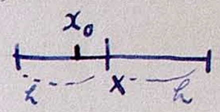
L. R. Ford, Solution of equations by ~~means~~ the method of successive approximations,
Amer. Math. Monthly, 32 (1925), p. 272.

1. Fundamental Theorem I. eq. $x = f(x)$ ノ一ツノ real root ヲ X トシ、且ツ

$|f'(x)| < M < 1$ (continuous) interval R $(X-h \leqq x \leqq X+h)$

ナリトス。 R ノ中ノ一ツノ點ヲ x_0 トシ、



$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1), \quad \dots \quad x_n = f(x_{n-1}), \quad \dots$$

トスレバ

$$\lim x_n \to X$$

Proof. I. x_{n-1} ガ R ノ中ニアレバ x_n モ亦 R ノ中ニアル。

$$X = f(X).$$

$$x_n - X = f(x_{n-1}) - f(X) = f'(\xi_n)(x_{n-1} - X).$$

コヽニ ξ_n ハ x_{n-1} ト X トノ間ニアルカラ, R ノ中ニアル。

$$|x_n - X| < M\,|x_{n-1} - X| \leqq Mh < h$$

故ニ x_n ハ R ノ中ニアル。

從テ x_0 ハ R ノ中ニアルカラ, $x_1, x_2, \dots$ ハ皆 R ノ中ニアル。

II. $|x_n - X| < M\,|x_{n-1} - X| < M^2\,|x_{n-2} - X| < \dots < M^n\,|x_0 - X|$

$\therefore\ |x_n - X| \leqq M^n h.$ → approximationノ order

$M < 1$ ナルカラ $\lim |x_n - X| \to 0.$

2. General equation in one variable

$F(x) = 0$ ノ simple root ノ一ツヲ X トスル。 $F'(x)$ ハ continuous デ $F'(X) \neq 0$. ナルニ $F'(x)$ ハ X ノ附近デ符号ヲ変ヘナイ。なほ簡ノ爲ニ ソノ附近デ $F'(x) > 0$ ト見做スモ generality ヲ失ハヌ。即チ

$$0 < a < F'(x) < b \quad \text{in} \quad R \ (X-h \leqq x \leqq X+h).$$

(continuous)

A. c ヲ $0 < c < \frac{2}{b}$ ナル一ツノ const. ニトレバ,

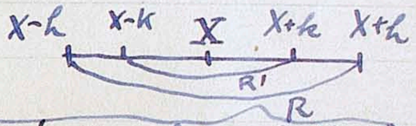
$$x = x - cF(x)$$

ハ interval R ニ於テ fundamental theorem ノ conditions ヲ満足スル。

Proof. $f(x) \equiv x - cF(x)$ トオケバ; $x = f(x)$. $X = f(X)$ ト $F(X)=0$ トハ equivalent ナリ.

次ニ
$$f'(x) = 1 - c\,F'(x)$$
interval R ノ中デハ
$$-1 < \underline{1 - cb < f'(x) < 1 - ca} < 1$$
$|1-cb|$, $|1-ca|$ ノ 中最大ナル モノヲ M トスレバ;
$$|f'(x)| < M < 1.$$

$\boxed{B.}$ 次ノ性質ヲ有スル $\varphi(x)$ ヲ取ル
$$0 < \varphi(x) < \frac{2}{b} \quad \text{in } R$$
~~$\varphi(x)$ limited in R~~



$$|\varphi'(x)| < Q \quad \text{in } R$$
subinterval R' $(X-k \leqq x \leqq X+h)$ ノ R

然ルトキハ
$$x = x - \varphi(x)\,F(x)$$
ハ theorem ノ conditions ヲ満足スル様ナ が存在スル.

Proof. $f(x) \equiv x - \varphi(x)F(x)$ トオケバ $X = f(X)$ ト $F(X)=0$ トハ equivalent. ($\varphi(x)$ ハ pos. ナレバ)

二ツノ constants c, c' ヲ
$$0 < c' < \varphi(x) < c < \frac{2}{b}$$
ナル様ニトル.
$$f'(x) = 1 - \varphi(x)F'(x) - \varphi'(x)F(x)$$
$$|f'(x)| \leqq |1 - \varphi(x)F'(x)| + Q\,|F(x)|$$
$$-1 < 1 - cb < 1 - \varphi(x)F'(x) < 1 - c'a < 1.$$
$|1-cb|$, $|1-c'a|$ ノ中 大ナルモノヲ M' トスレバ, $M' < 1$.
$$|f'(x)| < M' + Q\,|F(x)|.$$

然ルニ $F(x)$ ハ X ニ於テ 0 ナレバ, 次ノ subinterval R' ~~中ニ 点 X ニ於テ 0 ナルカラ,~~ が存在スル.
$$|F(x)| < \frac{M-M'}{Q}, \quad M' < M < 1 \quad \text{in } R'$$
ナル様ニ M ヲ選ブ事ガ出来ル.

故ニ R' ノ中デハ
$$|f'(x)| < M' + M - M' = M < 1.$$

Particular case:

$$\varphi(x)=\frac{1}{F'(x)}.$$

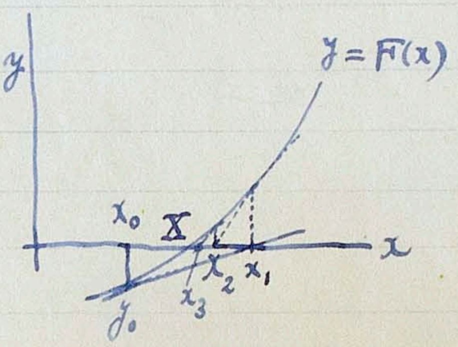
interval Rヲ適當ニ定メテ $a>\frac{b}{2}$ ニ取ル; $0<a<F'(x)<b$ ハ $0<\frac{1}{b}<\frac{1}{F'(x)}<\frac{1}{a}<\frac{2}{b}$

$$0<\frac{1}{F'(x)}<\frac{2}{b}.$$

$$\varphi'(x)=-\frac{F''(x)}{[F'(x)]^2}$$

conditions: $a>\frac{b}{2}$, $F''(x)$ ノ existence, limited ナル

コレ即チ Newton-Raphson method ニ外ナラヌ.



$$\underset{0}{Y}-y_0=F'(x_0)(\underset{x_1}{X}-x_0)$$

$$x_1=x_0-\frac{y_0}{F'(x_0)}$$

コノ速ヒ方ガ ~~他ノ方法ニ~~ 優ル理由ハ

$$f(x)=x-\frac{F(x)}{F'(x)},\qquad f'(x)=\frac{F''(x)F(x)}{[F'(x)]^2}$$

$$=1-\frac{[F'(x)]^2-F''(x)F(x)}{[F'(x)]^2}$$

$$x_n-X=f'(\xi_n)(x_{n-1}-X)$$

$\xi_n\to X$ ナルトキ $F(x)\to 0$ トナル

故ニ

$$\lim_{x_n\to X}\frac{x_n-X}{x_{n-1}-X}\to 0$$

3. System of equations.

$$x=f(x,y,z),\qquad y=g(x,y,z),\qquad z=h(x,y,z).$$

(X,Y,Z) ヲ domain R $\begin{cases} X-k\leqq x\leqq X+k\\ Y-k\leqq y\leqq Y+k\\ Z-k\leqq z\leqq Z+k.\end{cases}$

内ニ於ケル root トシ, 且ツ

$$\left.\begin{array}{l}\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|<r<1,\\ \left|\frac{\partial g}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial g}{\partial y}\right|+\left|\frac{\partial g}{\partial z}\right|<r<1,\\ \left|\frac{\partial h}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial h}{\partial y}\right|+\left|\frac{\partial h}{\partial z}\right|<r<1,\end{array}\right\}\text{ in } R$$

(x_0,y_0,z_0) ヲ domain R ニアルトセ, 且ツ

$x_n=f(x_{n-1},y_{n-1},z_{n-1})$, $y_n=g(x_p,y_p,z_p)$, $z_n=h(x_{n-1},y_{n-1},z_{n-1})$ トスレバ $x_n\to X$, $y_n\to Y$,

$(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ ハ domain R ノ中ニアルトセバ; (x_n, y_n, z_n) モ亦 R ノ中ニアル. 何トナレバ

$$x_n - X = f(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}) - f(X, Y, Z)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{\xi_{n-1}\\ \eta_{n-1}\\ \zeta_{n-1}}} (x_{n-1} - X) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\vdots} (y_{n-1} - Y) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{\vdots} (z_{n-1} - Z)$$

$(\xi_{n-1}, \eta_{n-1}, \zeta_{n-1})$ ハ R ノ中ニアル. 故ニ $|x_{n-1} - X|$, $|y_{n-1} - Y|$, $|z_{n-1} - Z|$ ノ中最大ナルモノヲ N_{n-1} トセバ

ξ_{n-1} ハ x_{n-1} ト X トノ間ニアルモノ

$$|x_n - X| < \left\{ \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \right\}_{\substack{\xi_{n-1}\\ \eta_{n-1}\\ \zeta_{n-1}}} N_{n-1} < r N_{n-1} \leqq r k < k$$

同様ニ $|y_n - Y| < k$

$|z_n - Z| < k$.

故ニ (x_n, y_n, z_n) ハ R ノ中ニアル.

$$|x_n - X| < r N_{n-1} < r^2 N_{n-2} < \cdots < r^n N_0$$

$$x_n \to X$$

Generalization of Newton-Raphson method.

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0, \quad H(x, y, z) = 0.$$

assumption:

(1) Jacobian $J = \begin{vmatrix} F_x & G_x & H_x \\ F_y & G_y & H_y \\ F_z & G_z & H_z \end{vmatrix} \neq 0$ in R. (

(2) $|F_{xx}|, \ldots$ limited in R.

$$x = x - \frac{1}{J} \begin{vmatrix} F & G & H \\ F_y & G_y & H_y \\ F_z & G_z & H_z \end{vmatrix}, \quad y = y - \frac{1}{J} \begin{vmatrix} F_x & G_x & H_x \\ F & G & H \\ F_z & G_z & H_z \end{vmatrix},$$

$$z = z - \frac{1}{J} \begin{vmatrix} F_x & G_x & H_x \\ F_y & G_y & H_y \\ F & G & H \end{vmatrix}$$

ガ theorem ノ condition ヲ満足スル sub domain R' ガ

4. double approximation

$$x = f(x)$$

ノ root ヲ X in R $\quad X-h \leqq x \leqq X+h$.

$$|f'(x)| < M < 1.$$

$f_1(x), f_2(x), \ldots\ldots$ ハ

$$|f_n(x) - f(x)| < (1-M)h \quad (n=1,2,\cdots) \quad \text{in } R$$

$$f_n(x) \to f(x) \quad \text{uniformly} \quad \text{in } R$$

ナル sequence of functions トスル.

今 x_0 ヲ R ニトリ,

$$x_1 = f_1(x_0), \quad x_2 = f_2(x_1), \quad \cdots \quad x_n = f_n(x_{n-1}), \cdots$$

トスレバ,

$$x_n \to X.$$

practical ニ用ヒラル

For example. expansion ノ最初ノ few terms.
interpolation formula
rough graph