物理学ノ基本的法則ニ於テ空間ノ三次元性ガ如何ナル役目ヲナスカ.

P. Ehrenfest, Annalen d. Physik, Bd. 61 (1920), pp. 440–446.

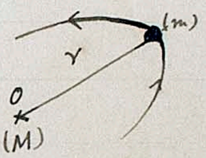
I. gravity ト planet ノ運動

n th dimension ノ space R_n ニ於ケル引力ノ法則ヲ $-\kappa \frac{Mm}{r^{n-1}}$ トス. (…central force ニスギナイ) $(\kappa > 0)$

然ラバ Potential energy ハ

$$V(r) = -\kappa \frac{Mm}{(n-2)r^{n-2}} \qquad n \geqq 3$$

$$= \kappa Mm \log r \qquad n = 2.$$



然ルトキハ equation of motion ハ

$$m\frac{d^2x_h}{dt^2} = -\kappa \frac{Mm}{r^{n-1}}\frac{x_h}{r} = -\frac{\partial V}{\partial x_h} \qquad (h = 1, \dots n)$$

planet ~~orbit~~ ハ plane motion ヲナスコト容易ニ知レル. 故ニソノ plane 上ニ polar coordinates r, θ ヲ取レバ, energy ノ equat トシテ

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = E \quad (= \text{const})$$

~~areal velocity~~ angular momentum ノ equat トシテ

$$mr^2\dot{\theta} = \Theta \quad (= \text{const.})$$

$\dot{\theta}$ ヲ eliminate スレバ

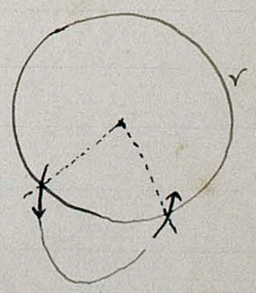
$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{2V}{m} - \frac{\Theta^2}{m^2r^2}} \quad \cancel{= \frac{1}{r}\sqrt{Ar^2 + Br}}$$

(I). $n \geqq 3$. ノ場合.

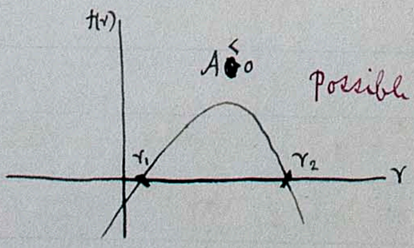
$$\dot{r} = \frac{1}{r}\sqrt{Ar^2 + Br^{4-n} - C^2}$$

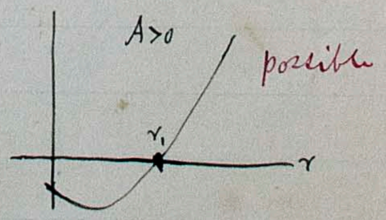
$A = \frac{2E}{m}$,

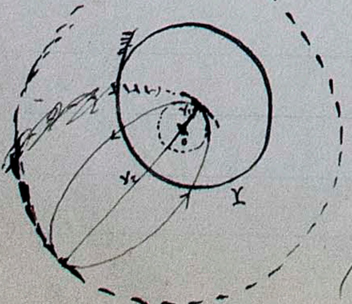
$B = \frac{2\kappa M}{n-2} > 0.$

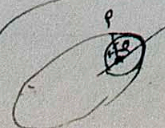


$n = 3$. $f(r) = Ar^2 + Br - C^2$. parabola $f(0) = -c^2 < 0$.



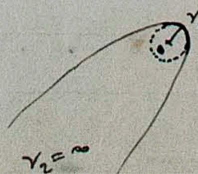






$\rho = \frac{p}{2}\frac{1}{1+e\cos\theta}$

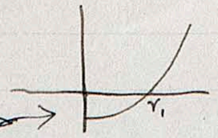
$\rho' = \frac{p}{\ } \frac{1}{\ }$ $\qquad \rho \geqq \rho'$



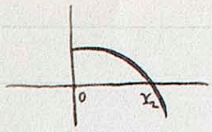
$n=4 \qquad f(r) = Ar^2 + B - C^2$

parabola

A>0

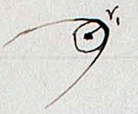


A<0

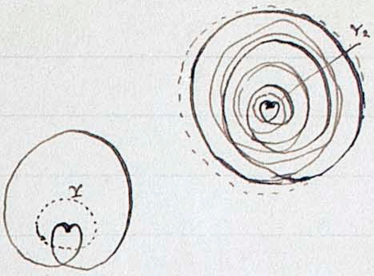


$r=0$ ニ行ケ

$\dot{r}=\infty$



possible



太陽ニ
落チテ
シマウ

$n=5 \qquad f(r) = Ar^2 + \frac{B}{r} - C^2.$

A<0 A>0

$r=0$ ニ行ケ

$\dot{r}=\infty$

$r=0$ ニ行ケ

$\dot{r}=\infty$

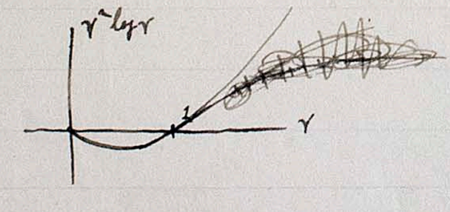
$n=6,7\ldots \qquad f(r) = Ar^2 + \frac{B}{r^p} - c^2 \qquad$ n=5 ト同様

. . . .

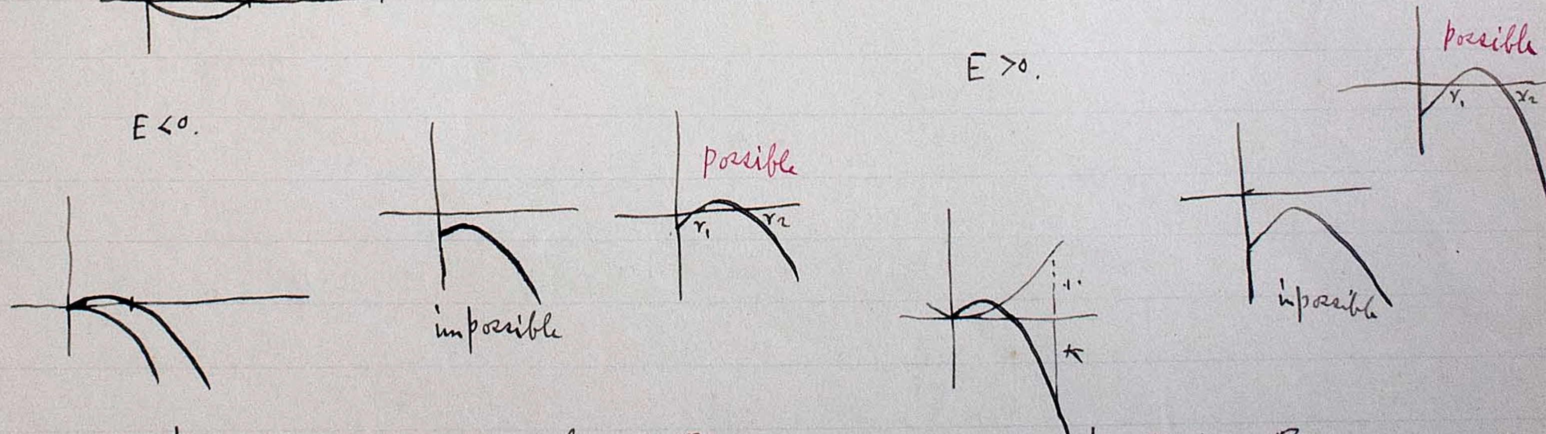
$n=2. \qquad \dot{r} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{2E}{m}r^2 - 2kMr^2\log r - \frac{\Theta^2}{m^2}}.$

$\lim_{r=+0} r^2 \log r = \lim \frac{\log r}{r^{-2}} = \lim \frac{\frac{1}{r}}{-2r^{-3}} = -\frac{r^3}{2r} = 0.$

max: $\frac{d}{dr}(r^2\log r) = 2r\log r + \frac{r^2}{r} = 0. \qquad r(2\log r + 1) = 0. \qquad r=0, \quad \log r = -\frac{1}{2}.$



E<0. E>0.

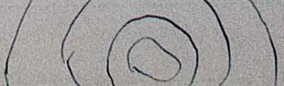


n	r ノ二ツノ有限ナル positive values ノ間ノ運動		infinity ヘノ運動
2	possible :	(close セズ)	impossible
3	possible :	(close ス)	possible
4, 5, …	impossible		possible

Bertrand's theorem (1873): central force ~~[illegible]~~ F(r) ニヨリテ、orbit ガ closed スル場合ハ $F(r) = -kr$, $F(r) = \frac{k}{r^2}$ ニ限ル.

initial condit. ノ如何ニ拘ラズ,

其ニ finite ノ距離ニアル



II. electric field ト magnetic field ノ duality.

$R_n(x_1, \dots x_n)$ ニ 新ニ $x_0 = ict$ ヲ導入シテ $n+1$ dimension ノ (space-time) universe ヲ作ル. R_3 ニ於ケル relativity theory ニ於テ考ヘル Vierer Potentials ニ相当セテ, retarded potential ノ components $\varphi_0, \varphi_1, \dots \varphi_n$ ヲ作ル.

然ルトキハ rotation ノ component

$$\frac{\partial \varphi_h}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_h} \qquad (h, k = 1, \dots n)$$

ハ magnetic field ニ相当ス. ソノ数ハ $\frac{n(n-1)}{2}$ アリ.

マタ

$$\frac{\partial \varphi_h}{\partial x_0} - \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_h} \qquad (h = 1, \dots n)$$

ハ electric field ニ相当ス. ソノ数ハ n アリ.

ソコデ若シ コノ二ツノ field ガ dual ナリトスレバ

$$\frac{n(n-1)}{2} = n$$

故ニ

$$n = 3$$

ナラザルベカラズ.

同様ノ事実ガ translat. ト rotation ノ duality
velo.
force ト moment ノ --
rotat.
ニツキテモ成立ス.

III. Wave ノ傳播.

Wave ノ differential equat.

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0.$$

ノ solution ノ性質ヲ考ヘル.

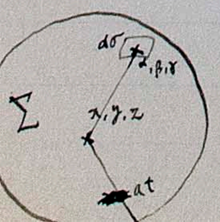
$n=3$ ノ場合. $$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

t=0 ノトキ $\quad u = f(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \varphi(x, y, z)$

initial condit. ヲ満足スル general solut. ハ,

$$(1) \qquad u(x, y, z, t) = \Phi(x, y, z, t) + \frac{\partial F(x, y, z, t)}{\partial t}$$

$$\left\{ \begin{aligned} F(x, y, z, t) &= \frac{1}{4\pi a} \iint_{(\Sigma)} \frac{f(\alpha, \beta, \gamma)}{at} d\sigma \\ \Phi(x, y, z, t) &= \frac{1}{4\pi a} \iint_{(\Sigma)} \frac{\varphi(\alpha, \beta, \gamma)}{at} d\sigma \end{aligned} \right.$$



若モ initial conditi ヲ右ケハ

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~ $ru=\Psi$ $\qquad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

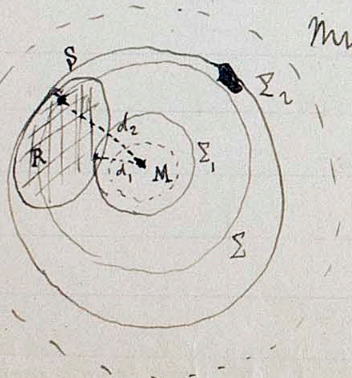
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\qquad \psi=\psi_1(r-at)+\Psi_2(r+at)$$

$$u=\frac{1}{r}\left[\psi_1(r-at)+\psi_2(r+at)\right]$$ ψ_1,ψ_2 ハ arbitrary f.

コレガ initial condition ヲ満足スル様ニ ψ_1,ψ_2 ヲ定ムレバ、前者ヲ得ルコト分ル也.

即チ 点(x,y,z)ニ於ケル任意ノ瞬間 ~~moment~~ t ニ於ケル disturbance u ハ、ソノ点(x,y,z)ヲ centre トシ at ヲ半径トシテ画ケル sphere Σ 上ノ u, $\frac{\partial u}{\partial t}$ ノ initial values ノ mean ニヨリテ決定セラル.

今 disturbance ガ R ナル region ニ於テ起リシトス. R ノ面ヲ S トス. R 以外ノ one point M ヲ取リ, M ヨリ S ヘノ ~~max~~ distance ノ max, min ヲソレゾレ d_2, d_1 トス. R 以外ノ点ニ於テハ $f=0,\ \varphi=0$.

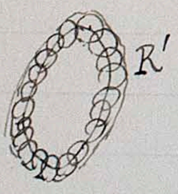


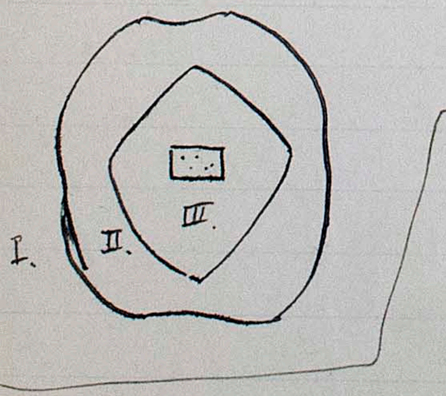
t ガ $t<\frac{d_1}{a}$ ナル間ハ sphere Σ ハ R ~~ト上ニ~~ ト共通 ~~[illegible]~~ 点ヲ有セズ. 故ニ $u(x,y,z,t)=0$.

t ガ $t>\frac{d_2}{a}$ ナルトキハ Σ ハマタ R ト共通点ヲ有セズ. 故ニ $u(x,y,z,t)=0$.

即チ t ガ $\frac{d_1}{a}\leq t\leq\frac{d_2}{a}$ ナル時間ニ於テノミ M ニ於テ vibrat ガ起ル.

t ナル ~~[illegible]~~ 瞬間ニ於テ vibrat. 即チ vibrat ノ前部 後部 ハ a ナル velocity ヲ以テ進ム. vibrat ~~ノ region~~ ハ ~~[illegible]~~ R ノ面 S ノ各点ヲ中心トシ at ヲ normal ニトレル point ノ locus (parallel surface) ナリ ~~ノ parallel surface ノ~~ 相当 II





$n=2$ ノ場合ハコレト趣ヲ異ニス.

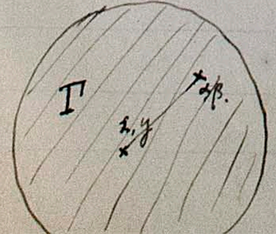
$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}.$$

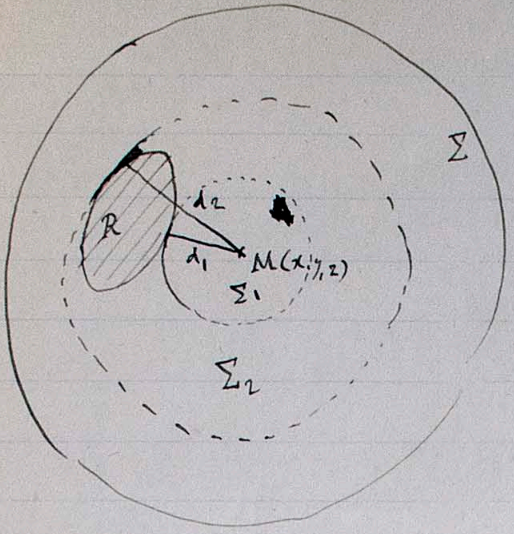
$$\left.\begin{aligned}u&=f(x,y)\\ \frac{\partial u}{\partial t}&=\varphi(x,y)\end{aligned}\right\}\text{ from } t=0$$

ノ general solution ハ

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\iint_\Gamma\frac{\varphi(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta}{\sqrt{a^2t^2-(x-\alpha)^2-(y-\beta)^2}}$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\iint_\Gamma\frac{f(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta}{\sqrt{a^2t^2-(x-\alpha)^2-(y-\beta)^2}}.$$





R 以外ノ点ニ於テハ $f=0,\ \varphi=0$.

$t<\frac{d_1}{a}$ ナル間ハ circle Σ ハ R ト共通部ヲ有セズ; 故ニ $u(x,y,t)=0$.

然ルニ $t>\frac{d_2}{a}$ トナルモ Σ ハ R ト共通部ヲ有ス. 故ニ $u(x,y,t)\neq 0$. 一般ニハ

即チ 前ノ wave front ハ存在スレドモ, 後ノ wave front ハ存在セズ. 即チ wave front ガ来ル迄ハ何時マデモ vibration ヲツヾケル

$n=1$ ノ場合 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

ニハ 即チ 前後ノ wave front アルノミナリ.

Ehrenfest ハ曰ク, 一般ニ R_{2n+1} ニ於テハ R_3 ト同様, R_{2n} ニ於テハ R_2 ト同様ナリト. 即チ 彼ニ従ヘバ 奇数次元ノ space ナラバ 普通ノ wave ノ伝播ノ現象ヲ呈スト.
[Ehrenfest ノ考ヘル所ニテハ, 即チ 前ノ wave front ト後ノ wave front トガ存在スルコトガ, wave ノ essential property ナリトスルナリ]
[彼ハ証明ヲ与ヘズ; 予ハ未ダ十分ニ Tedone, Annali di math. ヲ研究セズ]

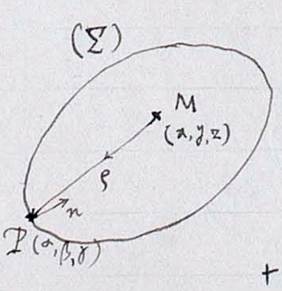
然ルニ Duhem (Hydrodynamique, t. II, 1891) ハ次ノ如ク考ヘテ居ルナリ. Kirchhoff ハ

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

ノ solution トシテ 有名ナル公式

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi}\iint_{(\Sigma)}\left\{\frac{\partial u(\alpha,\beta,\gamma,t-\frac{\rho}{a})}{\partial\rho}\cos(n\rho)-\frac{1}{\rho}\frac{\partial u(\alpha,\beta,\gamma,t-\frac{\rho}{a})}{\partial n}\right\}d\sigma \tag{2}$$

ヲ得タリ. [(Σ) ヲ sphere ニモテ変形スレバ (1) ニ帰着スルナリ]



コハ所謂 Huygens ノ principle ノ mathematical expression ナリ. 何トナレバ (x,y,z) ニ於ケル vibrat. ハ, ソレヲ取リマク closed surface ノ element $d\sigma$ ニ起ル vibration ノ合成ト見做スコトヲ得. $t-\frac{\rho}{a}$ ナルハ $\frac{\rho}{a}$ 時間ノ後ニハ M ニ来ルベケレバナリ. P ニアリシ vibrat. ハ コノ公式ハ上ノ如キ結果ヲ

ウキテイ 例ヘバ Drude, Optik ヲ見ヨ.

然ルニ Kirchhoff ノ証明ハ Green ノ theorem ヲ変形シテ得タルモノ 此ノ考ヘ

formula ニ $u=\frac{\psi(t-\frac{r}{a})}{r}$ $u=\frac{\psi(r-at)}{r}$

ヲ置換セテ得ラレルモノナリ。　即チ ~~Kirchhoff~~ Huygens ノ principle ハ
Kirchhoff ノ証明ハ $\underset{\text{wave equat ガ}}{\overset{\text{essential point ハ}}{}}$ $u=\dfrac{\psi(r-at)}{r}$
ナル形ノ solut ヲ有スル点ニアリ。

ミカルニ

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

ガ

$$u=\overset{\lambda}{\phi}(r)\,\overset{\psi}{\phi}(r-at)\qquad r^2=\cancel{(x_1-x_{10})^2+\cdots+(x_n-x_{n0})^2}\ x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$$

(ψハ arbitrary function)

ナル形ノ solut ヲ有スル場合ハ　$n=1$, $n=3$ ニ限ル。　何トナレバ

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},\dots,\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ヲ作リテ代入スレバ

$$\left[\frac{n-1}{r}\phi'_\lambda(r)+\phi''_\lambda(r)\right]\Phi_\psi(r-at)+\left[\frac{n-1}{r}\phi_\lambda(r)+2\phi'_\lambda(r)\right]\frac{\partial\Phi_\psi(r-at)}{\partial r}=0.$$

コレガ arbitrary funct Φ_ψ ニツキテ成立スルタメニハ

$$\left.\begin{aligned}&\frac{n-1}{r}\phi'_\lambda(r)+\phi''_\lambda(r)=0\\&\frac{n-1}{r}\phi_\lambda(r)+2\phi'_\lambda(r)=0\end{aligned}\right\}\longrightarrow\ \overset{\lambda}{\phi}(r)=K\cdot r^{-\frac{n-1}{2}}$$

コレヲ第一式ニ代入スレバ

$$\frac{n-1}{r}\phi'_\lambda(r)+\phi''_\lambda(r)=-\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}K\,r^{-\frac{n+3}{2}}=0$$

∴

$n=1$,　$n=3$.

$\downarrow$　　$\downarrow$

${}_\lambda\phi(r)=K$　　${}_\lambda\phi(r)=\dfrac{K}{r}$.

次ニ Volterra ノ (Acta mathematica, 18 (1894), p. 221) ~~[illegible]~~ ハ

$$u=\phi_\lambda(x_1,x_2,\dots,x_n)\,\Phi_\psi(r-at)\qquad r=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$$

ナル形ノ solut ハ n ノ如何ニ拘ハラズ存在ス。然レドモ $n=1, n=3$ ヲ除ケバ、　$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ ヲ含ム任意ノ region ニ於テ solutn ハ singularity ヲ有ス。

コノコトヲ証明セリ。

故ニ 若シ

$$u=\cancel{\quad}\ \lambda\cdot\overset{\psi}{\phi}(r-at)$$

ガ wave ニ　essential ナル形トスレバ　$n=1, n=3$ ノ外ニ R_n ハ存在セザルコトトナル。

然レドモ　コノ form ガ wave ニ essential ナリヤ否ヤ、若シ essential ニアラズトセバ 吾人ハ　R_{2n+1} ノ wave ニツキテ更ニ研究スル要アリ。

ソレガ為メニ

Ehrenfest ハ R_{2n+1} ニ於ケル retarded potential ヲ研究セリ

retarded pot. ハ

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{2n+1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \rho$$

ノ solut. トシテ、ソノ結果ハ

ρ ニ就テ t ノ代リニ $[\rho]_{t-\frac{r}{a}}$

R_3: $u = \frac{1}{4\pi}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\frac{[\rho]}{r}\,dw \qquad r=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_{2n+1}^2}$

R_5: $u = \frac{1}{8\pi^2}\iiiint\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} dw\left\{\frac{[\rho]}{r^3}+\frac{1}{a}\frac{\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}\right]}{r^2}\right\} \qquad \left[\frac{\partial\rho}{\partial t}\right]_{t-\frac{r}{a}}$

R_7: $u = \frac{5}{11\pi^3}\iiiint\!\!\iiint_{-\infty}^{+\infty} dw\left[\frac{[\rho]}{r^5}+\frac{1}{a}\frac{\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}\right]}{r^4}+\frac{1}{a^2}\frac{\left[\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}\right]}{r^3}\right]$

… … ….

r ガ極メテ大ナルトキハ最後ノ term ノミガ影響ス。故ニ R_5, R_7, — ニ於テハ、electron ノ motion ハ R_3 ニ於ケルト全ク趣ヲ異ニス。故ニ space ハ三次元ナラザルベカラズ。

IV. Monoatomic gas ノ specific heat ノ ratio

$$\frac{c_p}{c_v} = 1\frac{2}{3}.$$

$$\frac{c_p}{c_v} = 1+\frac{2}{n}$$

ナルコトヲ証明ス。

普通アリフレタ証明ハ…困難ナリ。

~~Maxwell ノ證明ハ~~

Jeans (gas theory, p. 115) ハ

$$p = m\nu\overline{u^2}.$$

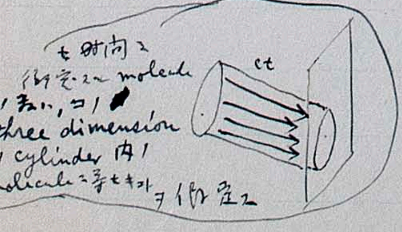
p ハ pressure of gas.
m ハ一ノ molecule ノ mass.
ν ハ unit volume 中ノ molecule ノ数.
$\overline{u^2}$ ハ x 軸ノ方向ノ velocity u^2 ノ mean.

ヲ dimension n ニ関係ナキ証明ヲ与ヘタリ。故ニ

$$p = m\nu\overline{u_1^2} = m\nu\overline{u_2^2} = \cdots = m\nu\overline{u_n^2}.$$

$$= \frac{m\nu}{n}\left(\overline{u_1^2}+\overline{u_2^2}+\cdots+\overline{u_n^2}\right)$$

$$= \frac{m\nu}{n}\overline{c^2}. \qquad \text{mean of } c^2 \text{ (velocity)}$$



コレヨリ例ハ Jäger (p. 29) ニ従フ。

他ニ、Boyle, Gay-Lussac, Avogadro 等ハ dimension ニ無関係ニ成立ス

V. 其ノ外二三ノ事.

1. radiation ノ theory ニ於ケル Stefan-Boltzmann ノ公式.

$$E = \sigma T^4 \qquad E = \sigma T^{n+1}.$$

Wien ノ ~~Verschiebungsgesetz~~ displacement law

$$\rho = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right) \qquad \rho = \nu^n f\left(\frac{\nu}{T}\right)$$

2. Bohr atom ニ就テノ spectrum.

$\left.\begin{array}{l} n=2. \\ n>4 \end{array}\right\}$ infinity ニ於テ point of condensat' ヲ持ツ.

$n=4.$ Degeneration ヲ起ス. (?)

arge

3. 疑問

Periodic system ノ 8.

Balmer ノ formula

$$\nu = N\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) \text{ ノ exponent } 2.$$

~~Pythago~~ $ds^2 = \sum g_{hk}\, dx_h\, dx_k$ ノ 2.

コレ等ハ dimension ニ関係ナキカ.