - (a + bx_2 + cx_2^2),\ \ldots,\ Y_n - y_n \text{ 即ち } Y_n - (a + bx_n + cx_n^2)$$

となる。吾々は直線の場合と同様に、これ等の偏差の自乗の和を最小にするやうに、係数a、b、cを決定する。それは

$$S = \sum \left[Y_i - (a + bx_i + cx_i^2) \right]^2 = \text{最小}$$

から

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0,\quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0,\quad \frac{\partial S}{\partial c} = 0$$

即ち

$$na + b\sum x_i + c\sum x_i^2 = \sum Y_i,$$

$$a\sum x_i + b\sum x_i^2 + c\sum x_i^3 = \sum x_i Y_i,$$

$$a\sum x_i^2 + b\sum x_i^3 + c\sum x_i^4 = \sum x_i^2 Y_i$$

經濟學全集二十册い印

を聯立方程式として解いて、a, b, c を決定することが出来る。

時系列の場合には、直線の場合と同様に、時の中央を時tの基準に採れば、$\Sigma t=0$、$\Sigma t^3=0$ となる。由てtの値が~~■~~の長期変動傾向は

$$y = a + bt + ct^2$$

但し a, b, c は

$$na + c\Sigma t^2 = \Sigma y,\quad b\Sigma t^2 = \Sigma ty,\quad a\Sigma t^2 + c\Sigma t^4 = \Sigma t^2 y$$

によって与へられる。

時系列によっては、その長期変動傾向が二次式によっても満足に表はし得ない場合がある。

進んで三次式を用ひるとすれば、時の中央をtの基準とし、長期変動傾向は

$$y = a + bt + ct^2 + dt^3$$

によって与へられる。
但し係数 a, b, c, d は

$$na + c\Sigma t^2 = \Sigma y$$

$$b\Sigma t^2 + d\Sigma t^4 = \Sigma ty$$

$$a\Sigma t^2 + c\Sigma t^4 = \Sigma t^2 y$$

$$b\Sigma t^4 + d\Sigma t^6 = \Sigma t^3 y$$

によって定められるのである。
同様の方法で四次式、五次式……へと、進め得られる。

例へば次表から、北米合衆国馬鈴薯生産高 — 一

6

ゴチ

エーカー当り生産高を、一八九〇年—一八九九年の十個年平均を基準とせる指数—の長期変動傾向を、三次式によって計算すると、時の基点を中央の年（一八九九年）に、時の単位を一年に取り、

$n=39$, $\Sigma t^2=4940$, $\Sigma y=4309$, $\Sigma ty=4850$,

$\Sigma t^2y=554762$, $\Sigma t^3y=889472$

を得る。また カール・ピーアソン編輯の表（Pearson, Tables for Statisticians and Biometricians）から

$\Sigma t^4=1153332$, $\Sigma t^6=304911620$.

故に

$$39a+4940c=4309,$$
$$4940b+1125332d=4850$$
$$4940a+1125332c=554762$$
$$1125332b+304911620d=889472$$

を解いて

$$y=108.2+1.992t+0.0179t^2-0.004433t^3$$

を得る。

この式から計算した長期変動傾向の値は、表の最後の欄に示されてゐる。（以上の計算は、小林新氏『経済統計学』、三三四頁以下から、抜萃したものである。）

經濟學全集二十冊い印

この表一頁内に収める。

6ポ又は7ポ

文章と

表の~~位~~位置少し変ってもよし、表は

成るべく前の方へ入れ。

年次	y_i	t_i	t_i^2	t_i^3	$t_i y_i$	$t_i^2 y_i$	$t_i^3 y_i$	y
1880	118	−19	361	−6859	−2242	42598	−809362	107
81	70	−18	324	−5832	−1260	22680	−408240	104
82	102	−17	289	−4913	−1734	29478	−501126	101
83	118	−16	256	−4096	−1388	30208	−483328	99
84	112	−15	225	−3375	−1680	25200	−378000	97
85	101	−14	196	−2744	−1440	19796	−277144	96
86	96	−13	169	−2197	−1245	16224	−260912	95
87	74	−12	144	−1728	− 888	10656	−127872	95
88	104	−11	121	−1331	−1144	12584	−138424	94
89	101	−10	100	−1000	−1010	10100	−101000	95
1890	73	− 9	81	− 729	− 657	5913	− 53217	95
91	122	− 8	64	− 512	− 976	7808	− 62464	96
92	80	− 7	49	− 343	− 560	3920	− 17440	97
93	92	− 6	36	− 216	− 552	3312	− 19872	98
94	81	− 5	25	− 125	− 405	2025	− 10125	99
95	131	− 4	16	− 64	− 524	2096	− 8384	101
96	119	− 3	9	− 27	− 357	1071	− 3213	103
97	84	− 2	4	− 8	− 168	336	− 672	104
98	98	− 1	1	− 1	− 98	98	− 98	106
99	121	0	2470	0	−18805			108
1900	105	1	1	1	105	105	105	110
01	85	2	4	8	170	340	680	112
02	125	3	9	27	375	1125	3375	114
03	110	4	16	64	440	1760	7040	116
04	144	5	25	125	720	3600	18000	118
05	113	6	36	216	678	4068	24408	120
06	133	7	49	343	931	6517	45619	122
07	124	8	64	512	992	7936	63488	123
08	112	9	81	729	1008	9072	81648	124
09	138	10	100	1000	1380	13800	138000	125
1910	122	11	121	1331	1342	14762	162382	126
11	105	12	164	1728	1260	15120	181440	127
12	148	13	169	2197	1924	25012	325156	127
13	118	14	196	2744	1652	23128	323792	127
14	144	15	225	3375	2160	32400	486000	127
15	125	16	256	4096	2000	32000	512000	126
16	105	17	289	4913	7085	30345	515865	125
17	131	18	324	5832	2358	42444	763992	124
18	125	19	361	6859	2378	45125	857375	122
	4309		4940		+23655 −18805	554762	−3620893 +4510365	
					+ 4850		+ 889472	

經濟學全集二十册い印

6

この年の値を基にして畫いたグラフが第6図の~~曲~~三次抛物線である。

注意。

第　6　図

太い曲線（三次抛物線）は長期的変動を表はす

さて時系列に於ける曲線の当嵌めによって得られた長期的変動の曲線は、一次、二次、三次、……と次数を高くするに従って、益々與へられる時系列の諸点からの開きが小さくなる。（小倉、近藤共訳『ザンデン、実用解析学』、三五一頁参照）併しながら、徒に高次の曲線を当嵌めることは、獨り計算を複雑にするのみに止まらず、それは長期的変動傾向―それは成るべく単調なものを欲する―の意味から考へて、却って無意義のことであらう。

それ故に、多数の統計家が、長期的変動傾向として、屢々直線のみを採用することは、必らずしも計算が簡単なるため許りでなく、理由あることであらう。若し斯様に、長期的変動を直線的の上昇または下降と解釈するならば、その直線が時の軸（横軸）となす角が甚だ小なる場合、即ち本章第二節に於ける

$$\theta = \frac{\Sigma t_i y_i}{\Sigma t_i^2}$$

の値が極めて小なる場合には、長期的変動が殆んど存在しないものと、言ひ得るのである。* しかし此場合に於ても、長期的変動を他の曲線で表はす

經濟學全集二十册い印

のと見做せば、そ[redacted]必ず確かに存在する場合も多いである。[redacted]＊＊

かやうに考へれば、長期的変動に就いて云々するに当つては、少らず如何にしてそれを測つたかを、附言する必要がある。[redacted]

＊ 厳密に[redacted]は、長期的変動が殆んど定数であると云ふべきである。

＊＊ [redacted]現に一八九〇年―一九一四年に於ける、ニューヨーク砂糖相場の長期的変動――それは直線的[redacted]と見做せば、殆んど[redacted]無視し得る程度のものである――は、次の如く与へられる。（相場は封度許り仙、時の原点は一九〇二年七月。ヘンリー・シュルツによる。）

[redacted]（一次式）　$y = 4.79548 + 0.001319t$

二次式　$y = 4.75281 + 0.001319t + 0.0008192t^2$

三次式　$y = 4.75281 + 0.062466t + 0.0008192t^2 - 0.0006522t^3$

四次式　$y = 4.87646 + 0.062466t - 0.0070942t^2 - 0.0006522t^3 + 0.0000591t^4$

五次式　$y = 4.87646 - 0.038153t - 0.0070942t^2 + 0.0023529t^3 + 0.0000591t^4 - 0.0000173098$

かやうに項の数を増すにつれて、[redacted]前に定めた係数の値が変ることに注意せよ。

すり

かくて長期的変動の曲線を求めることは、徒に精密い曲線の当篏めを行ふことではなかった。しかし他の●種類の問題にあっては、出来るだけ精密な曲線の当篏めを要求する場合もある。それは例へば、需要の(統計的)諸法則**を求める場合の如きである。

**ムーア『経済循環期の統計学的研究』(蜷川虎三氏訳、大鐙閣)、七五頁●前後。Henry Schultz, Statistical Laws of demand and supply. Chicago (1928) 参照。

6

第三節 二、三の他の形の曲線の当篏め

其の一、$y = a\,t^{b}$

この形が採用し得られるか否かは、次の様にして判定される。両辺の対数を取れば

$$\log y = \log a + b\cdot\log t$$

となるから、

$$\xi = \log t,\quad \eta = \log y \qquad (1)$$

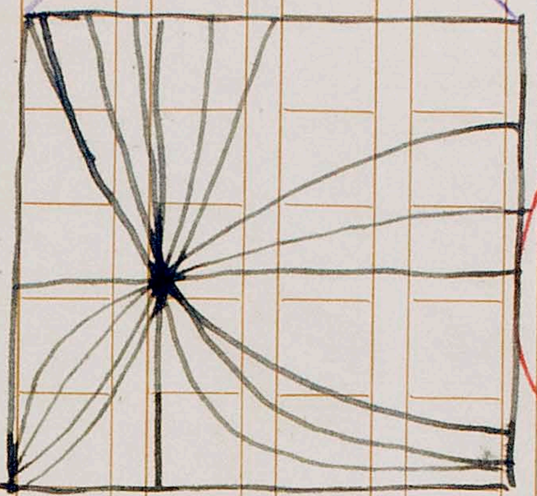
とおけば

$$\eta = \log a + b\xi \qquad (2)$$

を得る。由て(ξ,η)即ちtの対数とyの対数とを、夫々横坐標と縦坐標とにとれば、(2)は一つの直線を表はすことになる。故に(ξ,η)を坐標に取るとき、時系列$(t_1, y_1), (t_2, y_2), \ldots$か

ら得られる諸点 $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \ldots$ の間を縫ふて行く趨勢的曲線が、近似的に直線であると認められなければ、吾々は上の形式を採用し得ないのである。

また若し其れが近似的に直線であるなら、その直線の係数 $\log a$ と b とを、(最小自乗法によって)、決定する。次に對數表を



第6図

用いて、$\log a$ から a が求められる。従て長期変動の式として、$y = ab^{t}$ が決定されることとなる。

其の二、$y = a \cdot b^{t}$ (指数曲線)

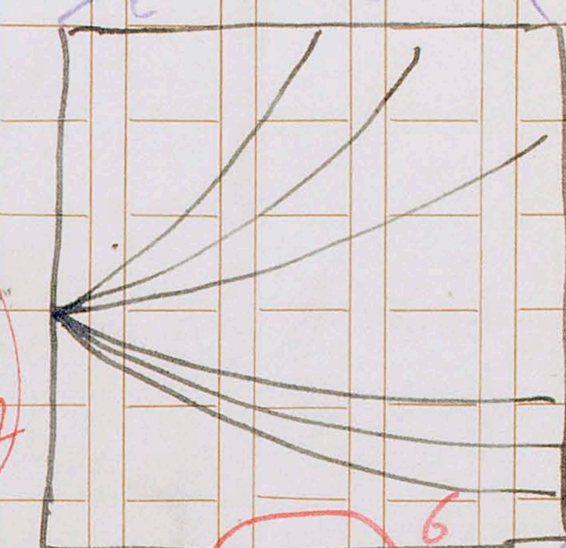
この形が採用し得られるか否かは、次の如くして判定される。両辺の對數を取れば

$\log y = \log a + t \cdot \log b.$

故に時間 t を横坐標に取り、y の對數を縦坐標に取れば、

$\eta = \log a + t \cdot \log b$　$(\eta = \log y)$

なる直線となる。(第8図に於て、e は 2.71828 を表はす。)



第8図

例へば、元金をA、年利率をrとする複利に於て、t年後の元利合計をMとせば、

$$M = A(1+r)^t$$

となるから、正しく上の形式に帰する。

其の三。他の形

同様の方法は更に~~一~~数歩を進め得るが、吾々は茲に唯一つの場合、即ち

$$\log y = a + bt + ct^2$$

なる形を考へるに止めよう。

一九〇八—一九二二年間に於ける米国石油産出額の長期変動傾向を定めるに、年産額をy（単位百万バレル）とし、中央の年即ち一九一五年から時をt（単位一年）を測らう。tを横坐標とし、yの対数を縦坐標に取つてグラフを画く（第8図）と、~~長期変動~~平均的の曲線として、直線よりも寧ろ（二次の）抛物線を採用する方が宜しいやうに思はれるから、

$$\log y = a + bt + ct^2$$

と置いて、その係数a、b、cを最小自乗法に

經濟学全集二十冊い印 37

よって決定しよう。

$n=15$, $\Sigma t_i=0$, $\Sigma t_i^2=280$, $\Sigma t_i^3=0$, $\Sigma t_i^4=9352$,

$\Sigma(\log y_i)=36.99528$, $\Sigma(t_i\cdot\log y_i)=9.41834$, $\Sigma(t_i^2\cdot\log y_i)=694.23282$

しかるに a, b, c を決定すべき方程式は

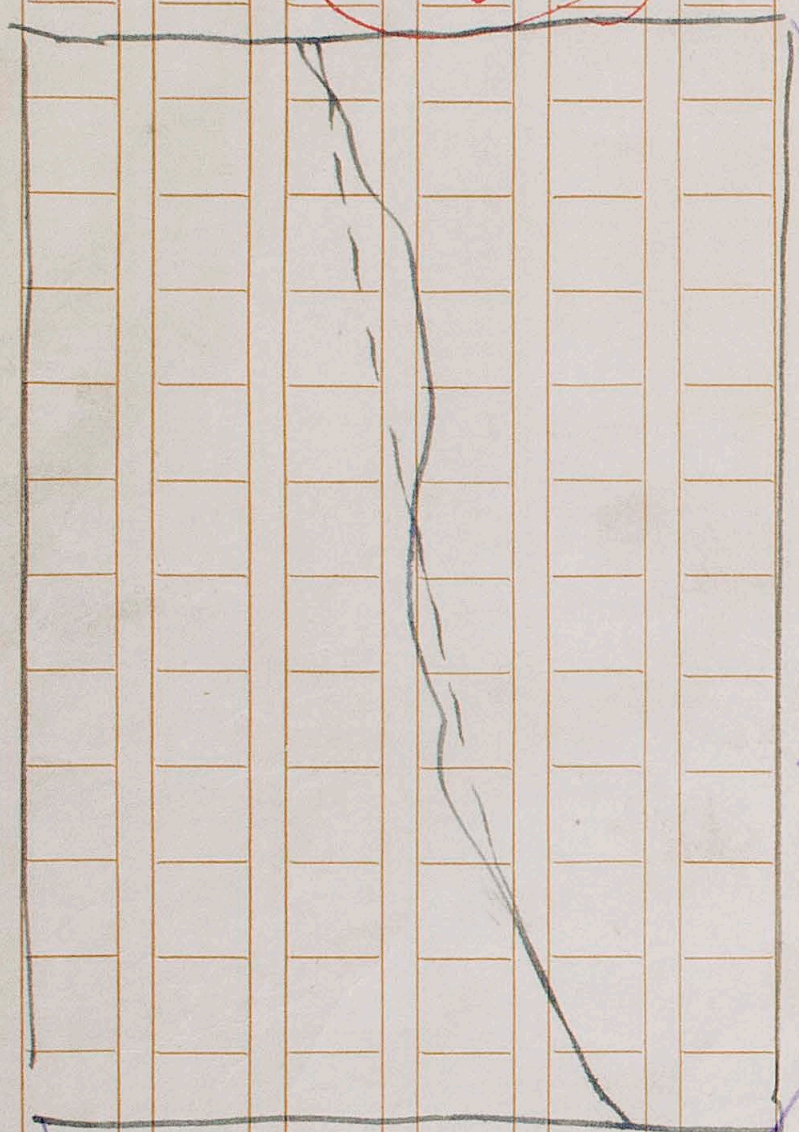
$$na+b\Sigma t_i+c\Sigma t_i^2=\Sigma(\log y_i),$$

$$a\Sigma t_i+b\Sigma t_i^2+c\Sigma t_i^3=\Sigma(t_i\cdot\log y_i),$$

$$a\Sigma t_i^2+b\Sigma t_i^3+c\Sigma t_i^4=\Sigma(t_i^2\cdot\log y_i)$$

であるから、

$$\begin{cases}15a+280c=36.99528,\\ 280b=9.41834,\\ 280a+9352c=694.23282\end{cases} \quad 故に \quad \begin{cases}a=2.450508,\\ b=0.033637,\\ c=0.0008488\end{cases}$$



第9図

縦線には年産額 y の對數が画かれてある。(之を半對數図[redacted]と呼ぶ)。点線は長期的変動傾向を示す。

經濟学全集二十冊い印

年次	t_i	産額 y_i	$\log y_i$	$t_i \cdot \log y_i$	$t_i^2 \cdot \log y_i$	指数 $\log y$	指数 y
1908	−7	178.5	2.25164	−15.76148	110.33036	2.256639	180.6
1909	−6	183.2	2.26269	−13.57614	81.45684	2.279242	190.2
1910	−5	209.6	2.32139	−11.60695	58.03475	2.303543	201.2
1911	−4	220.4	2.34321	−9.37284	37.49136	2.329540	213.6
1912	−3	222.9	2.34811	−7.04433	21.13299	2.357236	227.6
1913	−2	248.4	2.39515	−4.79030	9.58060	2.386629	243.6
1914	−1	265.8	2.42456	−2.42456	2.42456	2.417720	261.6
1915	0	281.1	2.44886	......	......	2.450508	282.2
1916	1	300.8	2.47828	2.47828	2.47828	2.484994	305.5
1917	2	335.3	2.52543	5.05086	10.10172	2.521177	332.0
1918	3	355.9	2.55133	7.65399	22.96197	2.559058	362.3
1919	4	378.4	2.57795	10.31180	41.24720	2.598636	396.9
1920	5	442.9	2.64631	13.23155	66.15775	2.639913	436.4
1921	6	472.2	2.67413	16.04478	96.26868	2.682886	481.8
1922	7	557.5	2.74624	19.22368	134.56576	2.727557	534.0
			36.99528	9.41834	694.23282		

長期変動　長期変動

表中第七欄は（$t=-7,-6,\dots,0,1,\dots,6,7$）とおいて、

$$\log y = 2.4650508 + 0.0336377t + 0.0008488t^2$$

から計算した $\log y$ を、第八欄は傾向 y の値

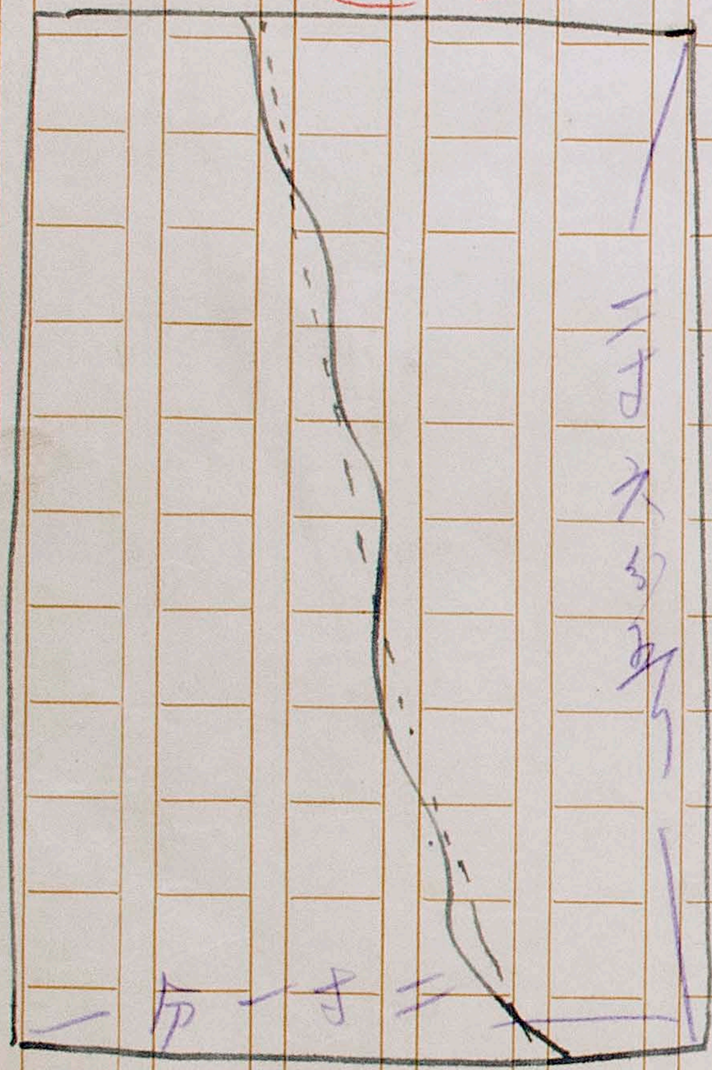
第七欄の対数からおわられた

を示したものである。又第10図はそれによって画いた

長期変動

グラフである。（以上はミルスによる。）

注意。なほ三角函数による長期的変動の表はし方に就いては、第六章第四節の例（物価指数）を見よ。



第10図

普通の意味の図表である。点線は長期的変動傾向を表はす。

經濟 … 集 二十冊い印

曲線の平滑化

時系列によって與へられた諸点の傍を、成るべく近く通る様な、而も全体として滑かな曲線を求める第二の方法に、所謂曲線の平滑化なるものがある。併しこれは、曲線の当篏めと異り、~~數學的~~曲線の方程式を求める問題ではない。

第四節 移動平均

例へば、一つの時系列に於て、相続く三つの時 t_{i-1}, t_i, t_{i+1} に相應する觀測上の函数値を y_{i-1}, y_i, y_{i+1} としよう。そのとき t_i に y_i を對する代りに、y_i を中心とする函数の三つの値の算術平均即ち

$$\bar{y}_i = \frac{y_{i-1} + y_i + y_{i+1}}{3}$$

を求め、この $\bar{y}_i$ を t_i に相應する函数値と見做して、点 $(t_i, \bar{y}_i)$ を作る。斯様にして得られる点 $(t_2, \bar{y}_2), (t_3, \bar{y}_3), \ldots$ を通る滑かな曲線 $\bar{C}$ のことを、與へられた時系列のグラフ C の平滑化と称する。

上述の方法では、平均の中心を順々に移動しながら平均を取って行くのであるから、之を

經済学全集二十冊い印

移動平均法と呼ぶ。　また平均すべき觀測値は、必ずしも三つに限らず、五つ、七つ、等々を採っても宜しいのである。

今相接續する奇數個の時点（例へば五個）t_{i-2}, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, t_{i+2} を考へ、それに相應する觀測値を y_{i-2}, y_{i-1}, y_i, y_{i+1}, y_{i+2} とし、この五つの点 $(t_{i-2}, y_{i-2}), \ldots, (t_{i+2}, y_{i+2})$ の間を縫ふ直線を考へよう。その直線を $y=A+Bt$ とする。時の基点を中央の点 t_i に移せば、新らしい時を表はす値は $s=t-t_i$ となり、上の五つの時の値は $s=-2,-1,0,1,2$ となる。また上の直線の方程式は、$y=a+bs$ なる形に變る。

さて　この直線を最小自乘法に於て決定する、即ち

$$\Sigma[y_i-(a+bs_i)]^2=\text{極小}$$

なるやうに、a、b を定めれば、前に求めた通り（第一節）

$$a=\frac{1}{5}\Sigma y_i$$

となる。このaの値は、即ち $s=0$ なるときの直線の縦線であり、換言すれば、与へられた五つの時の中央

t_i に於ける長期変動傾向（之を直線と考へた 上の五つの時の間に於て
場合の）の値である。（第一節参照）。これ
即ち t_i に於ける五点平均 $\frac{1}{5}\Sigma y$ を以て、長 この時に於ける
期変動傾向の値と見做す所以であり、~~其~~従て
移動平均によって長期変動傾向を測り得る
可能性を示すものである。

それで移動平均は、一度に平均すべき時点の範囲内で、時系列のグラフの長期変動傾向が直線に近い場合に、最も有効である。

かくて一次平滑化を行っても、未だ曲線が十分に平滑化されない場合には、も一度同じ手の方法を繰り返すがよい。五点平均

$$\frac{1}{5}[y_i+(y_{i-1}+y_{i+1})+(y_{i-2}+y_{i+2})]$$

を二次繰り返すことは、一度に九個の点に就て

$$\frac{1}{25}[5y_i+4(y_{i-1}+y_{i+1})+3(y_{i-2}+y_{i+2})+2(y_{i-3}+y_{i+3})+(y_{i-4}+y_{i+4})]$$

なる一種の平均を行ふに等しい。

また上述の移動平均（即ち直線的または一次的移動平均）が、有效でない場合には、抛物線的（二次的）移動平均を行ふも宜しからう。