第三學年特別講義

統計法

理學博士　小倉金之助述

昭和九年十月

東京物理學校

統　計　法

はしがき

この講義は統計學の中で，所謂統計解析の一部としての特に數理的なる方法を、數式の計算技術よりも數式の意味に注意と批判を加へつつ初等的に講ずるを目的とする。

統計集團 $\xrightarrow{\text{大量觀察}}$ 統計値 $\xrightarrow{\text{統計解析}}$ 統計的結論

それは單なる「數學」でもなければ，また單なる所謂「統計數學」ではない。

参考書

蜷川虎三，　統計利用に於ける基本問題［批判的］

○森田優三，　統計概論

小林　新，　經濟統計學

改造社版，　經濟學全集（43，44）統計學［有澤，小倉，森，等々］（52）

本邦社會統計論［高野］

○小　倉　統計的研究法　　木村敬雄，統計技術概要

Bowley, Elements of Statistics.

○Mills, Statistical Methods.

○Yule, Theory of Statistics.

Rietz, Hand book of mathematical statistics.

Winkler, Grundriss der Statistik.

Darmois, Statistique mathématique.

Risser et Traynard. Statistique mathématique.

Charlier, Grundzüge d. mathematischen Statistik.

表

對數表（四桁，五桁，七桁）

Barlow, Tables of squares, cubes, square roots, etc.

Pearson, Tables of Statisticians.

Glover, Tables of applied mathematics.

Crelle 又は *Zimmermann*, *Rechentafel*.

資　料

日本帝國統計年鑑

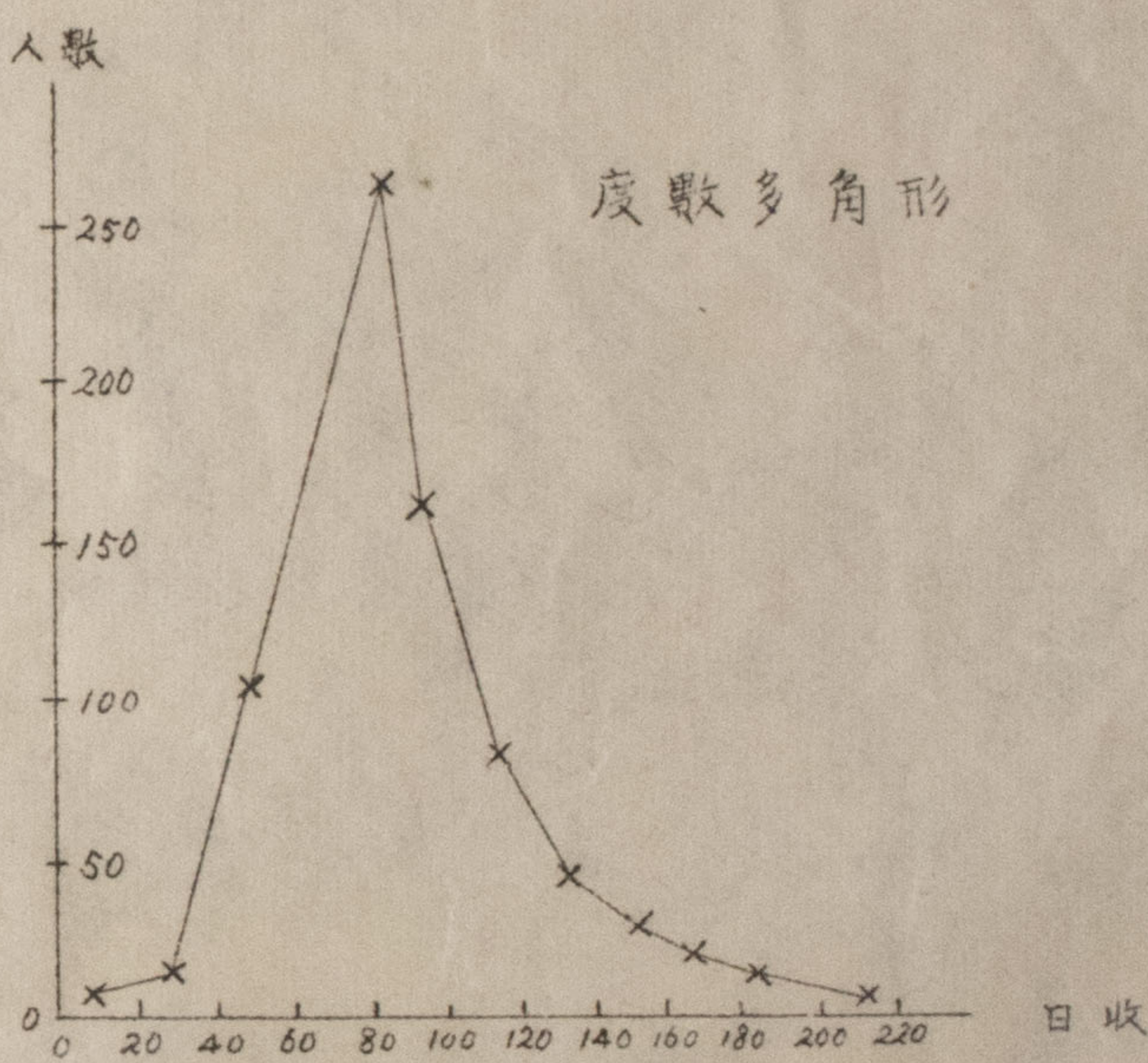
矢野恒太,　　日本國勢圖會.

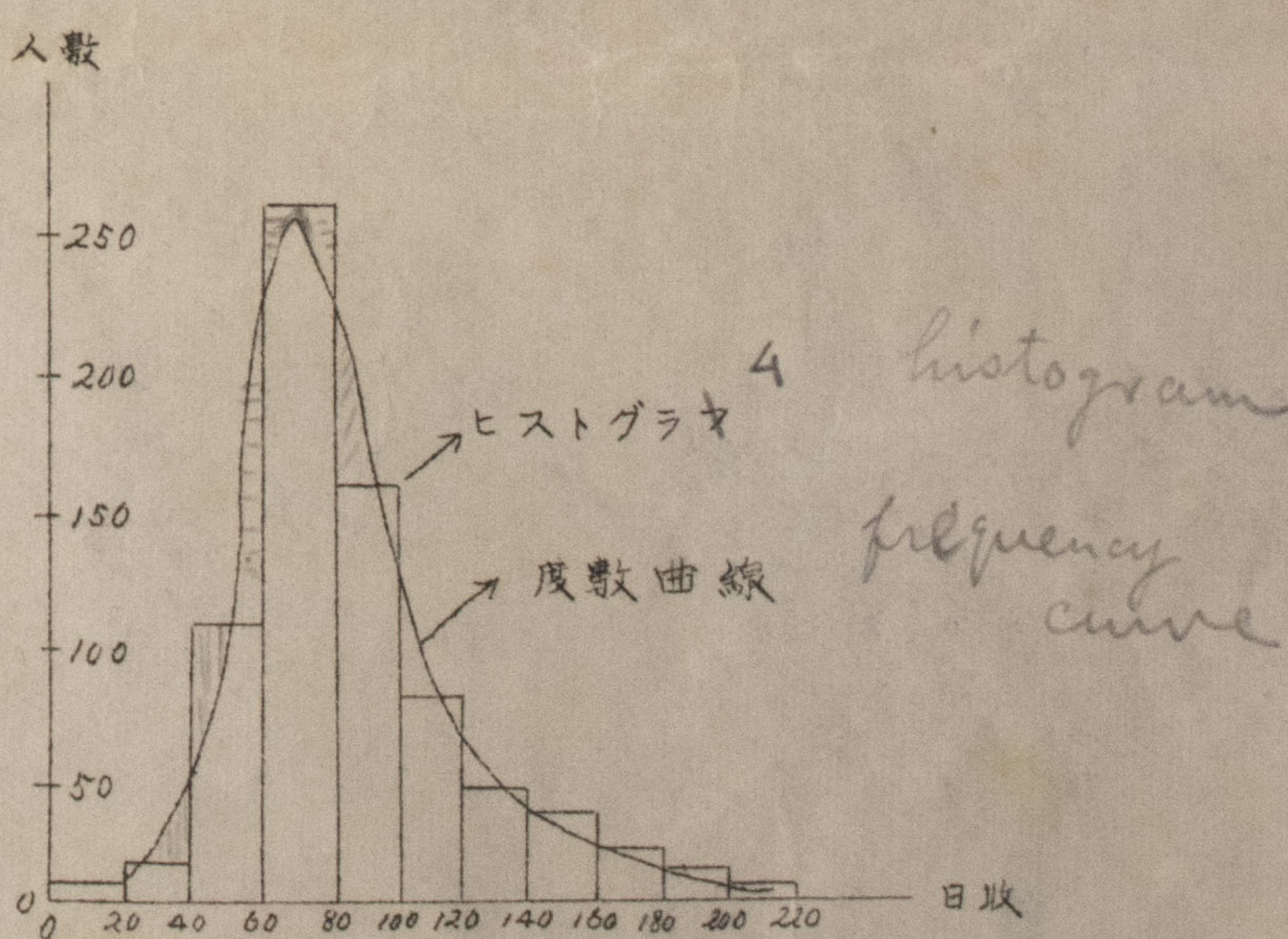
第一章　度數分布　*frequency distribution*

昭和３年８月神戸市役所調査.

神戸市マツチ軸木女工日收

日 收（銭）	中央値(銭)	人 數	累積人數
0—20	10	6	6
20—40	30	8	14
40—60	50	102	116
60—80	70	260	376
80—100	90	162	538
100—120	110	73	611
120—140	130	36	647
140—160	150	30	677
160—180	170	18	695
180—200	190	8	703
200—220	210	1	704
		計 704	

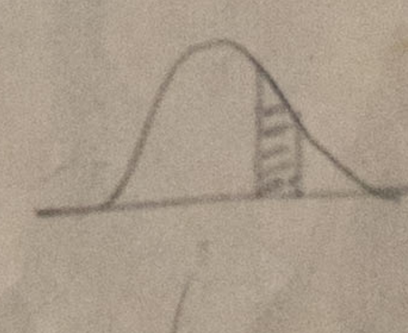




X	f
X_1	f_1
X_2	f_2
$\cdots$	$\cdots$
X_n	f_n
	$\Sigma f_K = N$

注意　級の間隔（一定）を問題に就て適當に選ぶこと.

整正なる理想的分布曲線の存在の假定。



度數分布の型

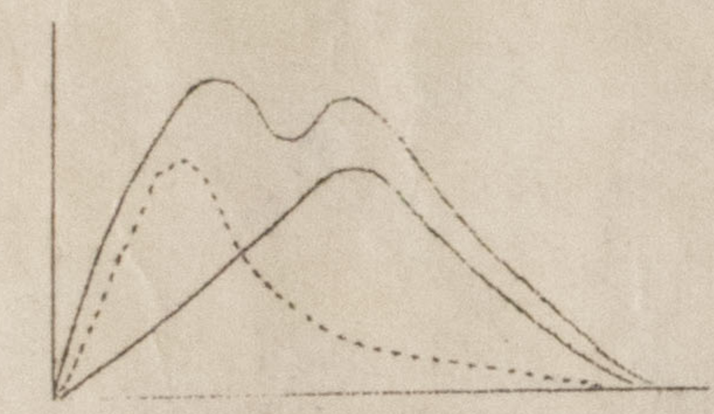
對　称　　［確率曲線，誤差の法則，ガウスの公式］

非對称

J字形

U字形

複雜な形



度數曲線の解析的表示

ピーアソンの方法

ブルンス，シャルリエの方法（直交函數）

第二章　平　均　値　averge

總變量の代表値

I　算術平均（平等）

$$M = \frac{\sum f_k X_k}{N} = \frac{\sum f_k X_k}{\sum f_k}$$

Arithmetic mean

中心値

X_k	f_k	$f_k X_k$
10歳	6	60
30	8	240
50	120	5100
70	260	18200
90	162	14580
110	73	8030
130	36	4680
150	30	4500
170	18	3060
190	8	1520
210	1	210
合計 ——	704	60180

コノ二ケノ limit ノ existence ハ証明サレル.

median ノ場合

$n=2$ $\qquad x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}.$

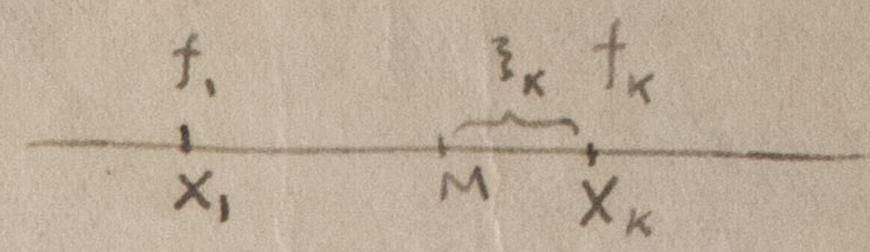
$n=4$ $\qquad x = \dfrac{x_4 x_3 - x_2 x_1}{(x_4 + x_3) - (x_2 + x_1)}.$

$n=6$ 以上ハ計算ガ不便トナル

empirical formula

平均値選擇の標準

偏差　$X_k - M = \xi_k$



$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\cdot\Sigma\left[f_k\cdot(X_k - M)^2\right]} = \sqrt{\frac{1}{N}\cdot\Sigma f_k \xi_k^2}$$

X_k	ξ_k	ξ_k^2	f_k	$f_k \xi_k^2$
10	−75.483	5697.683289	6	34186.099734
30	−55.483	3078.363289	8	24626.906312
50	−35.483	1259.043289	102	128422.415478
70	−15.483	239.723289	260	62328.055140
90	+ 4.517	20.403289	162	3305.332818
110	+24.517	601.083289	73	43879.080097
130	+44.517	1981.763289	36	71343.478404
150	+64.517	4162.443289	30	124873.298670
170	+84.517	7143.123289	18	128576.219202
190	+104.517	10923.803289	8	87390.426312
210	+124.517	15504.483289	1	15504.483289
			704	724435.795456

$M = 85.483$ 弐

$$\frac{\Sigma f_k \xi_k^2}{N} = \frac{724435.795456}{704}$$

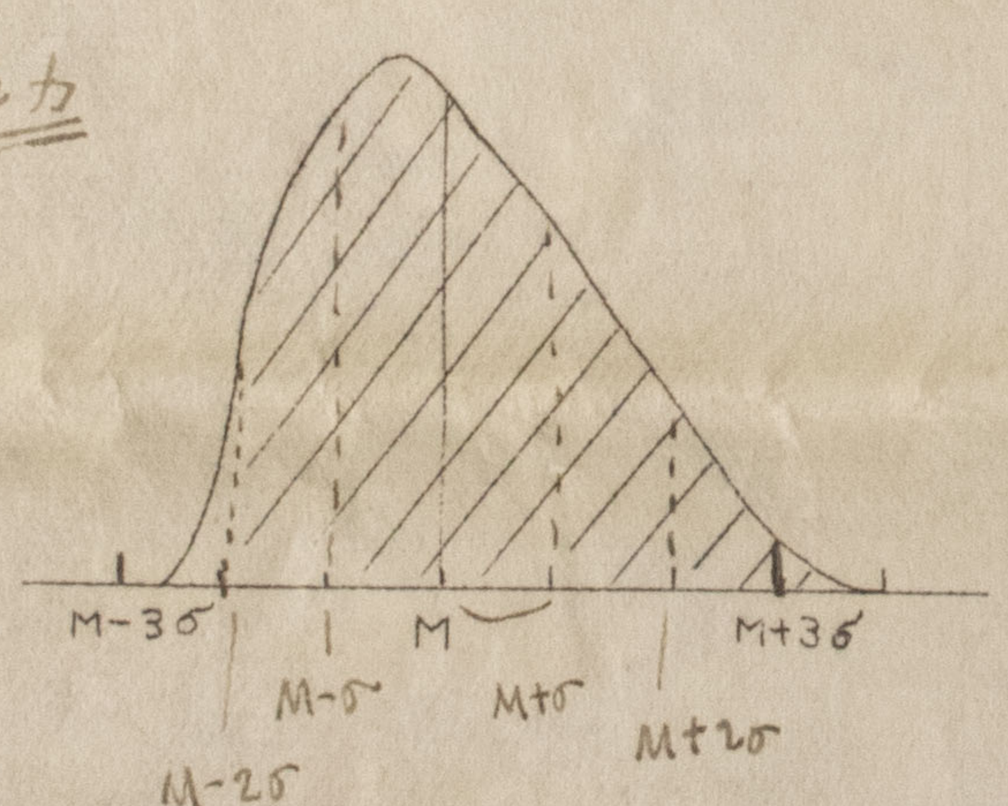
$$= 1029.028119$$

$$\sigma = \sqrt{1029.028119}$$

$$= 32.0785 \text{ 弐}$$

注意　$M - 3\sigma = 85.48 - 96.24 = -10.76$

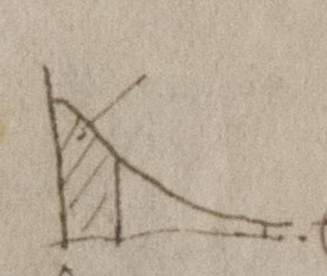
$M + 3\sigma = 85.48 + 96.24 = +181.72$



故に殆んど總ての變量が　$M-3\sigma$ と $M+3\sigma$ との間に求まれる。

對称分布曲線の場合には，上の二數の間に全變量の99.73％が含まれる。［$\sigma=1$ とおいた場合］

$$J = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$



t	J
0.5	0.19146
1.0	0.34134
1.5	0.43319
2.0	0.47725
2.5	0.49379
3.0	0.49865
3.5	0.49977
4.0	0.49997

M−3σ
M−2σ } 1
M−σ } 2
M } 3
M+σ } 4
M+2σ } 5
M+3σ } 6

最小自乗法との關係

一般に a からの偏差を取り，a からの開き（分散）の程度を

$$D = \sqrt{\frac{1}{N}\cdot\Sigma\left[f_k\,(X_k - a)^2\right]}$$

で測る．a の位置を變ずるときは，D も變化する．そして D の最小は a が算術平均 M の場合に起る．

算術平均 M とは，偏差の自乘の和 $\Sigma f_k\,(X_k - a)^2$ を最小にする a の値である，そして其の開き D の最小値は標準偏差 σ である。

$D^2 = \frac{1}{N}\cdot\Sigma f_k (x_k - a)^2$

$S = \Sigma f_k (x_k - a)^2$.

$\frac{dS}{da} = -2\Sigma f_k (x_k - a) = 0$.

$\Sigma f_k x_k - a\cdot\Sigma f_k = 0$.

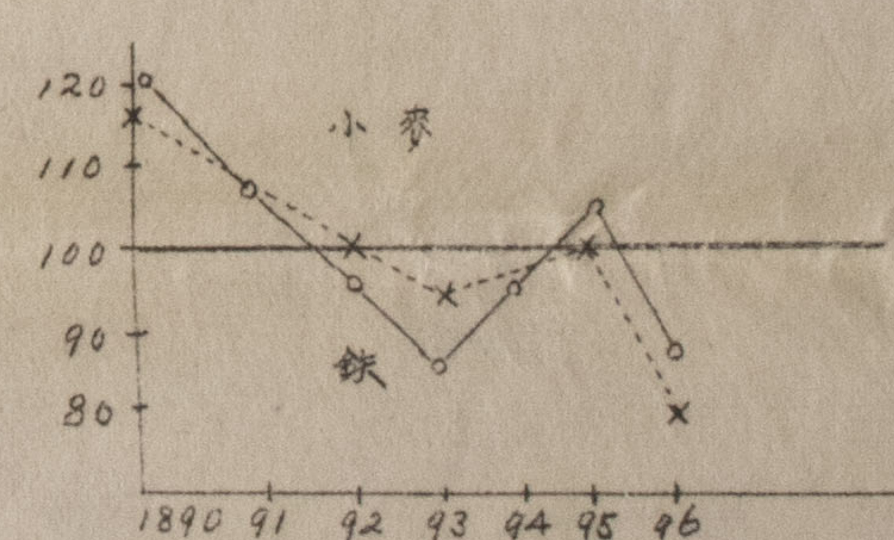
$a = \frac{\Sigma f_k x_k}{\Sigma f_k}$

M

第四章　指　數　index number

統計値の比較を容易にするための指數

年次	價格		價格指數（1890—1896基準）	
	鋼鉄（噸）	小麦（ブッセル）	鋼鉄	小麦
1890	30 $	1.05 $	120	117
91	27	0.96	108	107
92	24	0.94	96	104
93	22	0.83	88	92
94	24	0.88	96	98
95	26	0.92	104	102
96	22	0.72	88	80
平均	25	0.90	100	100



$$X_1 \quad X_2 \cdots\cdots X_n$$

指數　$I_1 = \frac{100X_1}{M}, \quad I_2 = \frac{100X_2}{M}, \cdots\cdots I_n = \frac{100X_n}{M}$

單一指数

綜合指數

生活費指數

數年間の研究により，或る年の指數が

食費	住居費	被服費	燈火燃料費	雜費
108	102	110	96	104
X_1	X_2	X_3	X_4	X_5

これ等は生活費全部の内，夫々

40	16	14	6	24%
m_1	m_2	m_3	m_4	m_5

とせば，生活費指數
（秤量平均）

$$\frac{\sum m_K X_K}{\sum m_K} = \frac{108\times 40 + 102\times 16 + \cdots\cdots}{100} = 106$$

Quetelet

物價指數

物價平準の一般的變化を知るを目的とす。

日本銀行　　　米，大麥，石油，砂糖等日用品５６品の價格指數の單なる算術平均

ダイヤモンド社．　８２品に重み〔例，内地米(65)，外國米(4)，小麥(9)，牛肉(3)，材木(10)---------〕を附した幾何平均．

I.) Fisher

郡菊之助著．　物價指數論．

基準　　廿．

大正元年　大正八年　昭和五年

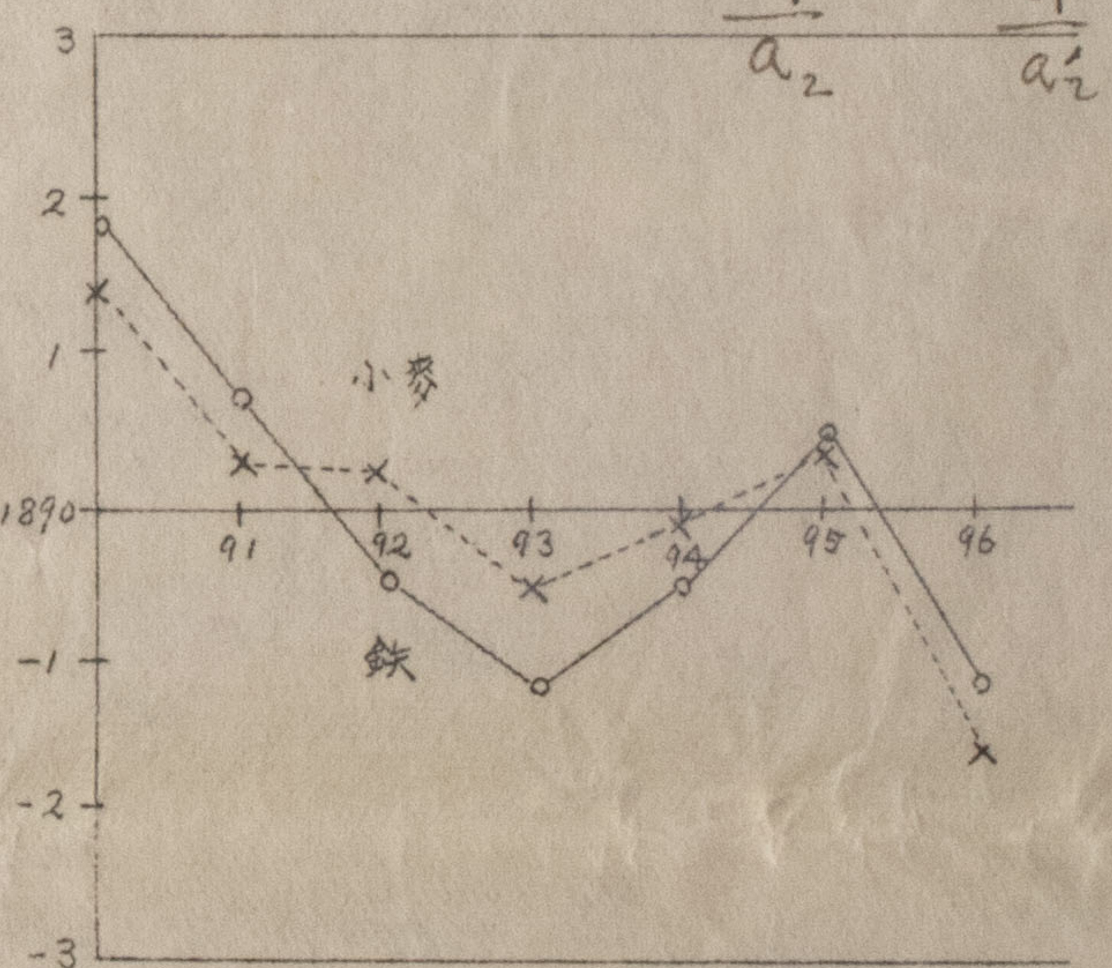
二年間の比

$\frac{a_1}{a_2}$　　$\frac{a_1'}{a_2'}$

標準測定値

$$x_1 = \frac{X_1 - M}{\sigma} = \frac{\xi_1}{\sigma}, \qquad x_2 = \frac{X_2 - M}{\sigma} = \frac{\xi_2}{\sigma}$$

鋼鉄		小麥	
$M = 25.$ $\sigma = 2.67$		$M' = 0.9$ $\sigma' = 0.097$	
ξ	$x\left(=\frac{\xi}{\sigma}\right)$	ξ'	x'
+5	+1.87	+0.15	+1.55
+2	+0.75	+0.06	+0.62
−1	−0.37	+0.04	+0.41
−3	−1.12	−0.07	−0.72
−1	−0.37	−0.02	−0.21
+1	+0.37	+0.02	+0.21
−3	−1.12	−0.18	−1.85



標準測定値で表はされた變量 $x_1, x_2, \text{--------}, x_n$ の算術平均 M' は 0 に等しい。

$$M' = \frac{1}{n}\sum x_k = \frac{1}{n}\sum \frac{X_k - M}{\sigma} = \frac{1}{n\sigma}\left(\sum X_k - nM\right) = 0. \qquad \sum x_k = 0$$

$x_1, x_2, \text{--------}, x_n$ の標準偏差 σ' は 1 に等しい。

$$\sigma'^2 = \frac{1}{n}\sum(x_k - M')^2 = \frac{1}{n}\sum x_k^2 = \frac{1}{n}\sum\left(\frac{X_k - M}{\sigma}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n\sigma^2}\cdot\sum(X_k - M)^2 = 1 \qquad \frac{1}{n}\sum x_k^2 = 1$$

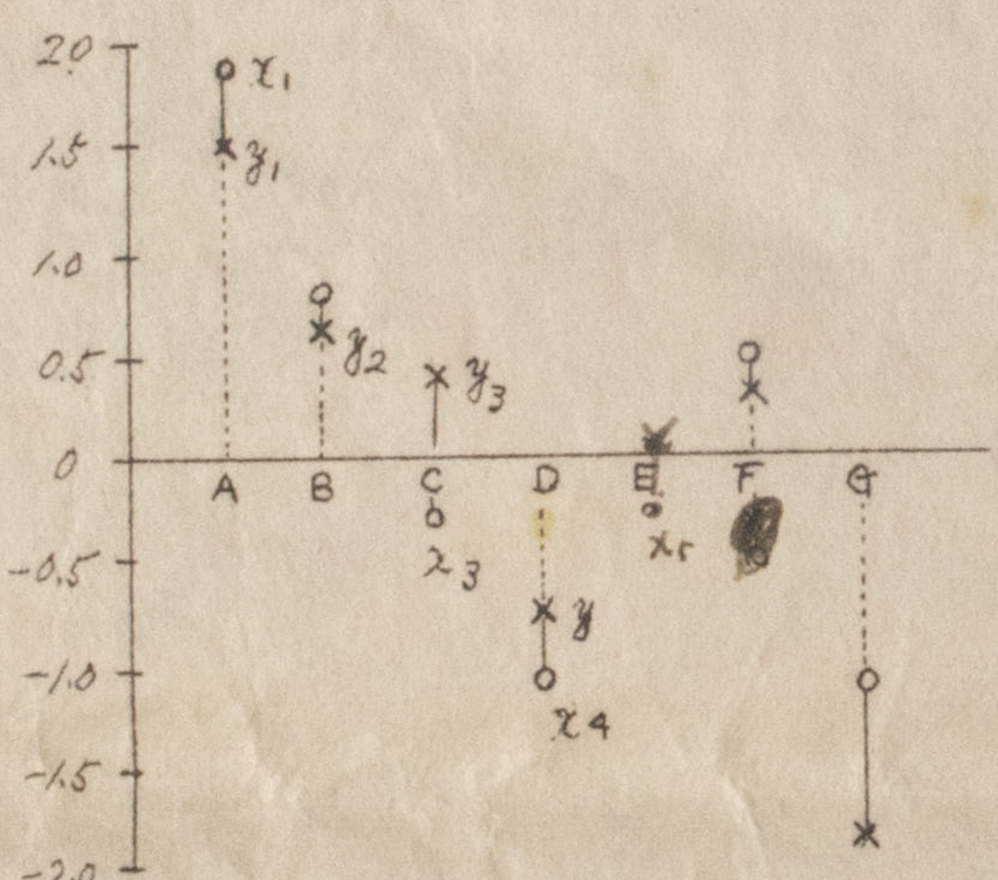
$$\left(\sqrt{\frac{1}{n}\sum(X_k - M)^2} = \sigma.\right)$$

第五章　相関関係　Correlation

生徒	入學成績				卒業成績				xy
	X	ξ	ξ^2	x	Y	η	η^2	y	
A	90点	+5	25	+1.87	85点	+15	225	+1.55	+2.85
B	87	+2	4	+0.75	76	+6	36	+0.62	+0.46
C	84	−1	1	−0.37	74	+4	16	+0.41	−0.15
D	82	−3	9	−1.12	63	−7	49	−0.72	+0.79
E	84	−1	1	−0.37	68	−2	4	−0.21	+0.08
F	86	+1	1	+0.37	72	+2	4	+0.21	+0.08
G	82	−3	9	−1.12	52	−18	324	−1.85	+2.09
平均	M(X) =85	0	$\sigma(X)^2$ =7.1425 $\sigma(X)=2.67$	0	M(Y) =70	0	$\sigma(Y)^2$ =95. $\sigma(Y)=9.74$	0	

$x=\frac{\xi}{\sigma(X)}$,　　$y=\frac{\eta}{\sigma(Y)}$,　　$\sum x_k y_k=+6.25$

$$\frac{1}{n}\sum x_k y_k=\frac{6.25}{7}=+0.89$$



對應する二つの値の開きの平方の和の平均

$$\frac{1}{n}\cdot\sum(x_k-y_k)^2$$

が大なれば　関係が粗で　小なれば関係が密である。

（基本的考へ）

$$(x_k-y_k)^2=x_k^2-2x_ky_k+y_k^2$$

$$\frac{1}{n}\cdot\sum(x_k-y_k)^2=\frac{1}{n}\sum x_k^2-\frac{2}{n}\sum x_ky_k+\frac{1}{n}\sum y_k^2$$

$$=1-\frac{2}{n}\sum x_ky_k+1$$

$$=2-\frac{2}{n}\sum x_ky_k$$

故に　$\frac{1}{n}\sum x_ky_k=1-\frac{1}{2n}\sum(x_k-y_k)^2$.

由て　$r=\frac{1}{n}\sum x_ky_k$

とおけば　$r=1-\frac{1}{2n}\sum(x_k-y_k)^2$

若し　$(x_k+y_k)^2=x_k^2+2x_ky_k+y_k^2$ から出發すれば　$r=-1+\frac{1}{2n}\sum(x_k+y_k)^2$.

$$-1\leqq r\leqq+1$$

$r=+1$　なるための必要にして且つ十分なる條件　［標準測定値で表はしたときに限る］

$x_1=y_1$,　$x_2=y_2$, ------- $x_n=y_n$.　相重る.

$r=-1$　なるための條件

$x_1=-y_1$ ----------------- $x_n=-y_n$.　對称.

$r > 0$ 順相関
< 0 逆相関
$= 0$ 無関係

$r = \pm 1$ 完全なる相関

r を相関係數と呼び，その値の大小によつて相関の程度を測定する．

入學と卒業成績の相関 $r = \frac{1}{n}\sum x_k y_k = \frac{6.25}{7} = +0.89$

英國 救貧法を布いて居る 38地方に於ける，農業労働者の平均一週の賃銀 Xと，

救貧法で救助を受けた人々の パーセンテージ Yとの相関 $r = -0.66$

$$r = \frac{1}{n}\sum \frac{\xi_k}{\sigma(X)} \frac{\eta_k}{\sigma(Y)} = \frac{\sum (X_k - M(X))(Y_k - M(Y))}{n\,\sigma(X)\,\sigma(Y)}$$

相関表 correlation table

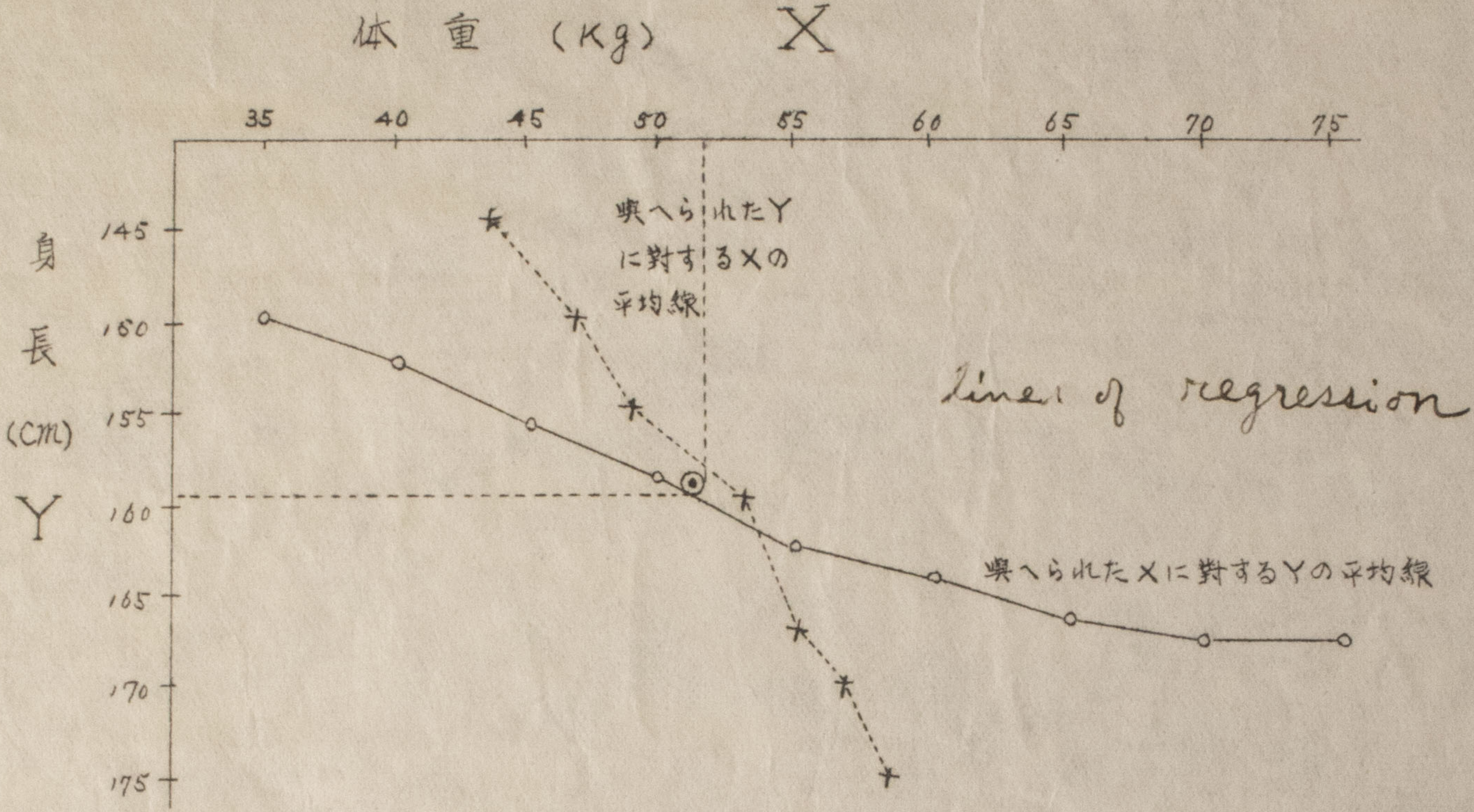
入學成績

卒業成績	82	84	86	87	90
52	1	0	0	0	0
63	1	0	0	0	0
68	0	1	0	0	0
72	0	0	1	0	0
74	0	1	0	0	0
76	0	0	0	1	0
85	0	0	0	0	1

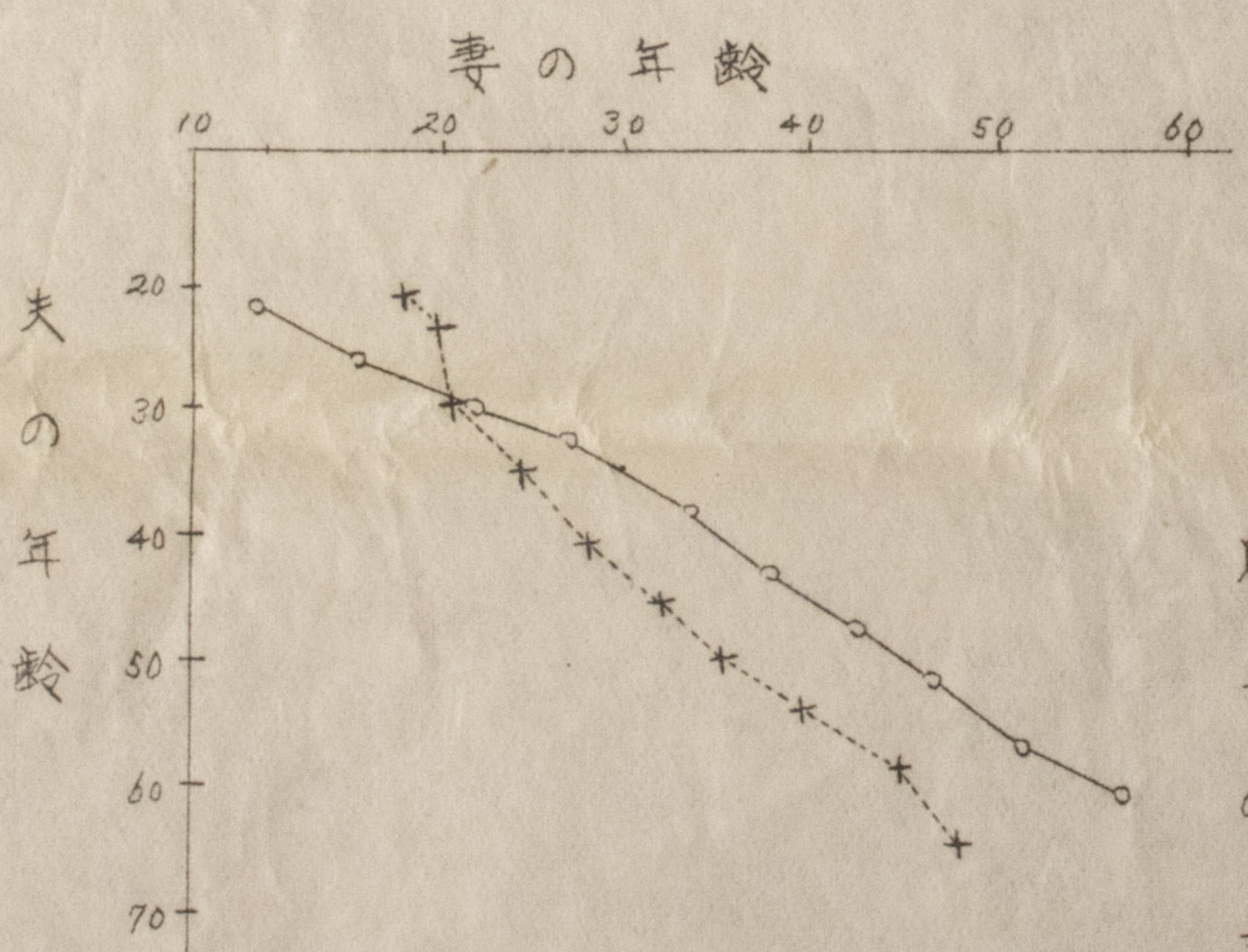
身長と体重の相関表 （昭和4年東京市隣接五郡壮丁）

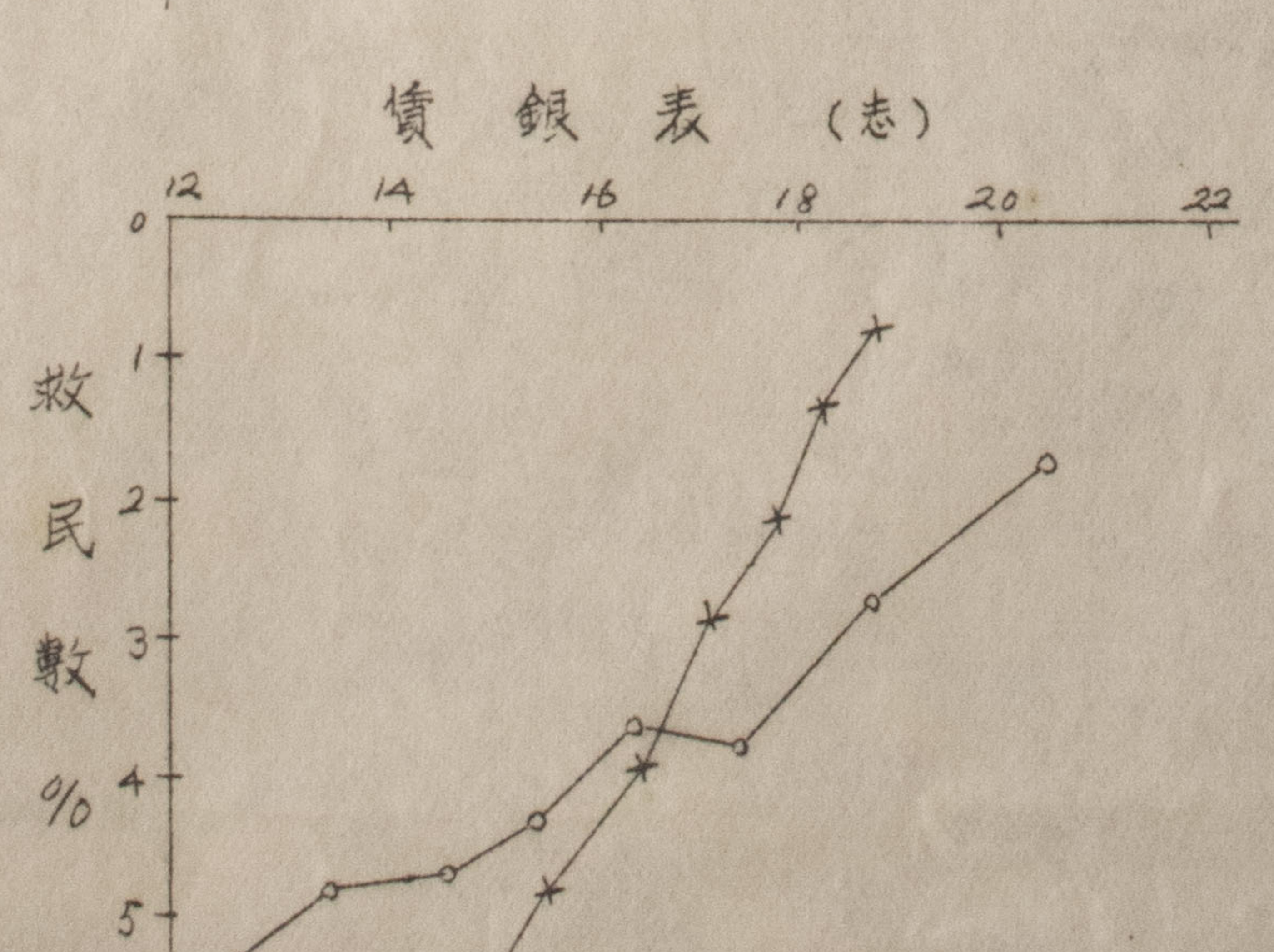
身長 \ 体重	35 kg	40	45	50	55	60	65	70	75	合計	平均 Kg
145 cm		3	5	2						10	44.5
150	1	9	29	19	5					63	46.4
155		10	53	86	37	6	1			193	49.5
160		3	36	107	103	30	5	1		285	52.5
165		1	11	48	75	42	11	1	1	190	55.0
170			1	10	22	19	8	2	1	63	57.6
175				2	4	4	2	1		13	58.5
合計	1	26	135	274	246	101	27	5	2	817	52.2 Kg
平均 cm	150.0	153.1	155.8	159.0	161.7	164.3	165.9	168.0	167.5	160.8 cm	

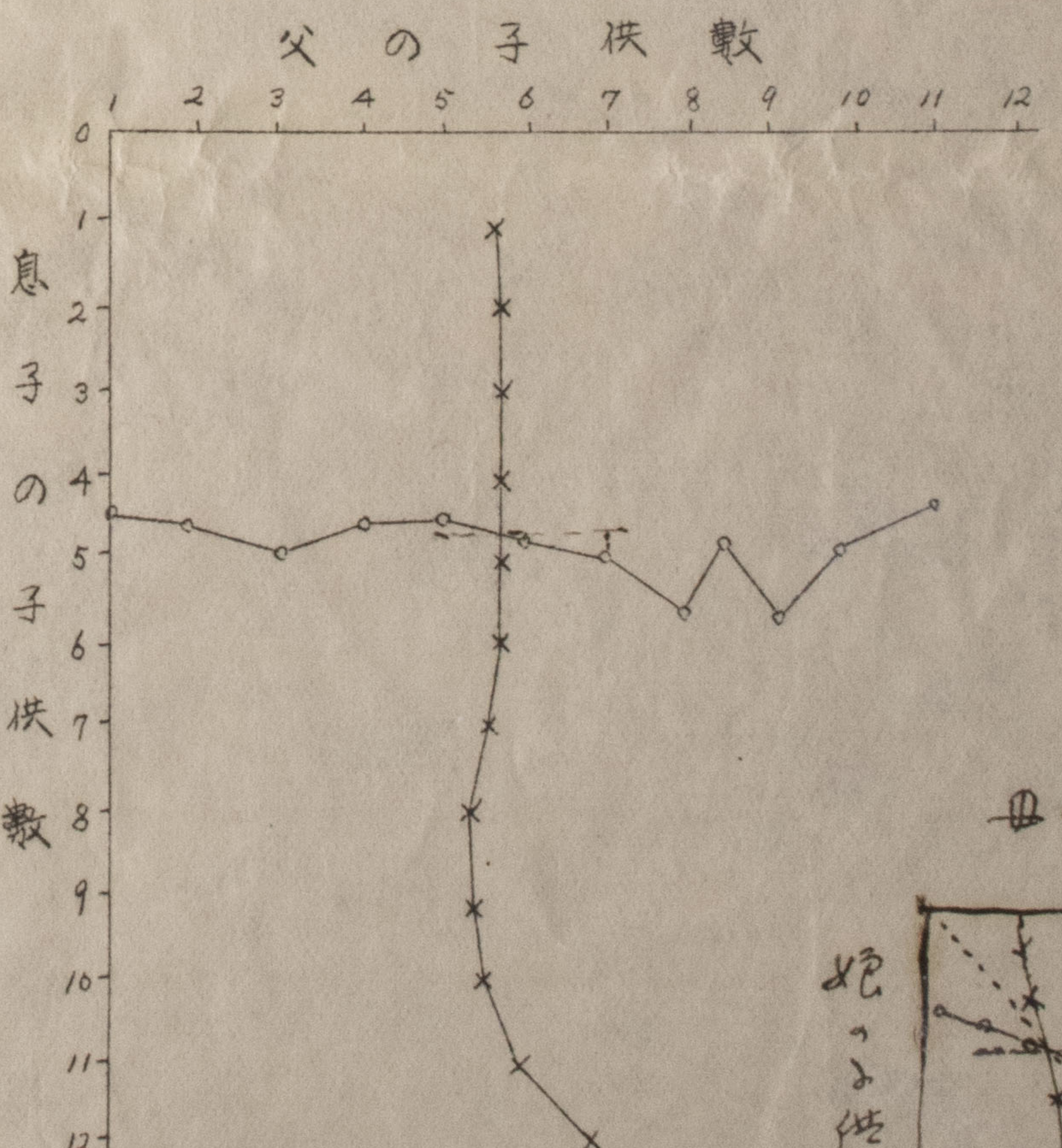
相関圖 (回歸線)

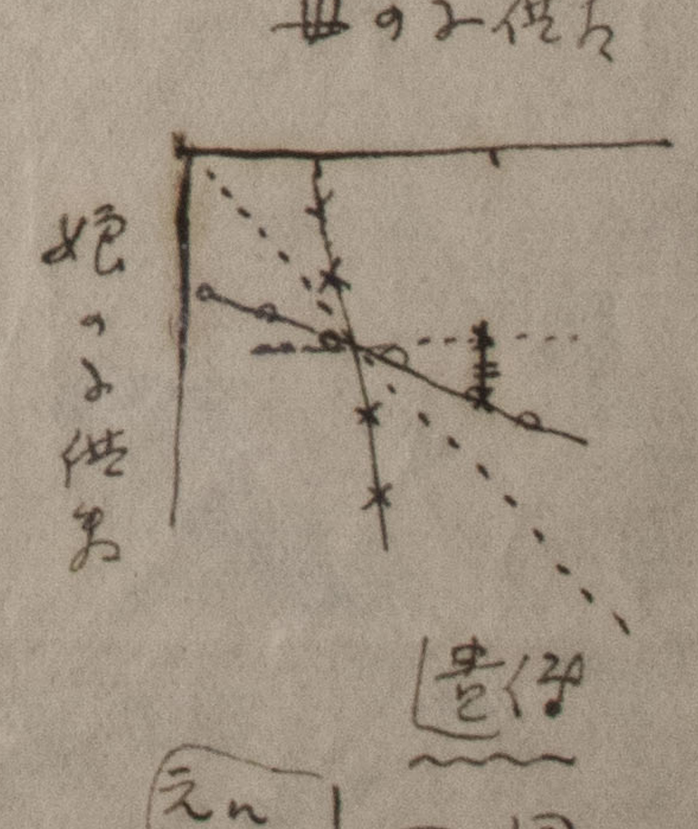


昭和四年内地の結婚







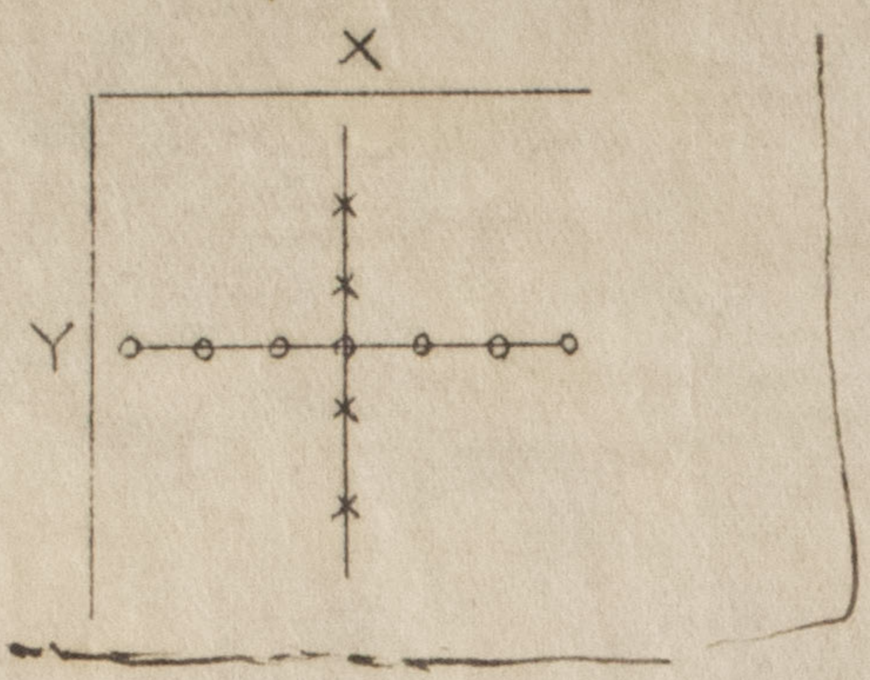


遺伝

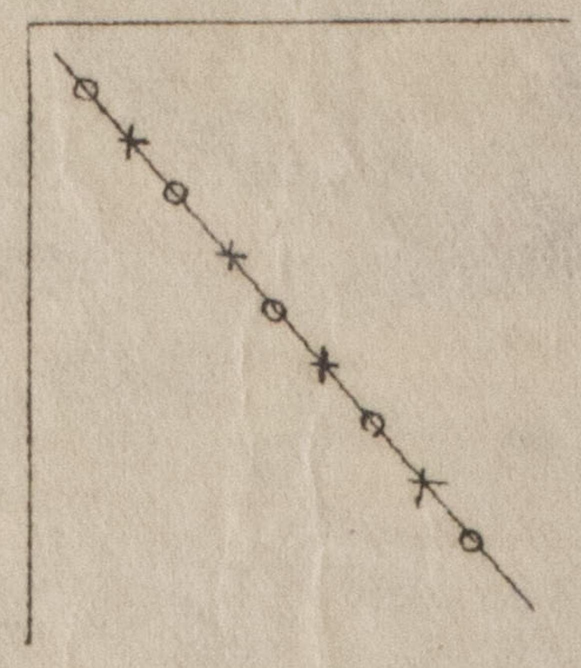
回帰

相関の程度

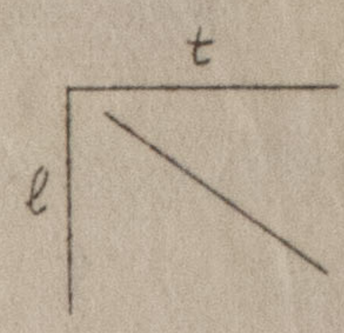
無関係の場合

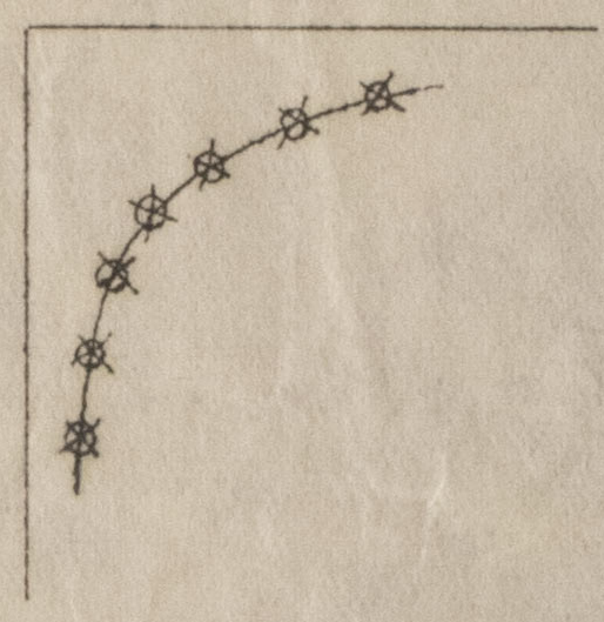


完全の場合

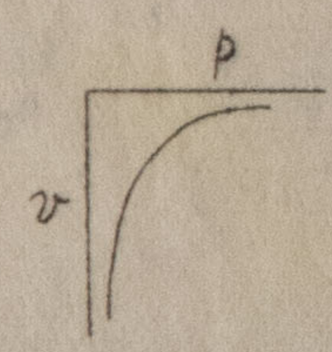


$\ell = \ell_0(1+\alpha t)$

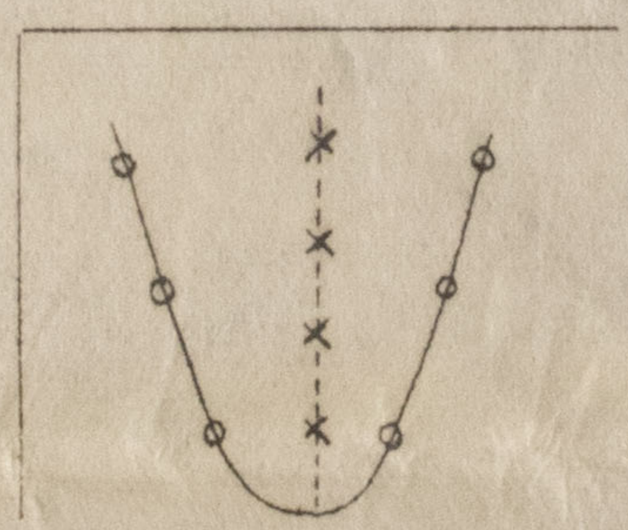




$pv = c$



完全相関と函数的関係との相違.〔一値函数〕



$$Y = aX^2 + bX + c.$$

X, Yの間の　函数関係が，$Y = f(X)$，　$X = \varphi(Y)$　共に一値である．即ち　絶えず増加する又は　絶えず減少する場合に限つて，函数関係が　完全相関である．

I　回帰線が　二つとも直線の場合　（直線回帰）

この場合には　相関係数rによって　相関の程度を測り得る．

X

		X_1	X_2 ----	X_i ------	X_m	f	M
Y	Y_1	$f_{1,1}$	$f_{2,1}$ ---	$f_{i,1}$ ---	$f_{m,1}$	f_1	M_1
	Y_2	$f_{1,2}$	$f_{2,2}$ ---	$f_{i,2}$ ---	$f_{m,2}$	f_2	M_2
	⋮	⋮	⋮ ---	⋮ ---	⋮	⋮	⋮
	Y_k	$f_{1,k}$	$f_{2,k}$ ---	$f_{i,k}$ ---	$f_{m,k}$	f_k	M_k
	⋮	⋮	⋮ ---	⋮ ---	⋮	⋮	⋮
	Y_n	$f_{1,n}$	$f_{2,n}$ ---	$f_{i,n}$ ---	$f_{m,n}$	f_n	M_n
	f'	f_1'	f_2' ---	f_i' ---	f_m'	N	$M_{(X)}$
	M'	M_1'	M_2' ---	M_i' ---	M_m'	$M_{(Y)}$	

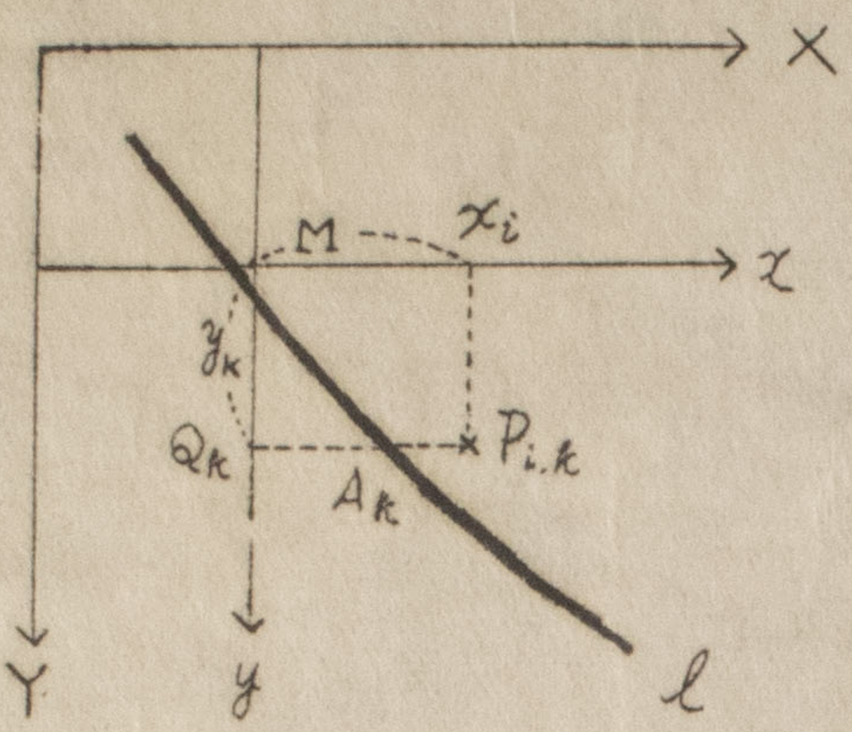
$$r = \frac{\sum_{i,k} f_{ik}\,(X_i - M_{(X)})(Y_k - M_{(Y)})}{N\ \sigma_{(X)}\ \sigma_{(Y)}}$$

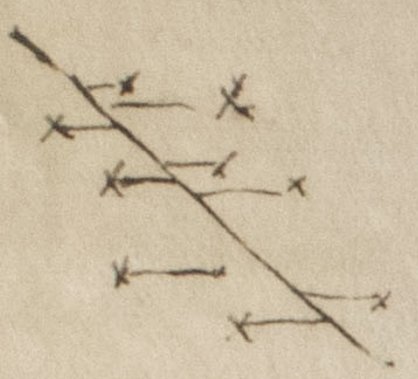
但し

$$\sigma_{(X)} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_i f_i'\,(X_i - M_{(X)})^2}$$

$$\sigma_{(Y)} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_k f_k\,(Y_k - M_{(Y)})^2}$$

X, Y の標準測定値 x, y を用ひれば $M_{(X)} = 0$, $M_{(Y)} = 0$





最小偏差線 lines of minimum deviation

$$l: \quad x = ay + b$$

$$\overline{Q_K A_K} = ay_k + b, \quad \overline{P_{i,k} A_k} = x_i - (ay_k + b)$$

$$\sum_{i,k} f_{i,k} \cdot \overline{P_{i,k} A_k}^2 = \sum_{i,k} f_{i,k} [x_i - (ay_k + b)]^2 \quad \left(\begin{array}{l} i = 1, 2, \cdots\cdots, m \\ k = 1, 2, \cdots\cdots, n \end{array}\right)$$

$$\equiv S \quad \text{極小}$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum f_{i,k} [x_i - (ay_k + b)] y_k = 0.$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum f_{i,k} [x_i - (ay_k + b)] = 0.$$

$$\sum f_{i,k} x_i y_k - a \cdot \sum f_{i,k} y_k^2 - b \cdot \sum f_{i,k} y_k = 0.$$

$$\sum f_{i,k} x_i - a \cdot \sum f_{i,k} y_k - b \cdot \sum f_{i,k} = 0.$$

$$\sum f_{i,k} x_i = 0 \quad (M_{(X)} = 0), \quad \sum f_{i,k} y_k = 0. \quad (M_{(Y)} = 0), \quad \sum f_{i,k} = N.$$

$$b = 0. \qquad \sum f_{i,k} x_i y_k - a \cdot \sum f_{i,k} y_k^2 = 0$$

$$\frac{1}{N} \sum f_{i,k} y_k^2 = \sigma_{(y)}^2 = 1. \qquad a = \frac{\sum f_{i,k} x_i y_k}{N} = \gamma.$$

故に 最小偏差線 l は点 M を過り, その方程式は

$$x = \gamma y.$$

一般に

$$\frac{X - M_{(X)}}{\sigma_{(X)}} = \gamma \cdot \frac{Y - M_{(Y)}}{\sigma_{(Y)}}. \qquad l: \quad X - M_{(X)} = \gamma \frac{\sigma_{(X)}}{\sigma_{(Y)}} \cdot (Y - M_{(Y)}).$$

もう一つの最小偏差線 l' は

$$l': \quad Y - M_{(Y)} = \gamma \frac{\sigma_{(Y)}}{\sigma_{(X)}} \cdot (X - M_{(X)})$$

体重と身長の場合 $N = 817.$ $M_{(X)} = 52.2^{kg},$ $M_{(Y)} = 160.0^{cm}$

$$\sigma_{(X)} = 5.81^{kg}, \qquad \sigma_{(Y)} = 5.79^{cm}$$

$$\gamma = +0.534$$

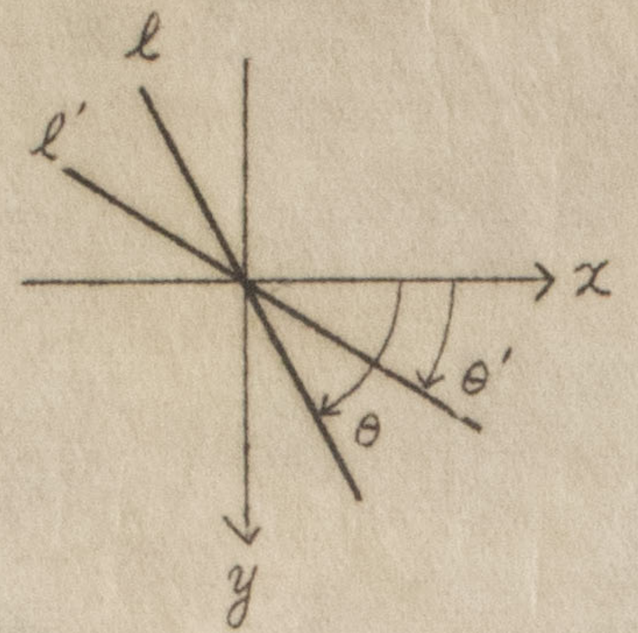
$$l: \quad X - 52.2^{kg} = +0.536\,(Y - 160.0^{cm})$$

$$l': \quad Y - 160.0^{cm} = +0.532\,(X - 52.2^{kg})$$

直線回帰の場合には, 二つの最小偏差線は夫々二つの回歸線と一致する。

(證明は自ら試みよ).

標準測定値を用ひれば



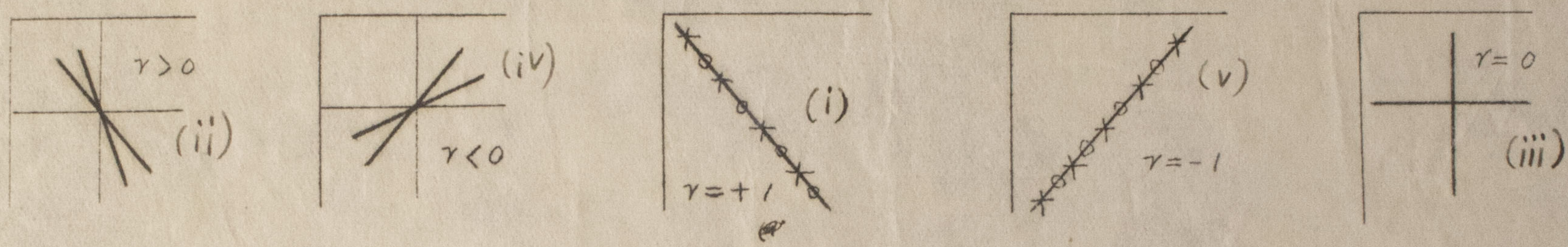
$l \qquad x = r y \qquad \tan\theta = \frac{1}{r}$

$l' \qquad y = r x \qquad \tan\theta' = r$

$r = +1, \qquad \theta = \theta' = 45^\circ$

$r = -1, \qquad \theta = \theta' = -45^\circ$

$r = 0. \qquad \theta = 90^\circ. \quad \theta' = 0$



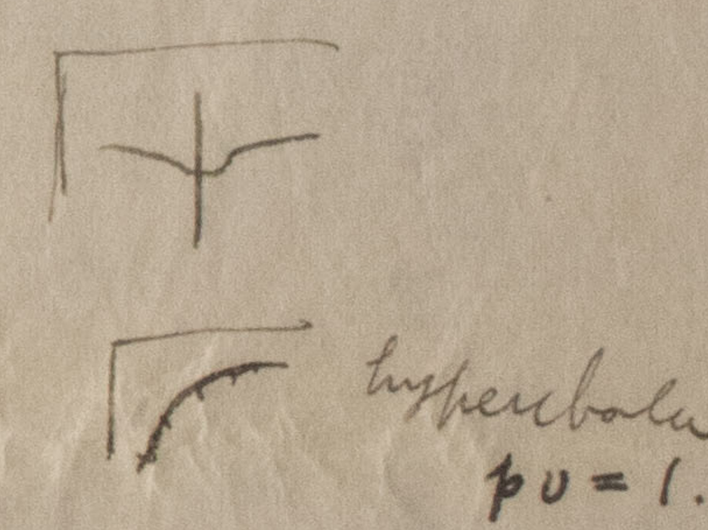
賃銀と救民數	$r = -0.66$
父の子供數と息子の子供數	$r = +0.066$
母の子供數と娘の子供數	$r = +0.213$

Ⅱ　非直線回歸の場合

この場合には

(1)　$r = 0$　なればとて必ずしも　無関係とは断定し得ない。

(2)　完全相関でも　必ずしも　$r = \pm 1$　にならないことがある。



相　関　比　correlation ratio

$$\eta_{(x)} = \frac{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_k f_k (M_k - M_{(x)})^2}}{\sigma_{(x)}},$$

$$\eta_{(Y)} = \frac{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_i f_i (M_i - M_{(Y)})^2}}{\sigma_{(Y)}},$$

この二つの相関比が

共に　0　なるときは無関係

共に　+1　なるときは完全相関。

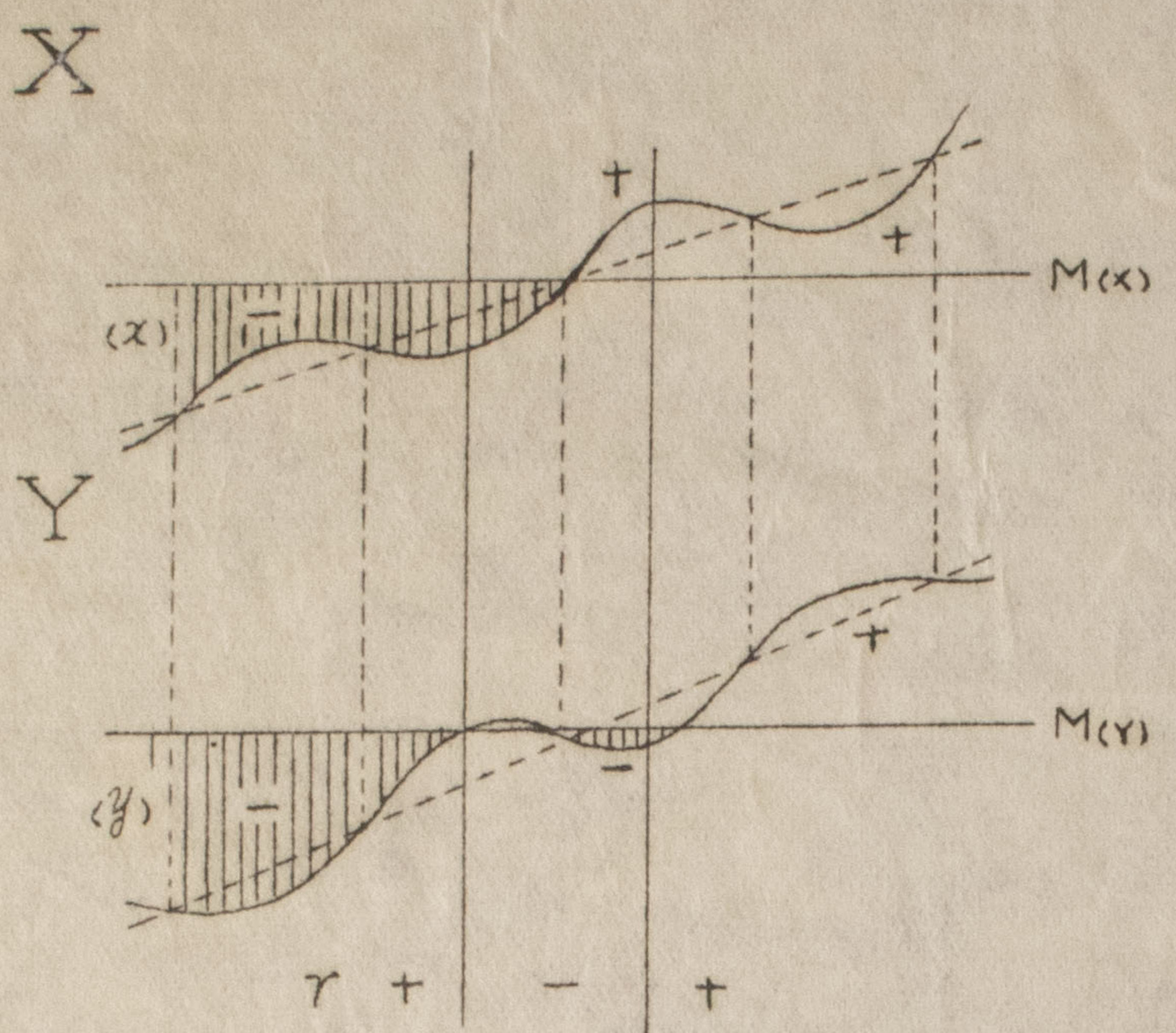
$$\eta = \sqrt{\frac{\eta_{(x)}^2 + \eta_{(Y)}^2}{2}}$$

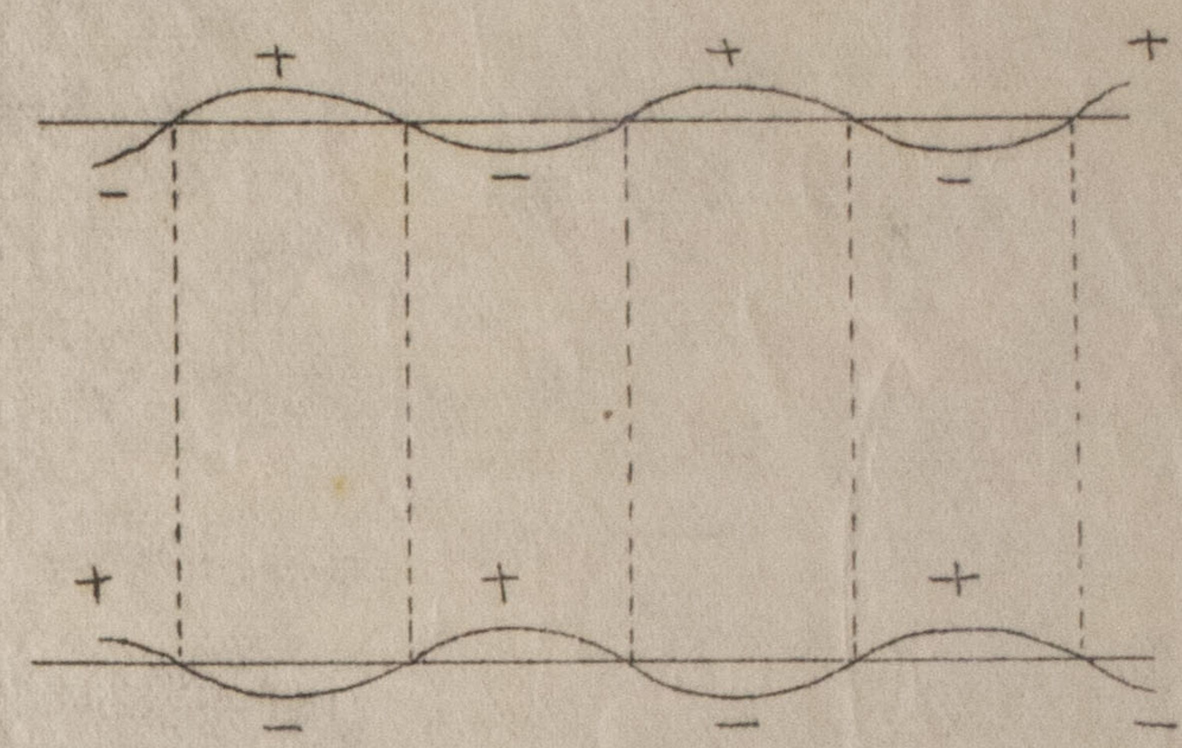
多變量の相関

相関関係の測定に関する注意。(二つの事象の數値の中，何と何とを比較するが，本質的にその関係を明にする所以であるか)。それは特に時系列の場合に於て最も重要性を帯ぶ。

第六章　時　系　列　time series.

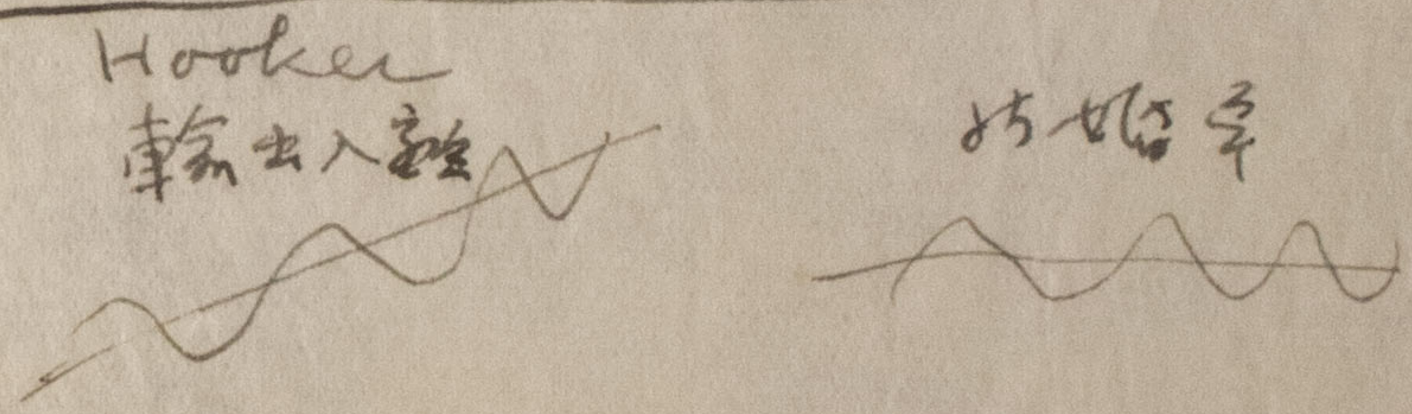
米の産額Xと米價Y

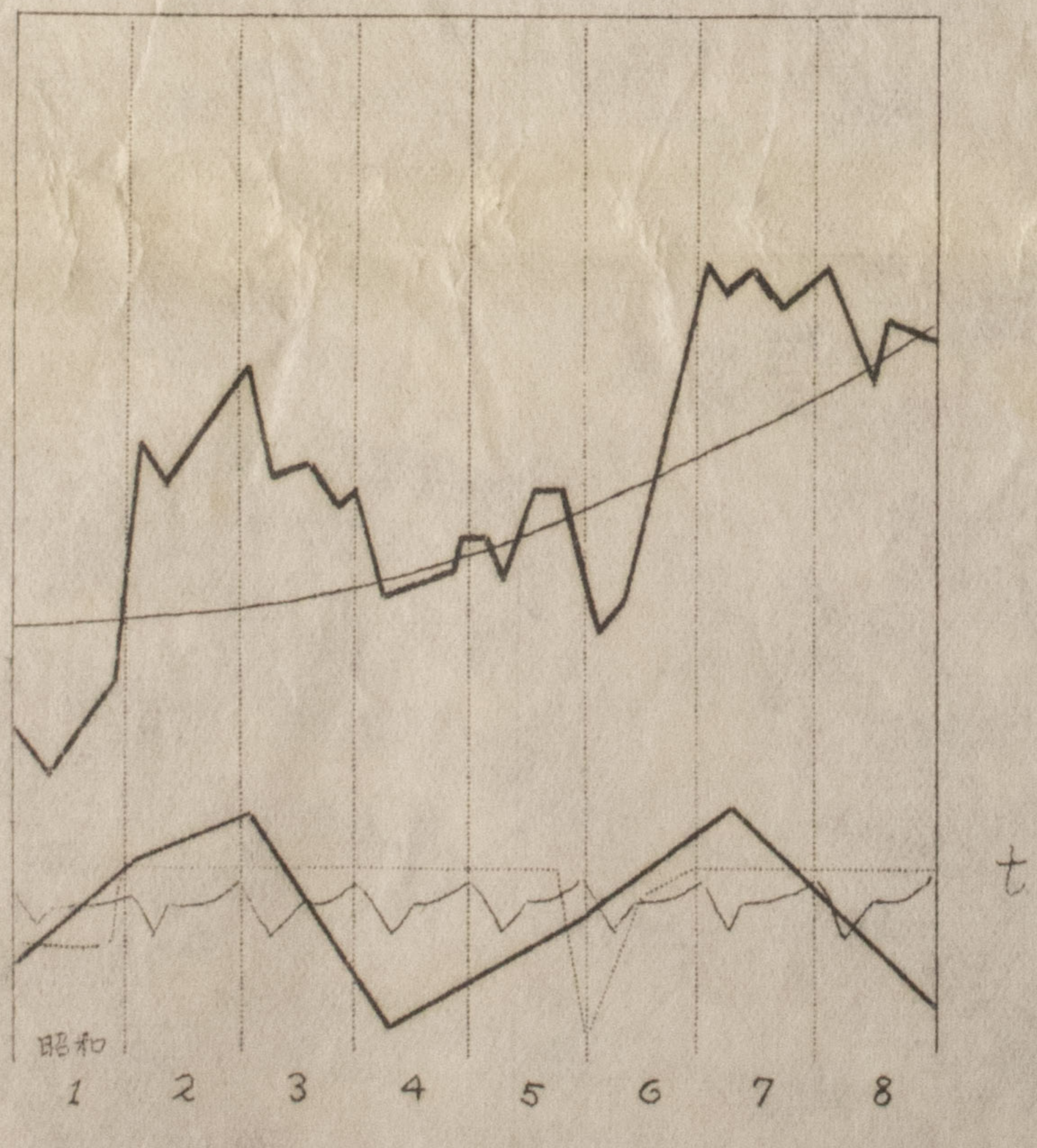




XとYとを其の儘で比較すれば，短期間では負の相関係數を得ることもあれど，長期間では，共に趨勢的に增して居る。結局　$r > 0$。

一般的趨勢を除いて考へれば，明かに　$r < 0$.





時系列の分析

Ⅰ. 趨勢

Ⅱ. 季節的變化

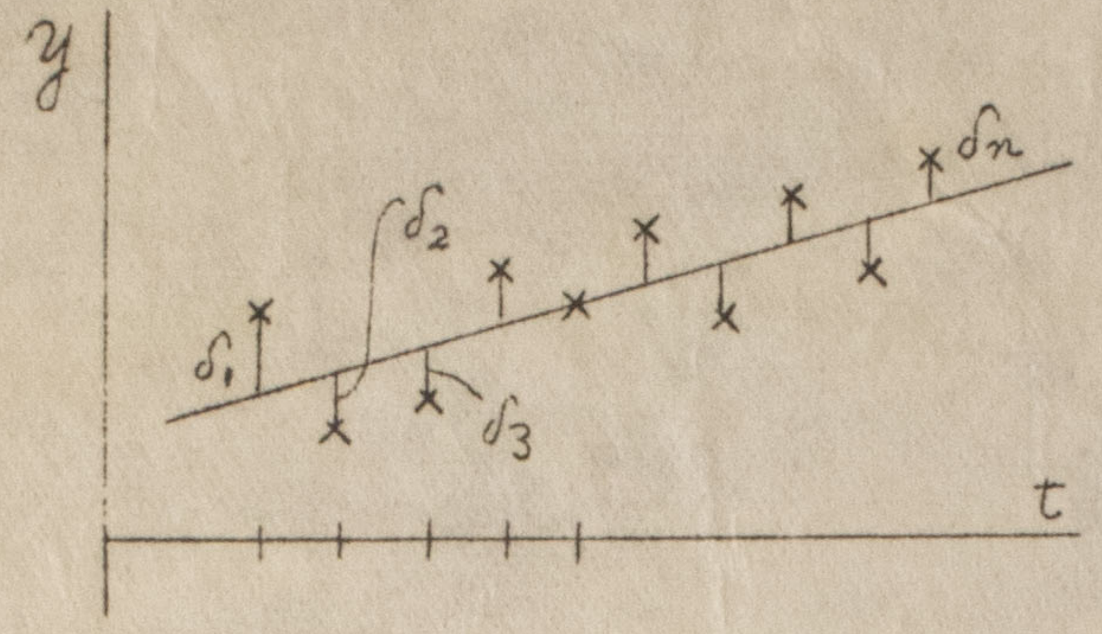
Ⅲ. 循環的變化

Ⅳ. 不規則變化

趨勢の求め方に就ての二問題

(1) 最も適當な函數の形を選ぶこと。　(2) 次に函數の中の未定の係數を定めること。

この第二の問題は，最小自乘法によつて解かれる。



$\delta_1^{\,2}+\delta_2^{\,2}+\text{-----}+\delta_n^{\,2}=\sum\delta_K^{\,2}$ を最小にする様に係數を定める.

直線の場合

$$y=a+bt \qquad S\equiv\sum\left[y_K-(a+bt_K)\right]^2=Min \qquad \frac{\partial S}{\partial a}=0,\ \frac{\partial S}{\partial b}=0.$$

$a,\ b$ は次の二式から求める。

$$\begin{cases} na+b\cdot\sum t_K=\sum y_K \\ a\cdot\sum t_K+b\cdot\sum t_K^2=\sum t_K y_K \end{cases}$$

勢率米價
農商務省.　豫定説

抛物線の場合　$y=a+bt+ct^2,$

$$\begin{cases} na+b\sum t_K+C\sum t_K^2=\sum y_K, \\ a\sum t_K+b\sum t_K^2+C\sum t_K^3=\sum t_K y_K, \\ a\sum t_K^2+b\sum t_K^3+C\sum t_K^4=\sum t_K^2 y_K, \end{cases}$$

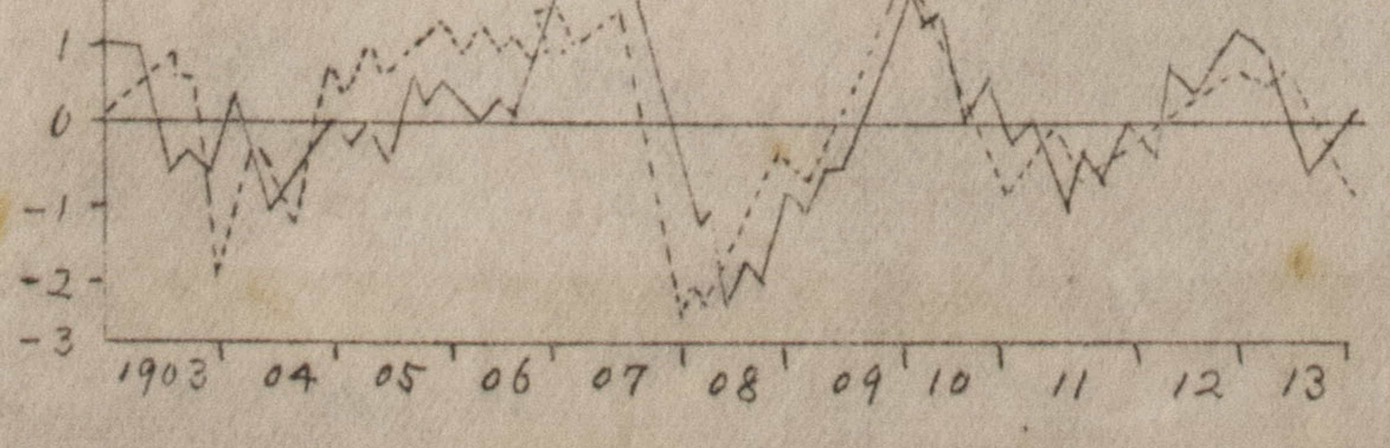
季節的變化の求め方.

時系列から　趨勢と季節的變化を除き去つたものは循環的變化と, 不規則變化の結合である。パースンズは　此二者を　分離し得ないと考へ, その結合を標準測定値に直した數値を循環（cycle）と呼んだ。

Mitchell,　Business cycles.

Wagemann,　Konjunkturlehre（小島昌太郎譯 景氣變動論）

時系列の比較中最も重要なるは　サイクル　の比較である。



アメリカ　[大戰前]

物價指數のサイクル（實線）

銑鉄生産額のサイクル（点線）

恐慌の週期　約４０個月.

— 終 —