Lectures on Projective Geometry.

Introduction

[Historical notes. Object of this lecture]

コノ講義ノ主旨ヲ明ニスル為メニ、吾々ハ先ヅ projective geometry ノ史ヲ簡単ニ述ブルヲ要ス。

Wissenschaft トシテノ projective geometry ヲ創設セシハ Poncelet (1822 以前) ナリ。然レドモ古キニ溯レバ矢張リ希臘ニ帰ラザルヲ得ズ。I. Euclid (285 B.C.) ノ porisms, Apollonius (247 B.C.) ノ conic sections. Pappus (第四世紀) ニ至リテハ double ratio (anharmonic ratio) ガ projection ニ由テ不変ナリ

テフ fundamental theorem (発見) ヲ見ル。

Ⅱ. 文藝復興期ニ於テ伊太利ノ画家、建築家ガ perspective (透視画) ~~central projection~~ ノ理論ノ基礎ヲ述ベ、ソノ主ナルモノハ Alberti, Leonardo da Vinci (1452-1519) ナリ。其后 Ubaldo (1600) コレヲ数学的ニ考ヘタリ。彼レヲ以テ descriptive geometry ノ先駆者トスベキナリ。

次ニ Desargues (1593-1663), Pascal (1623-1662) アリ。前者ハ perspective triangle, involution ニ就テ、後者ハ conic ニ内接スル六辺形ニ就テヨク知ラル。彼等ニ就テ conic secti ニ関スル主要ナル theorem ハ近来発見セラレシトイフモノアリ。

Ⅲ. Descartes (1637) ガ coordinate geometry ノ発見ノ為メ synthetic geometry ハ衰ヘタリ。然レドモ de la Hire (1640-1718) ハ Desargues ノ事業ヲ(研究)継ギ、Lambert (1728-1777) ハ descriptive geometry ノ基礎ヲ建テ、其他 Newton (1642-1727), Maclaurin (1698-1746) 等アリ。然レドモ十八世紀ハ遂ニ analysis ノ時代ナリキ。Euler, (特ニ) d'Alembert, Lagrange, Laplace 等ノ偉大ナル analysis ハ geometry ヲシテ其光ヲ失ハシメタリキ。

Ⅳ. 此時ニ当テ天才 Monge (1746-1818) 出テ:

Application de l'analyse à la géométrie, 1795

Leçons de géométrie descriptive, 1799

ヲ著ハス。前者ハ differential geometry (ノ基礎ナリ)、後者ハ descriptive geometry 最初ノ書ニシテ且ツ projective geometry ヲ刺戟ス。現代ニ於ケル(綜合的) geometry ノ位地ヲ作レル第一人者ハ実ニ Monge 其人ナリトイフヲ得ナリ。コレ Monge ノ descriptive geometry ト Desargues-Pascal ノ geometry トノ聯結ヲ図リ(シハ実ニ) Carnot (1753-1823), Brianchon (1783-1864), 特ニ Poncelet ナリ。

V. Poncelet (1788-1867) ノ大著

Traité des propriétés projectives des figures, 1822

ハ実ニ projective geometry ニ関スル最初ノ書ナリ。 Poncelet ノ理想トセル所ハ全ク metrical geometry ト隔離セル新幾何学ヲ創造スルニアリキ。彼ハ其ノ結果ニ於テハ成功シタルモ、其ノ方法ニ於テハ成功スルニ至ラザリキ(全ク)。 其後 Möbius (1790-1868) ノ

Barycentrische Calcul, ~~1872~~ 1827

ハ ~~synthetic~~ (主トシテ) analytic ニ Poncelet ノ理想ヲ開拓シ、更ニ Steiner (1796-1863) ハ

Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, 1832

等ノ著述ニ依リ、又 Chasles (1796-1880) ハ

Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, 1837

等ノ著ニ依テ、synthetic ニ Poncelet ノ思想ヲ進メタリ。 其ヨクテ遂ニ Von Staudt (1798-1867) ハ

Geometrie der Lage, 1847

ニ於テ、全ク metric relation ヲ離レテ projective ~~propert~~ geometry ヲ建設スルコトニ成功シ、更ニ

Beiträge zur Geometrie der Lage, 1856-60

ニ於テハ、imaginal quantities ヲ全ク geometrically ニ define スルコトニ成功セリ。 其ヨクテ Poncelet ノ理想ハ Von Staudt ニ至リテ完成セリ。 Poncelet ヨリ後ニ 30 余年ナリ。

VI. Projective geometry ヲ analytically ニ取扱フニ当リテ、Descartes ノ coordinate ニテハ不便ナルヲ以テ、Plücker (1801-1868) ハ homogeneous coordinates ヲ導入セリ。 其後 Hesse (1811-1874), Cremona (1830-1903), ~~Reye~~ Schröter (1829-1892), Reye, Sturm 等ニ (特ニ Seydewitz (1807-1852)), synthetic ニ projective geometry ヲ開拓スルニ勉ム。 コレヲ Steiner'sche Schule ト云フ。

VII. Cayley (1821-1895), Sylvester (1814-1897) ノ invariant theory ト projective geometry ト ガ 一方ニ於テ 密接ノ関係ヲ有シ、遂ニ Klein ニ依テ projective geometry ガ scientific ニ define セラレ、且ツコレト non-euclidean geometry トノ関係ヲ明ニセラレタリ。

サテ本講義ニ於テハ、先ヅ其ノ前半 ~~半~~ ニ於テハ metrical relation ヲ用ヒザル即チ全ク synthetic ナル projective geometry ノ ~~Introduction~~ 初歩ヲ授ゲントス。 然レドモコレノミニテハ眼界甚ダ狭ク、ナルヲ以テ、其ノ次ニハ analytic geometry ト synthetic geometry トノ関係ヲ述ブベシ (及ビ invariant theory)。 夫レヨリ projective geometry ノ応用トシテ簡短ニ descriptive geometry ヲ説カン。

(1) Klein ハ Steiner's Schule ヲ攻撃セリ

Monge ハ (陸軍ノ設計課ノ技手) ~~…~~, Poncelet ハ engineer ニシテ 1813 年 Moscow ヨリ退却ノ際露軍ニ捕ハレ、サラトフ ニ幽囚ノ身トナル。 ソノトキ彼ノ大作ヲ胚胎セシナリ。 Steiner ハ貧シキ農夫ノ子ニシテ 13 歳マデ学校ニ入ラズ、後ニ Heidelberg ナ…

ソレヨリ projective geometry ノ foundation ~~及ビ projective geometry ト non-euclidean geometry トノ~~ 関係等ヲ論ゼズ。~~最后ニ若干 時間ノ余裕アラバ projective geometry ト数学ノ他ノ分科~~

要スルニ ~~[illegible]~~ 吾人ノ目的ハ余リ専門的ナラザル範囲内ニ於テ projective geometry ニ関スル各方面ノ一般的智識ヲ得ントスルニアリ。

兎ニ角 ~~[illegible]~~ ナル可ク簡略ニ 淘 Poncelet, Steiner, Chasles, Von Staudt ノ研究ノ跡ヲ追ハザルベカラズ。 ソノ参考書トセルハ

Enriques, Vorlesungen über projektive Geometrie.
Reye, Geometrie der Lage.
Steiner, Vorlesungen über synthetische Geometrie, Bd. II.
* Cremona, Elements of projective geometry.
Veblen and Young, Projective geometry.
Mathews, Projective geometry.
* 吉川, 近世綜合幾何学.

稍々 metrical ノモノニハ

* Chasles, Traité de géométrie supérieure.
* Hatton, Principles of projective geometry.
* るしぇーこんぶるうす, 初等幾何学 第二巻 (特ニ第八篇ノ補遺 及ビ「註意第七」)

外ニ

Schönfliess, Projektive Geometrie (Encyk. d. Math. Wiss., Bd. III 1, Heft 3.)
Kötter, Entwicklung der synthetischen Geometrie von Monge bis auf Staudt. (Jahresbericht d. Deut. Math. Vereinig. Bd. 5.

* ヲ附セシハ elementary ノモノ.

Chapter I.

Fundamental Concepts.

1. ~~Fundamental~~ Elements. Projection and section.

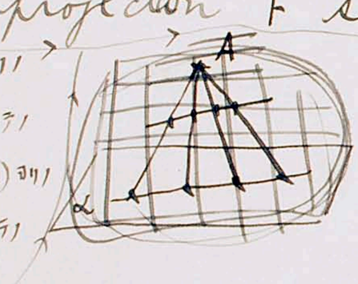
Projective geometry ニ於テ論ズル elements ハ

point (之ヲ A, B, C, … ニテ表ハス)

straight line (單ニ line トモ呼ブ. 之ヲ a, b, c, … ニテ表ハス)

plane (之ヲ α, β, γ, … ニテ表ハス)

projective geometry ニ於テ用ヒラルル fundamental operations ハ, projection ト section ナリ. Rough ニ言ヘバ projective geometry トハ畢竟 projection ト section トヲ交互ニテ行フル圖形ノ性質ヲ論ズルモノト見做スモ, 大ナル過ナヨ. Elementary geometry ニ用ヒラルル fundamental operation ハ congruent (合同) ナル故, Elementary geometry ガ geometry of motion (筋肉ノ幾何学) ナルガ projective geometry ハ geometry of vision (眼ノ幾何学) ナリ.

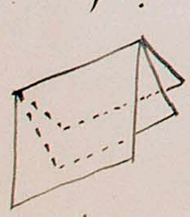


2. ~~Fundamental figures~~ Elementary forms (Grundgebilde).

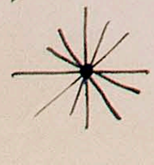
Projective geometry ニ Grundgebilde トシテ採用スベキモノハ, 種々コレアルベケレドモ, 吾人ハ次ノ如ク定ムベシ.

I,1. 一ツノ圖形ノ elements ガ皆一ツノ line 上ニアル point ヨリ成ルトキハ, 此 figure ヲ range of points 又ハ row of points (列點), Punktreihe ト云ヒ, ソノ直線ヲ base (Träger) ト云フ. (底又ハ台)

I,2. 一ツノ圖形ノ elements ガ皆一ツノ line ヲ過ギル plane ヨリ成ルトキハ, 此圖形ヲ axial pencil (Ebenenbüschel) 束面 ト云ヒ, ソノ直線ヲ axis 軸 ト云フ.

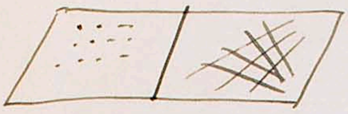


I,3. 一ツノ圖形ノ elements ガ皆一ツノ point ヲ過ギリ且ツ一ツノ plane ノ上ニアルトキハ, 此圖形ヲ flat pencil (Strahlenbüschel) 束線 ト云ヒ, ソノ點ヲ Vertex 又ハ centre ト云ヒ, ソノ平面ヲ base ト云フ.

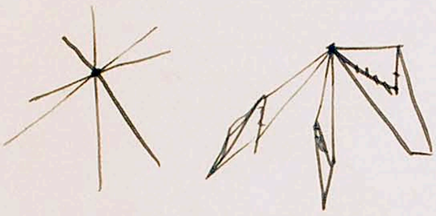


以上三ツノ圖形即チ range, axial pencil, flat pencil ヲ elementary forms of the first rank, 又ハ one-dimensional elementary forms (Grundgebilde erster Stufe, einförmige Grundgebilde) 第一級ノ図形 ト称ス.

II,1. 一ツノ図形ノ elements ガ皆 one plane ノ上ニアル point 又ハ line ヨリ成ルトキハ、此図形ヲ plane field 又ハ plane figure (ebene Feld) 場(マタハ野) トイヒ、ソノ plane ヲ base (Träger) トイフ. 而シテ point ヨリ成ルトキハ plane of points (Punktfeld) トイヒ、line ヨリ成ルトキハ plane of lines (Strahlenfeld) トイフ.



II,2. 一ツノ図形ノ elements ガ皆 one point ヲ過ギル line 又ハ one point ヲ過ギル plane ヨリ成ルトキハ、コノ図形ヲ sheaf (sheaf of lines, sheaf of planes) 又ハ bundle (〃, 〃) [Strahlenbündel, Ebenenbündel] 把 トイフ. ソノ point ヲ centre 又ハ vertex トイフ.



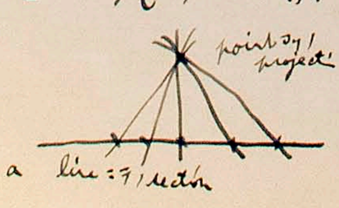
以上二ツノ図形即チ plane field ト bundle トヲ elementary forms of the second rank, two dimensional elementary forms (Grundgebilde zweiter Stufe) トイフ.

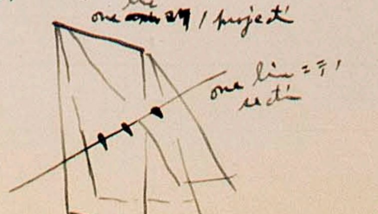
III. 一ツノ図形ノ elements ガ總テノ points 又ハ planes ナルトキハ、コノ図形ヲ space of points (Punktraum) 点空間, space of planes (Ebenenraum) 平面空間 トイフ. 普通単ニ space (Raum) 空間トイフ. 之ヲ elementary form of the third rank, three-dimensional elementary form (Grundgebilde dritter Stufe) トイフ.

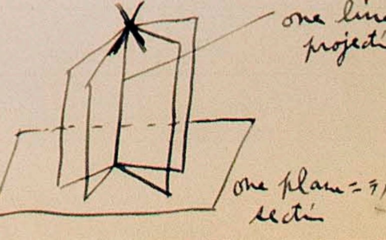
IV. 一ツノ図形ノ elements ガ總テノ lines ナルトキハ、コノ図形ヲ space of lines (Strahlenraum) 直線空間トイフ. 之ヲ four-dimensional elementary forms トイフ.

以上ノ七ツノ ~~element~~ Grundgebilde ノ内最初ノ六ツハ Steiner, Von Staudt 等ノ採用セシモノナリ. 特ニ注意セザル限リハ ソノ六ツヲ以テ projective geometry ノ Grundgebilde ト見做スヲ普通トス. 而シテ Strahlenraum ヲ論ズルモノハ別ニ line geometry ト称ス.

Theorem. 三ツノ one dimensional elementary forms ハ projection 又ハ section ニ由テ互ニ interchange ス. 二ツノ two-dimensional elementary forms ニ就テモ亦同様ナリ.



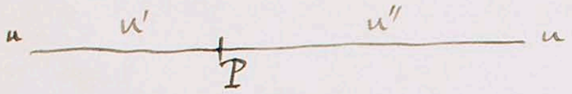




3. Axiom of continuity.

Projective geometry ヲ axiomatic ニ研究スルコトハ本講義ノ目的ニアラザルヲ以テ，コレマデ極メテ著シキ Axiom ノ外ハ述ベザルコトト定ム．尚本講義ノ最後ニ至リテ再ビ Axioms ノ問題ヲ論ズルコトアルベシ．

コレヨリ Continuity ニ就テ述ベルニ，コレニハ先ヅ point range ニツキテノミ述ブベシ．サテ range ガ continuous ナリトハ如何ナル意義ナリヤヲ説明セシニ，先ヅ Range u ハ horizontal line ヲ base トスルモノトセン．ソノ range ノ中ニ含マルル任意ノ一点 P ニヨリテ，コノ range ハ二ツノ部分 u′, u″ ニ分タル．



ソノ一部分 u′ ハ P ノ左ニアル u ノ all points ヲ含ミ，他ノ部分 u″ ハ P ノ右ニアル u ノ all points ヲ含ム．而シテ P 自身ハ u′ 及ビ u″ ノ孰レカ一方ニ属スト見做スベシ．~~然ルトキハ~~ 然ルトキハ u′ ニ含マルル all points ハ u″ ニ含マルル all points ノ左ニアリ．range u ガ continuous ナリトハ，コトヲ言フ．

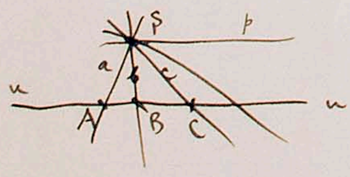
吾人ハ Dedekind (Stetigkeit und irrationale Zahlen, 1872) ニ従テ，continuity ニ関スル次ノ axiom ヲ採用セン．

range u ヲ二ツノ部分ニ分チ，其一部分ノ總テノ点ヲシテ他ノ部分ノ總テノ点ノ左ニ ~~アラシムル如キ~~ アラシムル如キ分点ハ常ニ一ツ exist ス．而シテ只ダ一ツニ限ル．

斯クノ如キ分点ヲ range u ノ Schnitt 切断ト称ス．ソノ existence ハ之ヲ証明シ得ベカラズ．コハ一ノ axiom ニシテ，コレニヨリテ吾人ハ斯ク range ノ continuity ヲ認ムルヲ得ベキナリ．

range ノ continuity ヨリシテ axial pencil 及ビ flat pencil ノ continuity ヲ証明スルコト容易ナリ．

4. Elements at infinity.



(i) 今一ノ平面上ニ於テ pencil S ト一ノ直線 u ヲ考フルニ，S ニ属スル總テノ直線 a, b, c, … ハ u ト各一ノ intersect ヲ有ス．但シ u ニ parallel ナル line p ハ intersect ヲ有セズ．Elementary geometry ニ於テハ Euclid ノ Axiom ニヨレバ，斯クノ如キ parallel line p ハ只ダ一ツアルノミ．

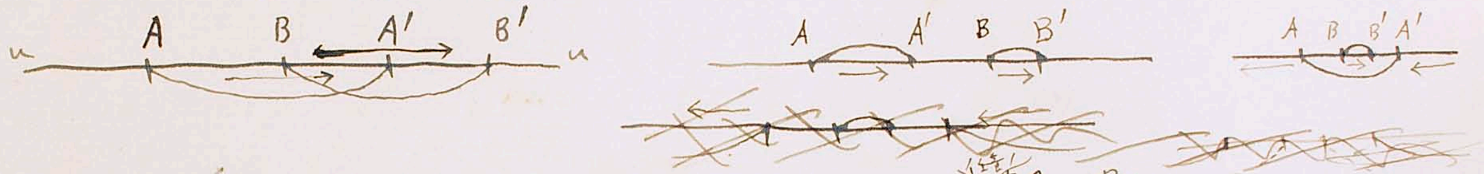
然レドモ斯クノ如クスルトキハ section ノ理論ニ例外ヲ生ズルヲ以テ，projective geometry ニ於テハ one plane 上ノ二直線ハ必ズ交ハルト見做ス．即 parallel ニモ亦一ノ intersect アルモノト定メ，之ヲ improper point (uneigentlich) トイフ．而シテコノ点ヲ直線 u ノ上ノ point at infinity 無窮遠ノ点トイフ．

斯クノ如ク考フルガ適例ナレドモ，厳密ナル意味ニ於テ … parallel 及ビ point at infinity ナルモノ… geometry ハ Affine geometry

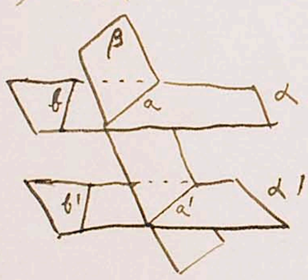
コノ idea ハ Desargues (1639) ノ導入セル所ニシテ, コレニヨレバ一ノ直線ハ point at infinity ニ於テ接續スルモノト見做スベキナリ. 而シテ 一平面上ニ於ケル parallel line ハ point at infinity ヲ centre トスル pencil ヲ作ル.

コノコトヲバ parallel line ハ same direction ~~ヲ定ム~~ ヲ有ストモイフ.

Theorem. 一ノ point range ニ属スル四ツノ点ハ 唯 two pair ガ互ニ相分ツ得ルノミ.



(ii) 次ニ 二ツノ parallel plane α, α' アリ. α上ノ直線aヲ通ル 他ノ plane β ニテ切レバ(α'ニテ) ソノ交リ a' ハ互ニ(aト) parallel ナルガ故, a ノ上ノ point at infinity ハ マタ a' ノ上ノ point at infinity ナリ. 他ノ直線 b, b' ニツキテモ同様ナリ. 從テ plane α 上ノ總テノ直線ノ point at infinity ハ マタ plane α' 上ノ總テノ直線ノ point at infinity ナリ.



然ルニ 二ツノ ~~parallel~~ plane ハ 一ノ直線ニ於テ交ハルヲ以テ, parall plane モマタ 一ノ improper line ニ於テ交ハルモノト定メ, 之ヲ plane ノ上ノ line at infinity トイフ. (Poncelet

Plane 上ノ line at infinity ハ ソノ plane 上ノ all lines ノ point at infinity ノ aggregate ナリ.

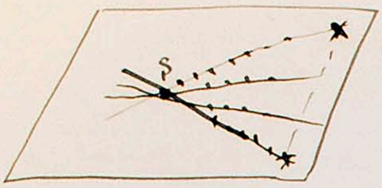
(iii) 同様ニ Space ニ於テ (總テノ) point at infinity ト line at infinity トハ 一ツノ improper plane ノ上ニアリト見做スコトヲ得. 何トナレバ, コノ aggregate ト任意ノ plane トノ交リハ line at infinity ナル一ノ直線ニシテ, マタ任意ノ line トノ交リハ point at infinity ナル一ノ点ナルベケレバナリ.

コノ improper plane ヲ plane at infinity ト称ス. (Poncelet)

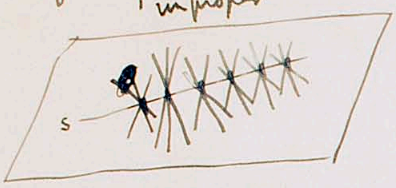
コレニ於テ吾人ハ Grundgebilde ノ dimension ノ説明ヲ与フルコトヲ得.

One dimension ノ場合. 先ヅ 一ツノ axial pencil ニ含マルル plane ノ infinite number ヲ ∞+1 ニテ表ハス. 然ラバ range of point ハ ~~ヲ~~ ∞+1 個ノ point ヲ含ム. 何トナレバ, ct range ノ base ハ axial pencil ト ∞+1 個ノ point ニ於テ交ハルナリ. ~~ヲ~~ 次ニ one plane ハ axial pencil ト ∞+1 個ノ line ニ於テ交ハルガ故, flat pencil ハ ∞+1 個ノ line ヲ含ム. コレヲ(總称シテ) one-dimensional elementary forms ハ ∞^1 個ノ element ヲ成ストイフ.

Two dimension ノ場合. 一ノ plane field ヲ考フルニ, ソノ上ノ one

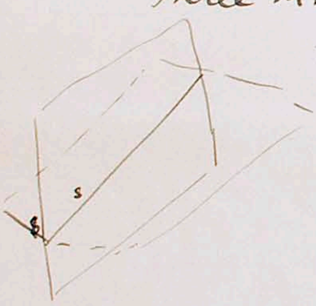


point S ヲ過ギル line ハ $\infty+1$ 個アリ。然ルニ
各 line ノ上ニハ S ヲ除キテ ∞ 個ノ point ヲ含ム故ニ
field ハ $\infty(\infty+1)+1 = \infty^2+\infty+1$ 個ノ point
ヲ含ム。其ノ中 line at infinity ガ $\infty+1$ 個ノ
point ヲ含ムヲ以テ、field ハ ∞^2 個ノ ~~finite~~ proper point ト $\infty+1$ 個ノ
~~infinite~~ improper point ヲ含ム。



次ニ plane field ノ上ノ一ツノ直線 s ハ
$\infty+1$ 個ノ点ヲ含ム。コノ point ノ各ヨリ s ト異ナル
∞ 個ノ line ヲ引クコトヲ得。故ニ field ハ
$\infty(\infty+1)+1 = \infty^2+\infty+1$ 個ノ line ヲ含ム。其中 1 個ハ line
at infinity ニシテ他ノ $\infty^2+\infty$ ハ ~~finite~~ proper line ナリ。
又コレヨリ projection ニヨリテ line ノ bundle ハ $\infty^2+\infty+1$ 個ノ line, plane
ノ bundle ハ $\infty^2+\infty+1$ 個ノ plane ヲ含ムヲ知ルベシ。

以上ノ結果ヲ綜合シテ two dimensional elementary forms ハ ∞^2 (doubly infinite)
個ノ elements ヨリ成ルトイフ。



Three dimension ノ場合。~~point~~ space ニ就テハ一ツノ line s
ハ $\infty+1$ 個ノ point ヲ含ミ、s ヲ含ム $\infty+1$ 個ノ plane ノ
各ハ s ノ上ニアラザル ∞^2 個ノ point ヲ含ムヲ以テ、~~point~~
space ハ $\infty^2(\infty+1)+(\infty+1) = \infty^3+\infty^2+\infty+1$ 個ノ
point ヲ含ム。コノ中 ∞^3 個ハ proper points ニシテ $\infty^2+\infty+1$ 個ハ
point at infinity ニアリ。何トナレバ plane at infinity ハ $\infty^2+\infty+1$
points ヲ含ムナリ。

次ニ s ノ上ノ $\infty+1$ 個ノ point ノ中ノ一 point S ヲ過ギリテ s ヲ含マ
ザル plane ハ ∞^2 アリ、又 s ヲ含ム plane ハ $\infty+1$ 個アリ。故ニ space ハ
$$\infty^2(\infty+1)+(\infty+1) = \infty^3+\infty^2+\infty+1$$ 個ノ plane ヲ含ム。

以上ノ結果ヨリ、three dimensional elementary forms ハ ∞^3 (triply infinite) 個ノ
elements ヨリ成ルトイフ。

Four dimensions ノ場合。line space ヲ考フルニ、ソノ中ノ任意ノ
one plane ハ $\infty^2+\infty+1$ 個ノ line ヲ含ム。又コノ plane ニ含マルル
$\infty^2+\infty+1$ 個ノ point ノ各ヲ過ギリテ、コノ plane ニ含マレザル ∞^2 個ノ
line ヲ引クコトヲ得。故ニ line space ハ $\infty^2(\infty^2+\infty+1)+(\infty^2+\infty+1)$
$= \infty^4+\infty^3+2\infty^2+\infty+1$ 個ノ line ヲ含ム。

5. Principle of duality.

Projective geometry ニ於テハ Grundgebilde ニ 次ギ projection 及ビ section ヲ施セテ研究ヲ行ウモノ ~~[illegible]~~ ナルガ,

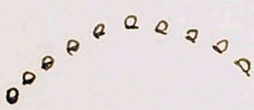
I. 先ヅ plane field ノ geometry 即チ plane geometry ニ於テハ

section. 二ツノ line ハ 一ツノ point ヲ定ム.

projection. 二ツノ point ハ 一ツノ line ヲ定ム.

故ニ plane geometry ニ於テハ point ト line トガ互ニ correspond スルモノト見做スコトヲ得.

一ノ line a	一ノ point A
一ノ point A	一ノ line a
一ノ range u(A,B,C,...)	一ノ pencil U(a,b,c,...)
point ノ集リ (point locus)	line ノ集リ (line envelope)



II. Bundle ノ geometry ニ於テハ

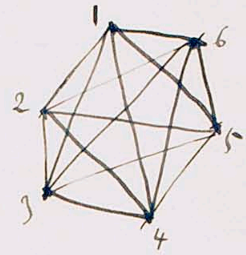
二ツノ line a, b ハ 一ノ ab plane ヲ定ム (project)	二ツノ plane α, β ハ 一ノ line αβ ヲ定ム (section)
一ノ plane	一ノ line
同ジ plane ノ上ニアル三ツノ line	同ジ line ヲ含ム三ツノ plane
flat pencil σ(a,b,c,...)	Axial pencil s(α,β,γ,...)

III. Space ノ geometry ニ於テハ

一ノ plane α ト一ノ line b ハ 一ノ point αb ヲ定ム (section).	一ノ point A ト 一ノ line b トハ 一ノ plane Ab ヲ定ム (project)
二ツノ plane α,β ハ 一ノ line αβ ヲ定ム (sect)	二ツノ point A,B ハ 一ノ line AB ヲ定ム (project)
一ノ plane 上ノ二ツノ line ハ 一ノ point ヲ定ム (sect)	一ノ point ヲ通ル二ツノ line ハ 一ノ plane ヲ定ム (project)
一ノ plane	一ノ point
一ノ line (二ツノ plane ノ交リ)	一ノ line (二ツノ point ヲ結ブモノ)
三ツノ plane ハ 一ノ point ヲ定ム	三ツノ point ハ 一ノ plane ヲ定ム
Axial pencil u(α,β,γ,...)	range u(A,B,C,...)
flat pencil σ(a,b,c,...)	flat pencil S(a,b,c,...)
field σ(A,B,C,...; a,b,c,...)	bundle S(α,β,γ,...; a,b,c,...)

由テ project 及ビ sect^n ノミヲ用ヒテ一ツノ theorem (証明セラレタキ) アルトセバ [上ノ如ク証明ニヨリテ] ソノ theorem ノ中ノ elements ヲ変換シテ更ニ他ノ theorem ヲ導キ、コノ二ツノ theorem ヲ対立セシムルコトヲ得ベシ。コノ関係ヲ principle of duality トイフ。ソノ図形ヲ dual 又ハ correlative figure トイフ。コノ principle ハ Poncelet (1822) ガ polar, polar ノ理論ニヨリテ述ベタル method of reciprocal polars ~~theory~~ ヲ、Gergonne (1826) ガ更ニ一般ニモテ述ベタルモノナリ。今日ニテハ之ヲ広ク空間ニ用フ (duality ヲ)

EX. 3. Space ニ 6 points ヲ取ルトキ、之ヲ結ブ 15個ノ line ト 20個ノ plane アリ。之ヲ one plane ニテ截ルトキ



15個ノ point ト 20個ノ line ヲ得。而モテ 12 上ノ one point ヲ過ル plane ハ 123, 124, 125, 126 ト交ハセ ソノ point ヲ過ル 4個ノ line アリ。又 123 ノ通ルツノ plane ト 3点ニ於テ交ル。由テ

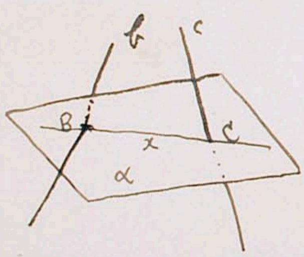
一ツノ plane 上ニ次ノ図形ガ exist ス。

15個ノ point ト 20個ノ lines アリ。ソノ各ノ point ヲ 4 lines ガ通リ、各ノ line ノ上ニ 3 points ガ存在ス。之ヲ $(15_4, 20_3)$ ニテ表ハス。

コノ plane ノ上ニ於テ dual figure ヲ作レバ $(20_3, 15_4)$ ヲ得。之ヲ Hesse's configurat^n トイフ。

Space ニ於テ ~~[illegible]~~

Ex 1. 与ヘラレタル二ツノ line b, c ニ交リ、且ツ与ヘラレタル plane α ノ上ニアル直線 x ヲ作レ。

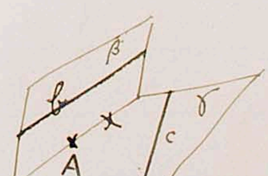


α, b ノ交点ヲ B, α, c ノ交点ヲ C トス。二点 B, C ヲ結ブ所ノ直線 x ヲ求ムベシ。

コレニ Dual ノ問題ハ

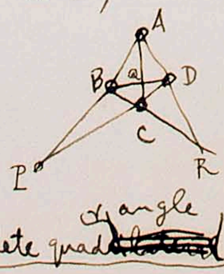
与ヘラレタル二ツノ line b, c ニ交リ、且ツ与ヘラレタル point A ヲ過ギル直線 x ヲ作レ。

A, b ニヨリテ定メラルル平面ヲ β, A, c ニヨリテ定メラルル平面ヲ γ トス。二平面 β, γ ノ交リガ求ムル直線 x ナリ

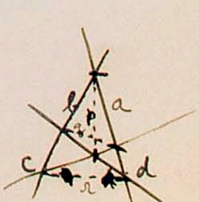


Ex. 2. 一ツノ plane 上ニ於ケル図形ヲ考フル。(Carnot, 1803)

四ツノ point A, B, C, D ト定メテ
二ツヅツ結ブ六ツノ line
AB, AC, AD
BC, BD,
CD
トノ集リヲ、完全四角形トイフ。complete quadrangle ~~quadrilateral~~
コノ四ツノ points ヲ vertex、六ツノ line ヲ side トイフ。
$\left.\begin{matrix}AB\\CD\end{matrix}\right)$ $\left.\begin{matrix}AC\\BD\end{matrix}\right)$ $\left.\begin{matrix}AD\\BC\end{matrix}\right)$ ヲ opposite side,
ソノ intersect^n ヲ ~~Nebeneckpunkt~~ diagonal point トイフ。
尚一般ニ n-eck ヲ考フルナリ。



四ツノ line a, b, c, d ト
其ノ二ツヅツノ交リナル六ツノ point
ab, ac, ad,
bc, bd,
cd
トノ集ヲ完全四辺形 complete quadrilateral トイヒ、ソノ 4 line ヲ sides, ソノ 6 points ヲ vertex トイフ。
$\left.\begin{matrix}ab\\cd\end{matrix}\right)$ $\left.\begin{matrix}ac\\bd\end{matrix}\right)$ $\left.\begin{matrix}ad\\bc\end{matrix}\right)$ ヲ opposite vertex
ソノ結ビヲ diagonal トイフ。



~~[illegible]~~

Chapter II

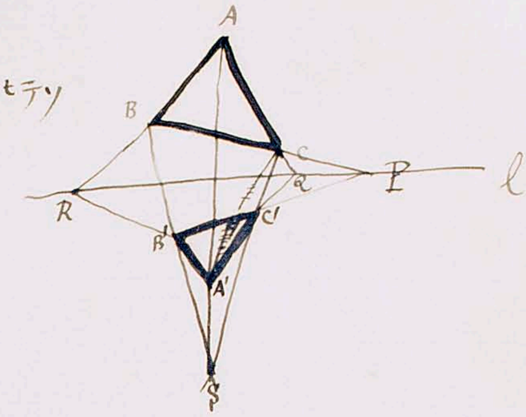
Perspective triangles. Harmonic elementary forms.

6. Perspective triangles.

Theorem. different planes ノ上ニアル二ツノ triangles ABC, A'B'C' ~~[illegible]~~ ニ於テ, lines AA', BB', CC' ガ same point S ニ於テ交ハ~~ル~~トス.
然ルトキハ corresponding sides ノ pair

BC, B'C' } , CA, C'A' } AB, A'B' } ハ共ニ互ニ相交ハル、而シテソ

ノ intersect^n P, Q, R



ハ ~~[illegible]~~ same line ノ上ニアリ.

proof. BB', CC' ハ相交ハレバ一ツノ plane SBC ヲ定ム. 然ルニ BC, B'C' ハ共ニ此 plane ノ上ニアルヲ以テ一点 P ニ於テ交ハル.
同様ニ CA, C'A' ハ一点 Q ニ於テ交リ, AB, A'B' ハ一点 R ニ於テ交ハル.
サテ点 P ハ平面 ABC ノ上ニアリ ト同時ニ平面 A'B'C' ノ上ニアリ. 故ニ P ハコノ二ツノ plane ノ intersect^n l ノ上ニアリ. 同様ニ Q, R モ共ニ l ノ上ニアリ. 由テ P, Q, R ハ same line ノ上ニアリ.

Converse theorem. different planes ノ上ニアル二ツノ triangle ABC, A'B'C' ニ於テ, pairs of corresponding sides ガ共ニ P, Q, R ニ於テ ~~[illegible]~~ 交ハ ~~[illegible]~~ モノトス. 然ルトキハソノ ~~二ツノ intersect~~ P, Q, R ハ same line ノ上ニアリ. 而シテ AA', BB', CC' ハ concurrent ナリ.
P, Q, R ガ same line ノ上ニアルコトハ上ノ theorem ニ於テ既ニ証シタルガ故ニ之ヲ略ス

proof. 先ヅ BC, B'C' ハ相交ハレバ一ツノ平面ヲ定ム. 従テ BB', CC' ハ相交ハル. 同様ニ CC', AA' ハ相交リ, AA', BB' モ亦相交ハル.
然ルニ AA', BB', CC' ハ same plane ノ上ニアラ ~~[illegible]~~ ザレバ, 而モ二ツヅツ互ニ交ハレバ, コノ三ツノ line ハ same point S ニ於テ交ラザルベカラズ.

Definit^n. 二ツノ三角形 ABC, A'B'C' ガ上ノ條件ヲ充タストキハ perspective (配景ニアリ)ニアリトイフ. S ヲソノ centre, l ヲソノ axis トイフ.
透視.

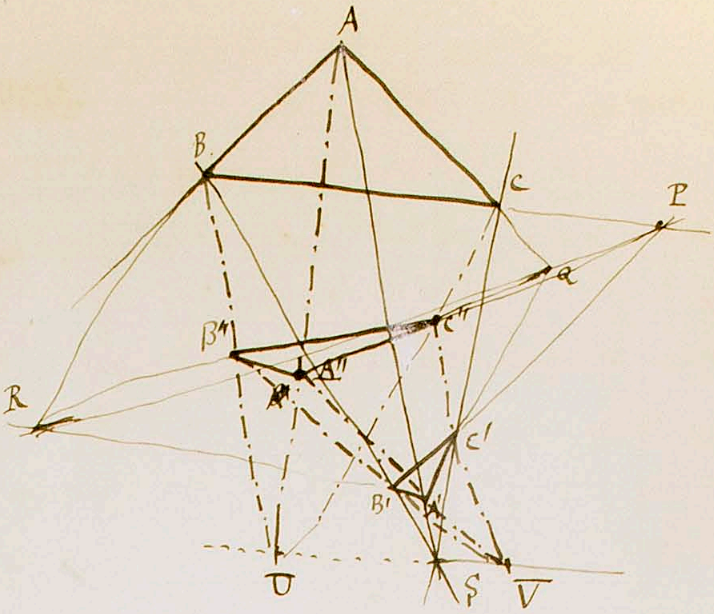
7. Desargues's theorem.

コレヨリ二ツノ三角形ガ same plane ノ上ニアル場合ヲ考ヘン.

Theorem. same plane 上ニアル二ツノ triangle ABC, A'B'C' ニ於テ, AA', BB', CC' ガ S ニ於テ交ハルモノトス. 然ルトキハ corresponding sides ノ (each pair) intersect^n P, Q, R ハ same line ノ上ニアリ.

proof. コノ図形ノ平面上ニアラザル任意ノ line ヲ引キ, ソノ上ニ (point S ヲ過ギッテ) 任意ノ二ツノ point V, V' ヲ取ル.

Ʊ 及ビ V ヲ centre トセテ夫々 triangle ABC, A'B'C' ノ vertex ヲ project セヨ。 ƱV, AA' ハ S ニ於テ交ハルカラ same plane ノ上ニアリ。 故ニ ƱA, VA' ハ one point A'' ニ於テ交ハル。 同様ニ ƱB, VB' ハ one point B'' ニ於テ交リ、 ƱC, VC' ハ one point C'' ニ於テ交ハル。



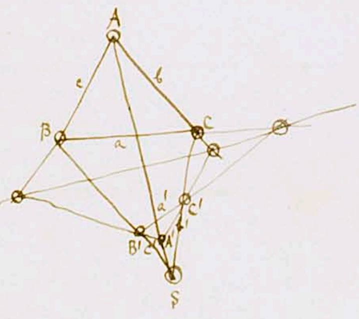
サテ二ツノ triangle ABC, A''B''C'' ハ Ʊ ヲ centre トスル perspective triangle ナリ。 故ニ Art. 6 ノ theorem ニ由テソノ corresponding sides ノ pair ハ(交リ P_1, Q_1, R_1) 二ツノ plane ABC, A''B''C'' ノ intersection l ノ上ニアリ。 全ク同様ニ Ʊ ノ代リニ V ニ就テ考フレバ A'B'C', A''B''C'' ノ corresponding sides ノ pair ハ(交リ P_2, Q_2, R_2 ハ) 二ツノ plane A'B'C', A''B''C'' ノ intersection l ノ上ニアリ。

然ルニ triangle A''B''C'' ノ三辺ハ都 l トガ one point ニ於テ交ハルカラ、 P_1 ト P_2, Q_1 ト Q_2, R_1 ト R_2 ハ都 same point ナラザルベカラズ。 之ヲ P, Q, R ト書ケバ

$\left.\begin{matrix} BC \\ B'C' \end{matrix}\right\} P,\quad \left.\begin{matrix} CA \\ C'A' \end{matrix}\right\} Q,\quad \left.\begin{matrix} AB \\ A'B' \end{matrix}\right\} R$ ハ same line l ノ上ニアリ。

Dual theorem. Same plane ノ上ニアル二ツノ triangle abc, a'b'c' ニ於テ corresponding sides ノ intersection aa', bb', cc' ガ same line ノ上ニアリトスル。 然ルトキハ corresponding vertex ヲ結ブ line ハ same point ニ於テ交ハル。

コレ即チ上ノ theorem ノ converse ニ外ナラヌ。



以上ノ二ツノ theorem ヲ総称シテ Desargues' theorem (1639?) トイフ。

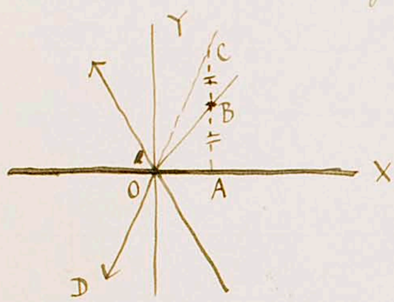
Def. コノ場合ニモ perspective triangle, centre of perspective, axis of pers. ノ語ヲ用フ。 Poncelet ハ perspective ノ代リニ homologous (homology) ノ語ヲ用セリ。

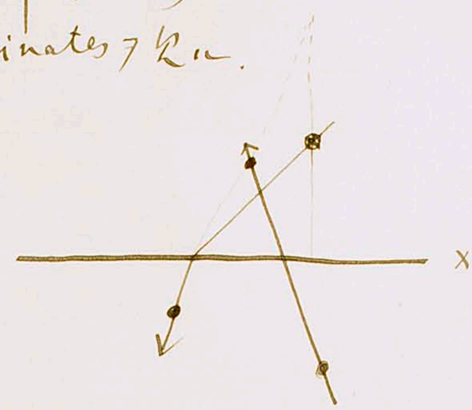
Corollary. Desargues ノ theorem ヨリ $(10_3, 10_3)$ ナル図形ヲ得。 之ヲ Desargues' configuration トイフ。

Remark. 吾々ハ plane geometry ニ於ケル Desargues ノ theorem ヲ証明スルニ於テモ three dimension ノ考ヘヲ用セリ。 実ニ three dimension ノ考ヘヲ用ヒズシテ、唯 project 及ビ section ノミヲ用ヒテ此 theorem ヲ証明スルコトハ impossible ナリ。 (Klein, Math. Ann. 6 (1873); Hilbert, Grundlagen d. Geometrie (1899); R. F. Moulton, Trans. Amer. ~~Peano~~ Math. Soc. 3 (1902)) proportion ノ如キ metric property ヲ用フレバ [illegible]

コレヨリMoultonノproofヲ述ベテ、即チ問題ハplane上ニ於ケルproject and sectノミヲ用ヒ、換言スレバprojective axiomsノミヲ用ヒバ、Desarguesノtheoremガ一般ニ成立セズトイフコトヲ証明セントスルニアリ。

コヽニPointトシテハ普通ノeuclidean planeノpointヲ取リ、且ツ ~~line at infinity~~ point at infinityヲモ考ヘニ入レヌ事トス。ソノplaneノ上ニ普通ノrectangular coordinatesヲ定ム。





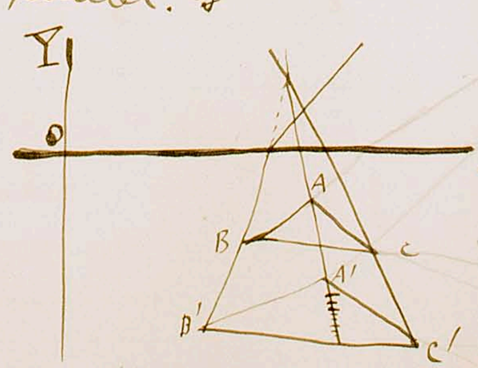
次ニlineトシテハ次ノ如キモノヲ取ル。

(i) originヲ通ギリテ普通ノ意味ノ直線ニparallelヲ引クトキ、ソノparallelガ第二象限ト第四象限トニアレバ、ソノ直線ヲ以テ吾々ノ直線トス。

(ii) parallelガ第一象限ト第三象限トニアレバ、X軸ノ上ニ於テハ其ノマヽニシテX軸ノ下ニテハ屈折セル線ノ（AB＝BCナラシム）BODヲ以テ吾々ノlineトス。（下側ニ於テハ丁度X軸ノ所）

コノplane上ノ直線ノ意味ヲ此クノ如ク取レバ、projective axiomニハ矛盾セズ。[詳シクハHilbert又ハSchurノGrundlagen der Geometrieヲ見ヨ。] [例ヘバ 二点ハ一直線ヲ定ム。二直線ハ一点ヲ定ム。parallel 等]

サテ図ノ如ク二ツノ三角形ABC, A'B'C'ヲ取リ、ソノcorresponding sidesヲparallelナラシムレバ、ソノcorresponding sidesノintersectionハline at infinityナル直線上ニアリ。然ルニソノcorresponding verticesヲ結ブ直線ハ一点ニ会スルコトナシ。

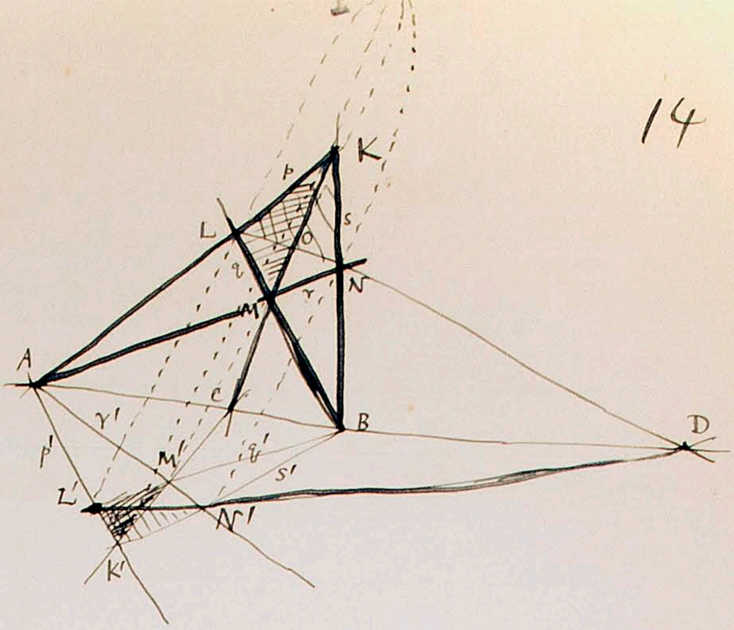


斯クシテnon-desarguesian plane geometryヲ作ルコト

8. Harmonic ~~conjugates~~ ranges.

一ツノplaneノ上ニ一ノcomplete quadrilateralヲ考ヘ、ソノsidesヲ p, q, r, s トシ、ソノverticesヲ K, L, M, N, A, B トス。AB, KM, LN ヲdiagonal、O, C, D ヲdiagonal pointsトス。

A ヲ通リテ任意ノ二ツノ直線 p', r' ヲ引キ、ソレ等ノ直線ト C ヲ通ギル任意ノ直線トノ交リヲ K', M' トス。



BM'ヲ q' ニテ表ハシ、之ト p'トノ交リヲ L'トス。マタ BK'ヲ s' ニテ表ハシ、之ト r'トノ交リヲ N'トス。然ルトキハ L'N' ガ D ヲ過ギルコトヲ prove セン。

先ヅ上ノ construct ニヨレバ、二ツノ triangle KLM, K'L'M' ノ corresponding sides ノ交リハ same line ノ上ニアリ。故ニ KK', LL', MM' ハ same point ニ於テ交ル。同様ニ KK', MM', NN' モマタ一点ニ於テ交ル。然ルニコレ等ノ二ツノ点ハ一致セザルベカラズ。故ニ KK', LL', NN' ガ一点ニ於テ交ル。換言スレバ、二ツノ三角形 KLN, K'L'N' ハ perspective ナリ。故ニ LN ト L'N' トノ intersect ハ AB ト collinear ナリ。即チ L'N' ハ D ヲ過ギル。

コノ証明ニヨレバ、quadrilateral p'q'r's' ハ pqrs ト same plane ノ上ニアルヲ要セズ、AB ヲ過ギル任意ノ plane 上ニアツテモ可ナリ。コノ結果ヲ次ノ如ク述ブルヲ得。

Theorem 1. 一直線上ニ三ツノ点 A, B, C ガ与ヘラレタルトキ、其々ハ限リナク多クノ complete quadrilateral pqrs ヲ作リテ、p, q ガ A ヲ過ギリ、q, s ガ B ヲ過ギリ、一ツノ diagonal (ps, qr) ガ C ヲ過ギル様ニスルコトヲ得。然ルトキハ他ノ diagonal (pq, rs) ハ直線 AB ノ上ノ一ノ fixed point D ヲ過ギル。

Def. 点 D ヲ A, B ニ関シテ C ノ harmonic conjugate ト云フ。~~BtA~~ 上ノ construct ニ於テ A ト B トハ symmetric ノ関係ニアレバ、「A, B ニ関シテ」ト云フ代リニ「B, A ニ関シテ」ト云フモ可ナリ。マタ C ハ A, B ニ関シテ D ノ harmonic conjugate ナリ。(C ト D トヲ交換シテモ可ナリ故)

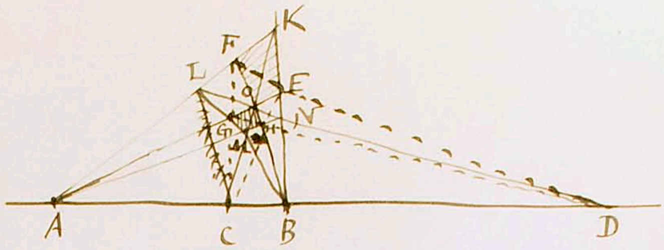
(此定メ可リセテ) ~~マタ A, B, C, D ハ harmonic range ヲナス。又ハ Harmonische Punktwurf ヲナストモ云フ。マタ C, D ハ A, B ニヨリテ harmonic ニ seperate~~

Theorem 2. D ガ A, B ニ関シテ C ノ harmonic conjugate ナルトキハ、C, D トハ A, B ニヨリテ separate セラル。

Proof. C ガ segment AB 上ニ於テ A ト B トノ間ニアレバ、M ヲシテ三角形 AKB ノ内部ニアル様ニ撰ムコトヲ得。(M ト K トハ交換モ得ルナリ) 然ルトキハ L, N ハ夫々 segment AK, BK ノ上ニアリ。故ニ LN ハ segment AB ノ延長ト交ル。即チ C, D ハ A, B ニヨリテ separate セラル。

Theorem 3. C, D ガ A, B ニ関シテ harmonic conjugate ナルトキハ、A, B ハ C, D ニ関シテ harmonic conjugate ナリ。

Proof. C, D ガ A, B ニ關シテ harmonic conjugate ナリトス。



例ノ如ク quadrilateral KLMN ヲ作リ、KM, LN ノ intersect ヲ O トス。AO ト LM トノ交点ヲ G, AO ト KN トノ交点ヲ E, BO ト KL トノ交点ヲ F, BO ト MN トノ交点ヲ H トス。

quadrilateral OGMH ニ就テ考フルニ、二辺ハ A ニ於テ交リ、他ノ二辺ハ B ニ於テ交リ、一ノ diagonal OM ハ C ヲ過グ。由テ Theorem I ニ依テ他ノ diagonal GH ハ D ヲ過ギル。

同様ニ quadrilateral OFKE ニ就テ考フレバ、EF ハ D ヲ過ギルヲ知ル。

更ニ OFLG ニ就テ考フレバ、FG ハ C ヲ過ギル、又 OENH ニ就テ考フレバ EH ハ C ヲ過ギル。

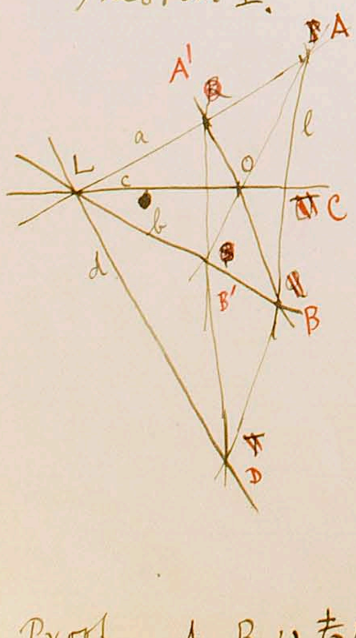
由テ quadrilateral EFGH ニ就テ考フレバ、A, B ハ C, D ニ關シテ harmonic conjugate ナリ。

Def. コノ場合ニ symbole A B C D ヲ以テ harmonic ナル (range) リトイフ 又ハ Harmonischer Punktwurf ナリトイフ。ヲ以テ表ハス コノ場合ニ (A, B) ガ one pair ノ conjugate points, (C, D) ガ他ノ pair ノ conjugate points ナル意義アリ。故ニ本文ハ場合ニ由テ ソノ symbole ヲ異ニスルカ注意ヲ要ス。

9. Harmonic (flat) pencils.

Art. 8 ノ ~~construction~~ Theorem I ノ correlative ヲ考フレバ次ノ如クナル。

Theorem I. a, b, c ヲ one point L ヲ過ギル三ツノ line トス。a ノ上ニ任意ノ二点 A, A' ヲトリ、c ノ上ニ任意ノ一点 O ヲ取ル。AO, A'O ト b トノ交リヲ B', B トシ、AB ト A'B' トノ交点ヲ D トス。然ルトキハ A, A', O ノ如何ニ拘ハラズ L D 即チ d ハ same line ナリ。



Def. d ヲ a, b ニ關スル c ノ harmonic conjugate トイフ。又 abcd ヲ harmonic pencil トイフ。

Theorem II. 一ノ harmonic pencil ヲ其ノ vertex ヲ過ギラザル任意ノ直線ニテ截レバ harmonic range ヲ得。

Proof. A, B ハ夫々 a, b ノ上ノ任意ノ点ナレバ (L ヲ除キ) 直線 l モ亦任意ナリ。而シテ l 上ノ 4 point ABCD ハ harmonic ナリ。

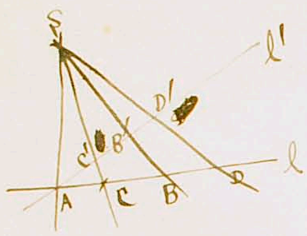
Theorem III. 一ノ harmonic range ヲ其ノ base ノ上ニアラザル任意ノ

点ヨリ project スレバ、一ノ harmonic pencil ヲ得。

コレ Art. 8 ヨリ直ニ明カナリ。

Theorem IV. ABCD, AB'C'D' ハ夫々 l, l' ヲ base トスル harmonic range ニシテ A ヲ common ニ有ツモノトス。然ルトキハ BB', CC', DD' ハ concurrent ナリ。

逆ニ、ABCD ガ harmonic ニシテ且 BB', CC', DD' ガ concurrent ナラバ AB'C'D' ハ harmonic ナリ。



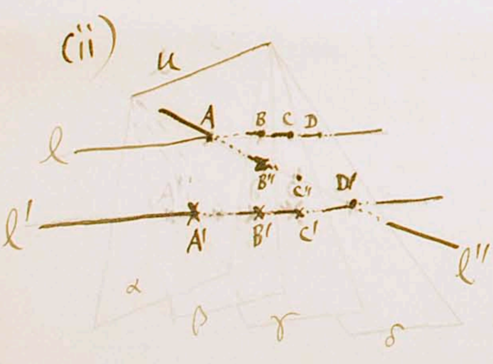
Proof. BB', CC' ノ intersect ヲ S トスレバ、Theorem III ニヨリテ pencil S(ABCD) ハ harmonic ナリ。ソノ pencil ヲ l' ニテ截レバ harmonic range ヲ得 (Theorem II)。而シテコノ section ノ三点ハ AB'C' ナレバ、第四点ハ D' ナラザルベカラズ。サレバ DD' ハ S ヲ過ギル。

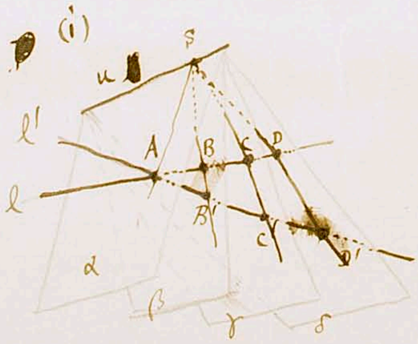
逆ニ ABCD ガ harmonic ナレバ pencil S(ABCD) ハ harmonic ナルユヱ、ソノ sect AB'C'D' ハ harmonic ナリ。

10. Harmonic axial pencil.

Def. ABCD ヲ harmonic range トシ、ソノ base l ト交ラザル任意ノ直線ヲ u トス。然ルトキハ四ツノ plane uA, uB, uC, uD ハ harmonic axial pencil u(ABCD) ヲ作ルトイフ。

Theorem I. 一ノ harmonic axial pencil ヲ ソノ axis ト交ラザル任意ノ直線ニテ截レバ harmonic range ヲ得。





Proof. plane ノ harmonic pencil ヲ u(ABCD) トシ、ソノ sect ヲ A'B'C'D' トス。

(i) コノ四点ノ中 ~~...~~ (pair ノ) corresponding points ガ 例ヘバ A, A' ガ一致スル場合。

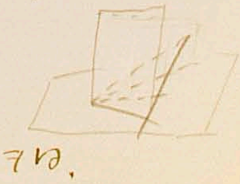
コノ場合ニハ plane ll' ニテ截レバ、Art. 9, Theorem IV ノ逆ニヨリテ AB'C'D' ハ harmonic ナリ。

(ii) corresponding points ガ一致セザル場合。

コノ場合ニハ AD' ト β, γ トノ交ヲ B'', C'' トス。然ラバ (i) ノ場合ニヨリテ AB''C''D' ガ harmonic ナリ。従テマタ (i) ニヨリテ A'B'C'D' ガ harmonic ナリ。

Corollary. 任意ノ三ツノ coaxial plane α, β, γ ヲ与フレバ、αβγδ ガ harmonic ナル如キ coaxial plane δ ヲ作リ得。

harmonic axial pencil ヲ ソノ base ヲ含マザル plane ニテ截レバ harmonic flat pencil ヲ得。又 harmonic flat plane ヲ ソノ ~~vertex ナキ~~ plane 以外ノ point ヨリ project スレバ harmonic axial pencil ヲ得。



~~Remark~~

以上ノ諸結果ヲ sum up スレバ下ノ theorem ヲ得。

~~Elementary~~ harmonic figures (of the elementary forms of the first rank) ノ projects and sections ハ又 harmonic figures ナリ。

of the elementary forms of the first rank

Chapter III.

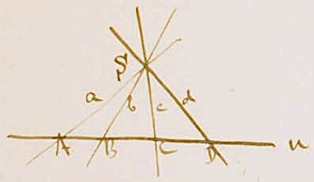
Projectivity of ~~the~~ elementary forms of the First Rank.

11. Perspectives.

コレヨリ elementary forms of the first rank ノ perspective ノ definitionヲ 下サン。

I. 異種類ノ elementary forms:

1. flat pencil S ノ section ガ range u ~~ナル~~ ナルトキハ, S ト u トハ perspective ナリト云フ. 之ヲ S ⊼ u ナル symbol ニテ表ハス.

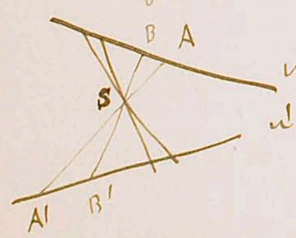


2. ~~同種ノ~~ axial pencil ト ソノ section ナル range トハ perspective ナリト云フ.

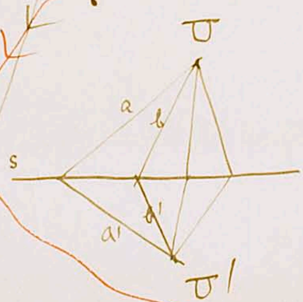
3. axial pencil ト 其ノ section ナル flat pencil トハ perspective ナリト云フ.

II. 同種類ノ elementary forms.

1. 二ツノ range u, u′ ガ同ジ flat pencil S ノ section ナルトキハ, u ト u′ トハ perspective ナリト云フ. 之ヲ u ⊼ u′ ニテ表ハス. S ヲ ソノ centre ト云フ.



2. 二ツノ flat pencil σ, σ′ ガ ~~同ジ~~ 同ジ range s ヲ project スルトキハ, σ ⊼ σ′. s ヲ其ノ axis ト云フ.



~~3.~~ 二ツノ range ガ同ジ axial pencil ノ section ナルトキ

2. 二ツノ flat pencil ガ同ジ axial pencil ノ section ナルトキ

~~4.~~ 3. 二ツノ ~~flat~~ axial pencil ガ同ジ range ノ project スルトキ

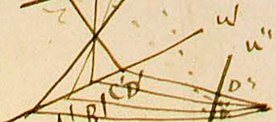
二ツノ axial pencil ガ同ジ flat pencil ヲ project スルトキ

ハ perspective ナリト云フ. 又ハ homology ナリト云フ.

Art. 10 ノ最後ノ結果ニ由レバ, 二ツノ elementary forms of the first rank ガ perspective ナルトキハ 任意ノ一方ノ harmonic elements ハ他ノ一方ノ harmonic elements ニ correspond ス.

12. Projectivity.

perspective ナル 二ツノ elementary forms of the first rank ~~figure~~ 例ヘバ 二ツノ range u, u′ ヲ取リ, ソノ corresponding points ヲ 其ノ上ニ記セヨ. 今 u′ ニ perspective ナル range ヲ作ルトキハ u ト u′ トハ ~~一方ノ base ヲ移スコトニ~~, ~~二ツノ~~ perspective ノ性質ヲ失フ. 然レドモ ソノ corresponding points ノ間ノ harmonic property ハ失ハレヌナリ.



此ノ考ニヨリテ一般ニ次ノdefinitionヲ下ス。

Def. 二ツノelementary figures of the first rankヲ互ニ~~correspond~~ correspondセシメルニ、ソノ一方ノ或ル四ツノharmonic elementsヲ取ルモ他ノ一方ノ四ツノharmonic elementsニcorrespondスルトキハ、コノ二ツノelementary formsハ互ニprojectiveナリトイフ。 (Von Staudt, 1847)

之ヲ ⊼ ニテ表ハス。 Chasles (1837) ハ之ヲhomographicナリト呼ベリ。

依リテperspectiveハprojectiveノparticular caseナリ。

Theorem 1. $u \barwedge u'$, $u' \barwedge u''$ ナラバ $u \barwedge u''$ ナリ。

コハdefinitionヨリ明カナリ。

Theorem 2. 二ツノelementary figuresガ互ニproject and sectノchainニヨリテconnectセラレルトキハ、コノ二ツハprojectiveナリ。

何トナレバharmonic propertyハ不変ナレバナリ。

~~Remark. コノtheoremヲ以テprojectivityノdefinitionトスル人多シ。~~

多数. ~~例ヘバCremona等ノ如シ.~~

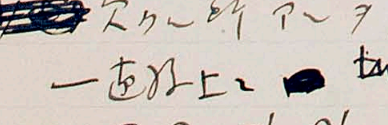
Remark. コノ定理ニヨリテ、何故ニprojectiveナル語ヲ用ヒシカノ意味ガ稍ニ明カトナレリ。然レドモ完全ニ明カナラシメンガタメニハ、ソノ逆定理即チ「二ツノelementary figuresガprojectiveナルトキハ、此等ハノ一方ヨリ他方ヘproject and sectionノchainニヨリテ得ラル」ルコトヲ証明セザルベカラズ。吾人ハ此逆定理ヲ証明スル前ニ他ノ大切ナル事柄ニ就テ説明セザルベカラズ。

13. Fundamental theorem of projective geometry. ~~(Lemma)~~.

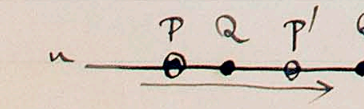
コレヨリ所謂fundamental theorem of projective geometryニ入ラントス。

コノtheoremノ証明ハ初メテVon Staudt (1847)ノ述ベタル所ナレドモ、ソノ后Klein (Math. Ann. 6 (1873))ハStaudtノ大ナル誤謬ヲ指摘シテanalyticニ改正ヲ加ヘタリ。其后Lüroth及ビZeuthen (Klein, Math. Ann. 7 (1874) ノ中ニ掲ゲラレタリ)ノsynthetic proofアリ。其後色々ノ研究アリ。吾人ハ後ニ再ビ此theoremニ就キテ詳論スル機会アルベキヲ以テ、コヽニハStaudtノproofヲReyeガ多少改良セルモノニ従ヒテ述ベントス。コノ証明ハ厳密ノ点ニ於イテ欠クル所アルヲ免レズ。

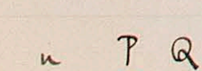
一直線上ニtwo pairノpoint P, P'; Q, Q'ヲ取ルトキハ、



(i) PP', QQ'ハ互ニseparateス。コノ場合ニハ二ツノpairハellipticナリトイフ。



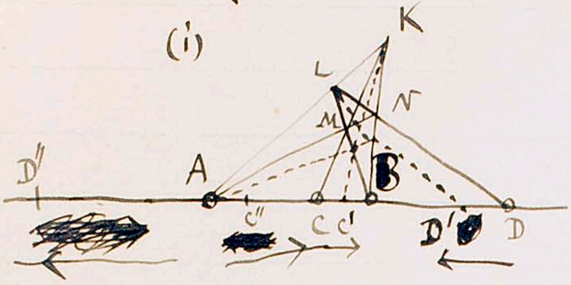
(ii) PP', QQ'ハ互ニseparateセズ、コノ場合ニハhyperbolicナリトイフ。



サテtwo pairノpoint CD, $C'D'$ガ与ヘラレルトキ之ヲ同時ニharmonicニ分ツ所ノpoint-pair ABハexistスルヤ否ヤ。

Lemma I. CD, C'D' ガ互ニ separate スルトキハ, 之ヲ同時ニ harmonic ニ分ツ point-pair ハ exist セズ. 之ニ反シテ CD, C'D' ガ互ニ separate セザルトキハ, 之ヲ同時ニ harmonic ニ分ツ point-pair ガ必ズ exist ス.

(i)

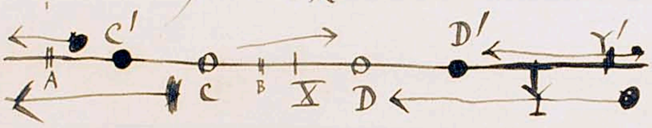


~~CD, C'D'~~ ABCD ガ harmonic range ナリトシ, AK, BK ガ L ヲ fixed ス. C ヲ動カストキ D ノ位置ノ変化ヲ考フ.

AB ガ CD, C'D' ヲ同時ニ harmonically 分ツトキハ, CD, C'D' ハ separate セズ.

従テ CD, C'D' ガ separate スルトキハ, 之レヲ同時ニ harmonically ニ分ツ所ノ point-pair ハ exist セズ.

(ii) 次ニ CD, C'D' ガ separate セザルトキヲ考フルニ, 図ニ就テ CD ノ上ニ点 X ヲ取リ,



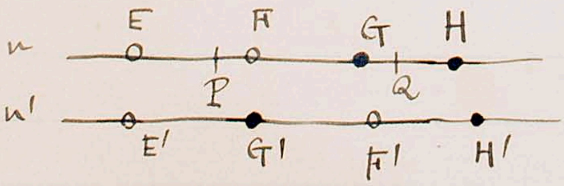
CD ニ関スル X ノ harmonic conjugate ヲ Y,
C'D' ニ関スル X ノ 〃 〃 ヲ Y' トス.

X ガ CD ノ向ヘ動クトキ, Y ハ CC'D'D ノ向ヲ動キ, Y' ハ C'D' ノ向ヲ動ク.

Y, Y' ノ方向ハ同一ナル故, 必ズ何レカ一点ハ相重ナラザルベカラズ. ソノ点ヲ A トシ, ソレニ correspond スル X ノ位置ヲ B トスレバ, AB ハ CD, C'D' ヲ同時ニ harmonic ニ分ツ.

Lemma II. 二ツノ elementary forms of the first rank ガ互ニ projective ナルトキハ, 一方ニ就テ順次ニ相連ゲル elements ハ他方ニ就テ順次ニ相連ゲル elements ニ correspond ス. 而シテ continuous elements ハ continuous elements ニ correspond ス.

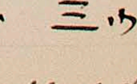
Proof. (i) ニツキテハ 二ツノ projective range u, u' ニツキテ之ヲ論セン.



若シ u ニ就テ EFGH ノ順ニアルモノガ u' ニ就テ E'F'G'H' ノ順ニアラズシテ E'G'F'H' ノ順ニアリト assume セヨ.

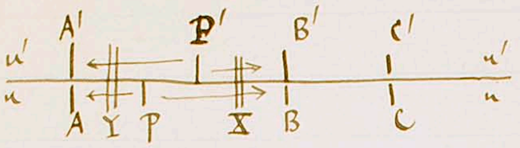
然ラバ u ニ就テ EF, GH ハ separate セラレザルガ故, 之レヲ同時ニ harmonic ニ分ツ point-pair P, Q ガ exist ス. 然ルニ u, u' ハ projective ナル故 harmonic range EFPQ ニ correspond スル E'F'P'Q' モ harmonic, 又 〃 〃 〃 GHPQ ニ 〃 〃 G'H'P'Q' モ harmonic ナラザルベカラズ. 即チ E'F', G'H' ハ P'Q' ニ依テ同時ニ harmonic ニ separate セラル. コレ impossible ナリ.

(ii) continuous ノ所ニ [illegible] ナリ.



Fundamental theorem. Elementary form of the first rank ノ projectivity ハ三ツノ elements ニ依テ uniquely ニ定マル. 換言スレバ, 二ツノ elementary forms of the first rank ガ互ニ projective ニシテ且ツ three pair ノ correspond'g elements ガ共ニ相重ナルトキハ, 他ノ correspond'g pair of elements ハ悉ク重リ合フ. 即チ二ツノ図形ハ全ク同ジモノナリ.

Proof. 吾人ハ二ツノ projective range u, u′ ノ三ツ以上ヲノミ除ゼントス。correspondg points A ト A′, B ト B′, C ト C′ トガ重ニ重ナルモノトセヨ。即チ self-correspondg points トナル
今 one pair ノ correspondg points

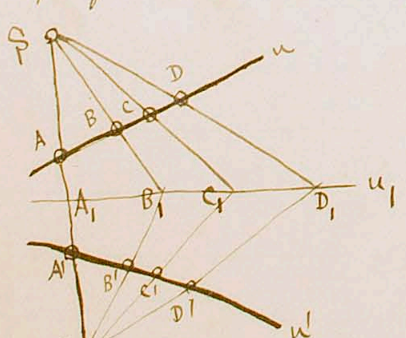


P, P′ ガ相重ナラズト assumeシ、
P ヲ A, B ノ（C ヲ含マザル部分）内ニアリトセヨ。然ラバ
APBC ト A′P′B′C′ トハ同ジ順序ニアルベキ故, P′ ハ A′B′ ノ（部分）上ニアリ。
P ガ動キテ PB ヲ画ケバ, P′ ハ同ジ向キニ動キテ P′B′ ヲ画ク。故ニ
P ト P′ トハ（P′B ノ間ニ於テ）重ナル点アリ（ガ少クトモ一点）。ソノ（最初ノ）点ヲ X トス。 次ニ P ガ動キテ PA ヲ
画ケバ, PA ノ間ニ於テ P ト
P′ トハ少クトモ一点重ナル点アリ。ソノ最初ノ点ヲ Y トス。
然ルトキハ 部分 X Y ハ self-correspondg points ニシテ且ツ其ノ間ニハ
self-corresponding point ナシ。 然ルニ Y, X ニ関スル C ノ（即チ C′）harmonic
conjugate ハ XY ノ間ニ於テ相重ナル 即チ self-correspondg ナラザルベカラズ。
~~impossible~~ コレ自家撞着ナリ。

14. Constructn of projective figures.

Theorem I. 二ツノ elementary forms of the first rank ハ, ソノ一方ノ
任意ノ与ヘラレタル三ツノ elements ガ 他方ノ三ツノ（任意ノ）与ヘラレタル elements ニ correspond
スル様ニ, projective relatn ヲ定ムルコトヲ得。 ~~而シテ一方ノ第四ノ
element ニ対シテ他方ノ第四ノ element ハ unique ニ定マル,之ヲ
定木ノミヲ用ヒテ constructスルコトヲ得。~~ (Steiner, 1832).
(plane ハ除ク)

Proof. コヽニハ（一平面上ニアル）二ツノ point range ニツキノミ証明スベシ。 他ハ
projectn 及ビ sectn ニ因リテ容易ニ証明セラルベシ。



$u(A,B,C)$ ト $u'(A',B',C')$ ヲ与ヘテ, $u(ABCD,\ldots) \barwedge u'(A'B'C'D'\ldots)$
ナラシムルコト。

AA′ ヲ結ビ ソノ上ニ任意ノ二点 S, S′ ヲ取ル。
$\left.\begin{matrix}SB\\ S'B'\end{matrix}\right\}$ ノ sectn ヲ B_1, $\left.\begin{matrix}SC\\ S'C'\end{matrix}\right\}$ C_1 トシ, B_1C_1 ヲ結ブ (u₁)

ニカラバ $u_1(A_1B_1C_1) \barwedge u(ABC)$,
$u_1(A_1B_1C_1) \barwedge u'(A'B'C')$.

故ニ $u(ABC) \barwedge u'(A'B'C')$.

由テ D ニ correspondg スル D′ ハ uniquely ニ定マル。 而シテ SD ト u₁ トノ交点 D₁ ヲ S′ ニ結ビ, u′ ニテ截レバ D′ ヲ得。故ニ ~~[illegible]~~ 只ダ定木ノミヲ
用ヒテ 作図 ~~[illegible]~~ スルコトヲ得。
コノ作図ニ就テ下ノ結果ヲ得。

Theorem II. projective ナル二ツノ elementary forms ハ, 互ニ
perspective ナル elementary forms ノ chain ノ最初ト（ノモノ）最後ノモノト
見做スヲ得。

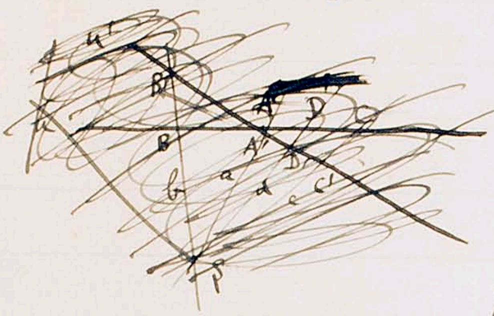
Art. 12.
Remark コレ即チ Theorem 2 ノ逆ナリ

コレニヨリテ吾人ハ(何故ニ) projective ノ語ヲ用ヒタルカヲ完全ニ知ルコトヲ得ルナリ。実際 Cremona ハ、一ノ elementary form ヨリ projection and secti [redacted] ノ chain ニヨリテ [redacted] derive セラレタル elementary form ヲ projective トナセシナリ。而シテ此 definition ヲ用ル学者甚ダ多シ。

Theorem III.

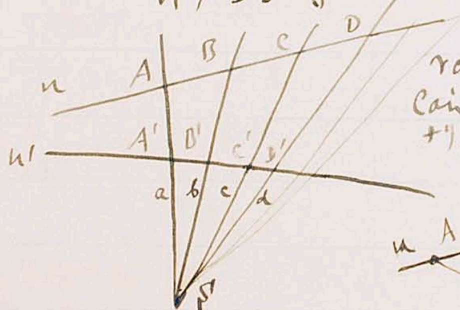
左右トリカヘル

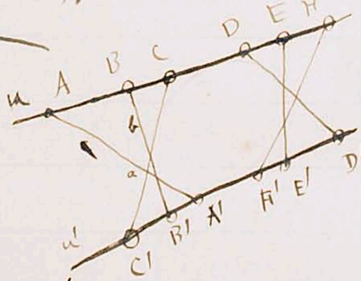
二ツノ projective range u, u' ニ於テ、correspond'g point ヲ結ブ(三ツノ)直線 a, b, c [redacted] ガ一点 S ヲ通ルトキハ、コノ range ハ perspective ナリ。



[redacted] 何トナレバ DD' 等ハ S ヲ通ルナレバ。

Cor. [redacted] 二ツノ projective range ニ於テ A, A' ガ coincide スルトキハ、perspective ナリ。





[redacted]

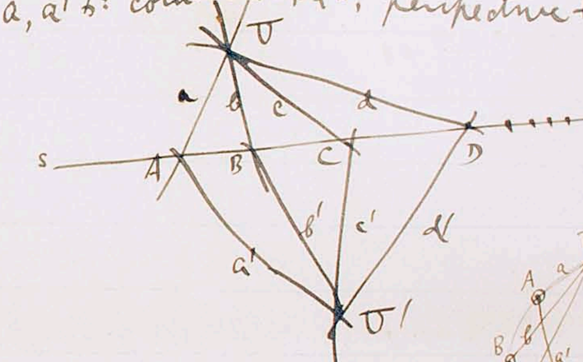
[redacted] a, b, c ガ [redacted] 同一ノ点ニ於テ交ハラザルトキハ、a, b, c, d, ... ハ (如何ナル図形ヲ画クカ) second order ノ flat pencil ヲナストイフ。之ニ對シテ普通ノ flat pencil ヲ first order ノ flat pencil トイフ。

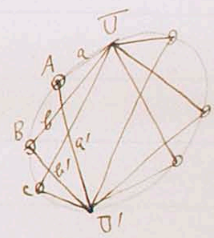
二ツノ proj. flat pencil U, U' ニ於テ corresp'g line ノ交リナル三ツノ点 A, B, C ガ一直線 s ノ上ニアレバ、コノ pencil ハ perspective ナリ。何トナレバ

[redacted]

d, d' ノ交リ D ハ直線 s ヲ通ル。

Corollary. 二ツノ projective flat pencil ニ於テ a, a' ガ coincide スルトキハ、perspective ナリ。





[redacted] A, B, C ガ一直線上ニアラザルトキハ、A, B, C, D, ... ハ (如何ナル locus ヲ画クカ) second order ノ range ハナス curve ヲ画クトイフ。之ニ對シテ普通ノ range ヲ first order ノ range トイフ。

Projective axial pencil [redacted] ニ関スル theorem III ノ [redacted] analogue ナル theorem ハ諸君ノ随意ニ任ス。

Theorem. second order ノ flat pencil a, b, c, ... ノ中ニハ same point ヲ通ルモノ二ツ以上存在セズ。何トナレバ若シ三ツガ same point ヲ通ルトキハ上ノ theorem III ニヨリテ ~~perspective ナリ~~ コレ first order ニ帰スレバナリ。

Def. 同一ノ平面上ニ於テ perspective ナラザル二ツノ first order ノ ~~flat pencil~~ range ノ correspond'g point ヲ結ビテ second order ノ flat pencil ヲ作ル。(又ハ envelope)

Theorem IV. second order ノ range A, B, C, ... ノ中ニハ同一ノ直線上ニアルモノ二ツ以上存在セズ。何トナレバ若シ三ツガ同一直線上ニアルトキハ、上ノ theorem III ニヨリテコレハ first order ニ帰スレバナリ。

Def. 同一ノ平面上ニ於テ perspective ナラザル二ツノ first order ノ flat pencil ノ correspond'g [redacted] line ノ intersection ハ second order ノ range (又ハ curve 又ハ locus) ヲ作ル。

斯ノ如ク elementary forms ヨリ漸々新ナル図形ヲ作リ上ゲテ之ヲ研究セルハ Steiner ガ (1832) ... [redacted] synthetic geometry ノ名称アル所以ナリ

Chapter IV
Products of projective elementary forms of the first rank

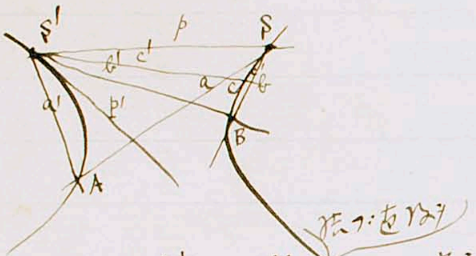
I. Curves of the second order and ~~flat pencils~~ envelopes

15. Fundamental theorems and constructions

コレヨリ総テ plane 上ノ図形ニ就テ考フ.

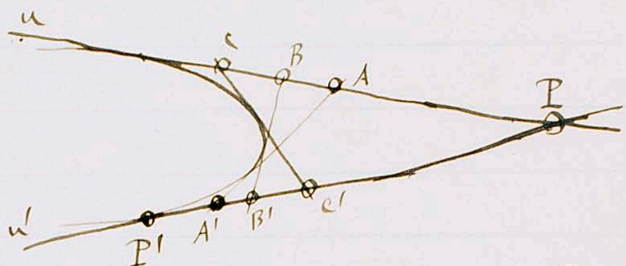
Theorem 1

二ツノ projective flat pencil S, S' ニヨリテ作ラルル second order ノ curve ハ, pencil ノ ~~vertex~~ centre S, S' ヲ過ル.



Proof. SS' ヲ p ト セヨ. p ヲ pencil S ニ属スルモノト考フレバ; 之ニ correspond スル pencil S' ノ line p' ハ p ト一致スルコトナシ. 何トナレバ p ト p' トガ一致スルトキハ二ツノ pencil ハ perspective トナルベケレバナリ. 故ニ p ト p' トノ intersect 即チ S' ハ curve ノ上ニアリ. 同様ニ S モ亦 curve ノ上ニアリ.

二ツノ projective range u, u' ニヨリテ作ラルル second order ノ envelope ハ, range ノ base u, u' ヲ含ム.



Proof. u, u' ノ交リヲ P ト セヨ. P ヲ range u ニ属スルモノト考フレバ, 之ニ correspond スル range u' ノ point P' ハ P ト一致スルコトナシ. 何トナレバ, P ト P' トガ一致スルトキハ二ツノ range ハ perspective トナルベケレバナリ. 故ニ P ト P' トヲ結ブ直線即チ u' ハ envelope ニ含マル. 同様ニ u モ亦 envelope ニ含マル.

Remark.

S' ヲ過ル line ハ curve ト S' ノ外ニ一般ニ他ノ one point ニ於テ交ル. 然レドモ p' ニ於テハ curve ト S' ニ於テ交リ, 換言スレバ, 他ノ交点ガ S' ト重レルモノト見做スヲ得.

u' ノ上ノ point ヲ通リ一般ニ u' ノ外ニ envelope ニ属スル他ノ one line ヲ引クヲ得. 然レドモ P' ヲ通リテハ envelope ニ属スル只一ツノ line u' ヲ引キ得ルノミ. 換言スレバ他ノ line ガ u' ト重レルモノト見做スヲ得.

Definition.

~~curve ト唯 one point ヲ~~

p' ヲ S' ニ於ケル curve ノ tangent トイフ.

P' ヲ envelope ト u' トノ point of contact トイフ.

Problem 1

二ツノ projective flat pencil S(a, b, c), S'(a', b', c') ヲ与ヘテ curves of the 2nd order ヲ作ルコト

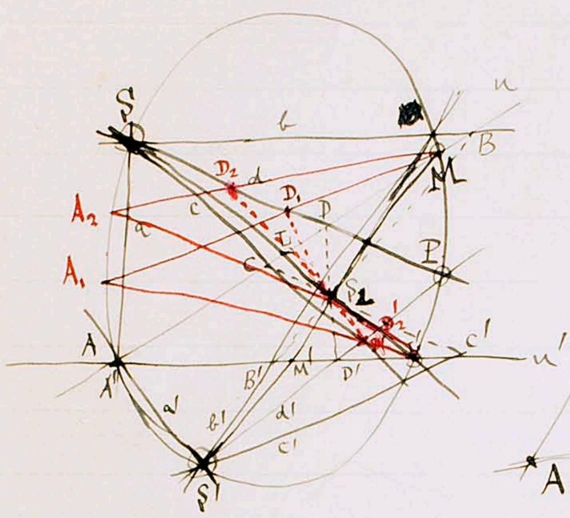
二ツノ projective range u(A, B, C), u'(A', B', C') ヲ与ヘテ envelopes of the 2nd order ヲ作ルコト

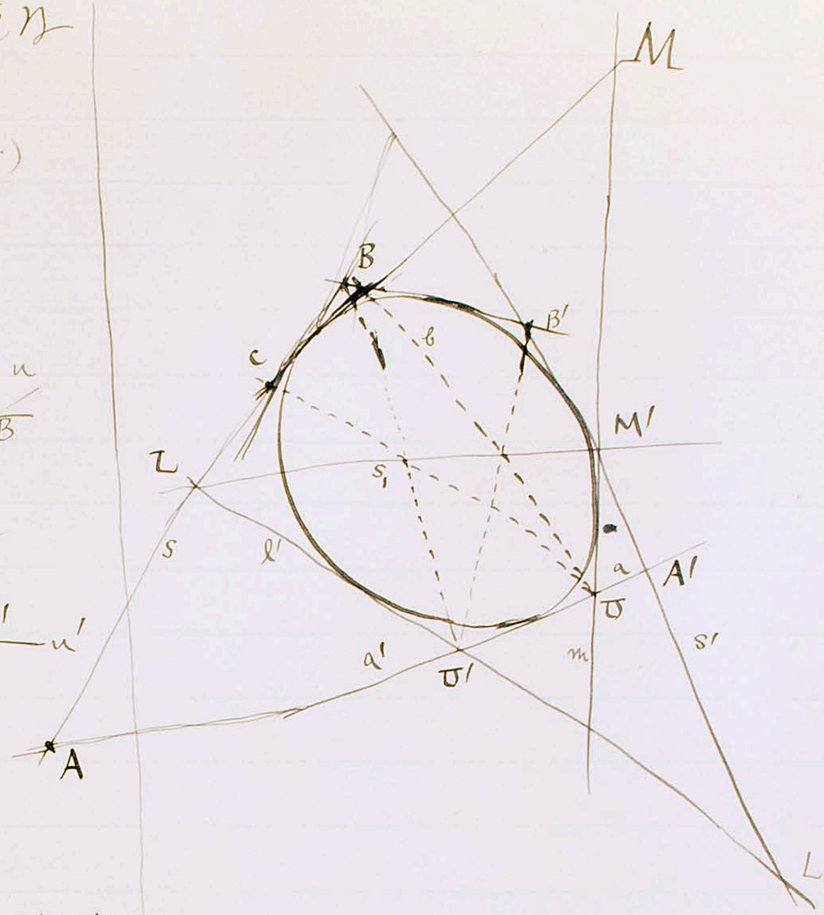
aa′ ヲ過ル任意ノ二直線

u, u′ ヲ作レバ,

$(ABC\cdots) \barwedge (A'B'C'\cdots)$

A ト A′ トハ一致スル故





$(ABC\cdots) \barwedge (A'B'C'\cdots)$.

故ニ BB′ ト CC′ トノ intersect S_1 ガソノ centre of perspective ナリ. 故ニ DS_1 ト u′ トノ intersect D′ ヲ S′ ヲ結ベバ, d ト d′ トハ curve ノ上ノ点 P ニ於テ交ル.

Problem 2.

aa′ ヲ過ギル任意ノ直線 (u 又ハ u′) ト curve トノ intersect ヲ求ムルコト

SS_1 ト u′ トノ intersect L′ ハ curve ノ上ニアリ. 又 $S'S_1$ ト u トノ intersection M ハ curve ノ上ニアリ.

Remark

吾人ハ S, S′ ヲ centre トスル projective pencil ヲ用ヒテ curves of the 2nd order ヲ作レリ. 然ルニ S, S′ ハコノ curve ニ對シテ特別ナル位置ヲ占ムルカトイフニ然ラズ. 夫レ u, u′ ハ任意ノ直線ナル故 M, L′ ハ任意ナリ. 又 d ヲ通過スルニ P モ任意ナリ.

今 S, M, P, L′, S′ ガ fixed ナリトセヨ. 然ルニ SL′, S′M ノ交点ハ S_1 ナル故, S_1 ハ fixed point ナリ. A ガ curve ノ上ヲ動クトセバ, D ハ fixed line SP ノ上ニ range ヲ画キ, D′ ハ fixed line S′P ノ上ニ range ヲ画キ, 而シテ DD′ ハ fixed point S_1 ヲ通ル. 故ニ range D ト D′ トハ perspective ナリ.

従テ MD, L'D' ハ projective pencil ヲ画シテ、コノ curve ヲ generate ス。即チ M, L' ヲ centre トスル projective pencil ガコノ curve ヲ generate ス。

故ニ S, S' ハ必ズシモコノ curve ノ上ノ任意ノ二点ヲ取リテ可ナリ。

コノ construct'n ニヨリ次ノ二ツノ theorem ヲ得。

Theorem 2

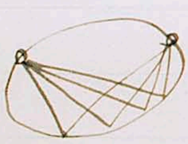
何レノ三ツヲ取ルモ同一直線上ニアラザル五ツノ point ハ、ソレ等ノ点ヲ経ル single curve of the 2nd order ヲ定ム

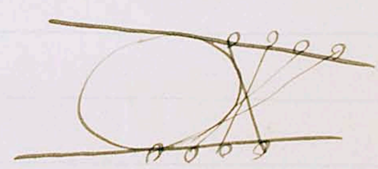
何レノ三ツヲ取ルモ同一ノ点ヲ過ラザル五ツノ line ハ、ソレ等ノ line ニ切スル single envelope of the 2nd order ヲ定ム

Theorem 3

curve of the 2nd order ノ任意ノ二点ヲ curve ノ上ノ他ノ点ニ結ブトキハ、二ツノ projective pencil ヲ得

envelope of the 2nd order ノ任意ノ二切線ハ envelope ノ他ノ切線トノ交点ニ二ツノ projective range ヲナス



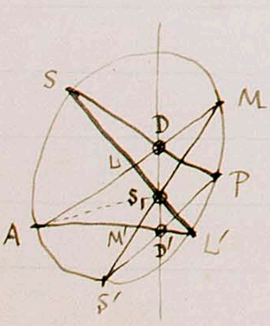


16. Pascal's and Brianchon's theorems.

今 second order ノ curve ノ上ニ任意ノ六点 S P S' M A L' ヲ取リテ六角形ヲ作ル。然ルトキハ其ノ opposite side ノ intersect'n

$(SP, MA) = D$,
$(PS', AL') = D'$,
$(S'M, L'S) = S_1$

ハ一直線上ニアリ。



逆ニ、六角形 S P S' M A L' ニ於テ其ノ opposite side ノ intersect D, D', S_1 ガ一直線上ニアリトセヨ。然ルトキハ

$S_1(ALDM) \barwedge S_1(AL'D'M')$.

故ニ $S(ALDM) \barwedge S'(AL'D'M')$.

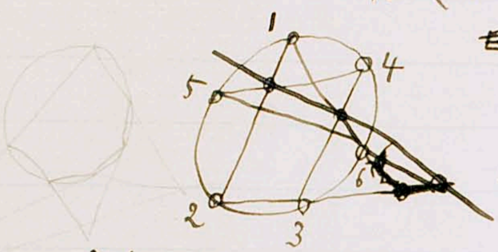
由テ S, S', A, L', P, M ハ second order ノ curve ノ上ニアリ。

由テ次ノ theorem ヲ得.

Second order ノ curve ノ上ニ任意ノ順序ニ任意ノ六点 1,2,3,4,5,6 ヲ取ル. 然ルトキハ 6角形 123456 ノ opposite side ノ intersect

(12,45), (23,56), (34,61)

ハ collinear ナリ. (Pascal ~~[illegible]~~ 1639)



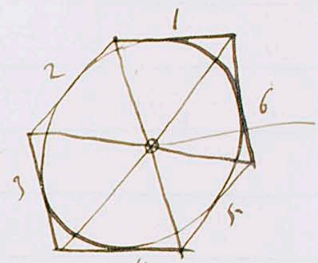
Pascal line

逆ニ, 任意ノ六角形 123456 ガ此 condit ヲ満足スルトキハ, 六ツノ vertices 1,2,3,4,5,6 ハ same curves of the 2nd order ノ上ニアリ.

Second order ノ envelope ノ任意ノ六ツノ切線ヲ任意ノ順序ニ取リテ 1,2,3,4,5,6 トス. 然ルトキハ六辺形 123456 ノ diagonal

(12,45), (23,56), (34,61)

ハ concurrent ナリ (Brianchon 1806)

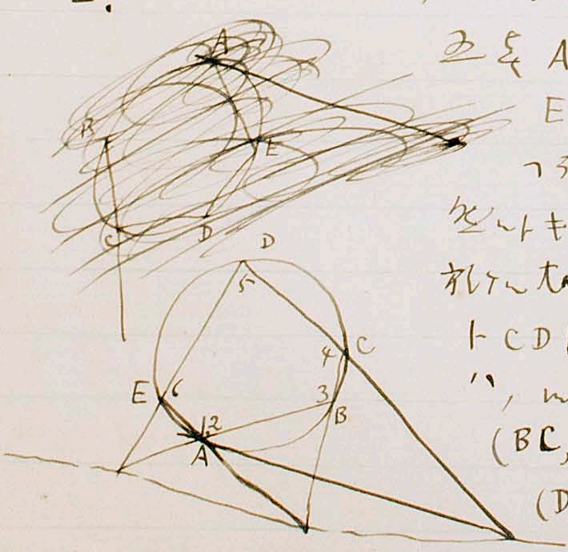


Brianchon point

逆ニ, 任意ノ六辺形 123456 ガ此 condition ヲ満足スルトキハ, 六ツノ辺 1,2,3,4,5,6 ハ same envelope of the 2nd order ニ切ス.

Particular cases

I. 2nd order ノ curve ノ上ニ五点 A, B, C, D, E ガ与ヘラル. 然ルトキハ A ニ引ケル tangent ト CD トノ intersect ハ, intersect (BC, EA), (DE, BA) ト collinear ナリ.

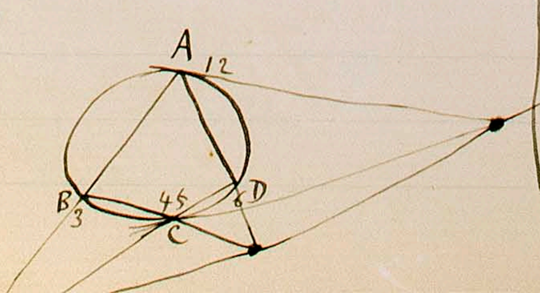


コレヨリ次ノ ~~construct~~ problem ヲ解クヲ得.

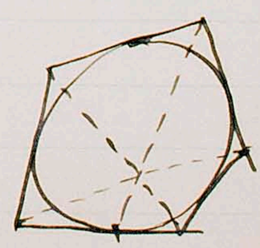
2nd order ノ curve ノ上ニ五点ガ与ヘラレタルトキ, ソノ点ニ於ケル tangent ヲ引ケ.

II.

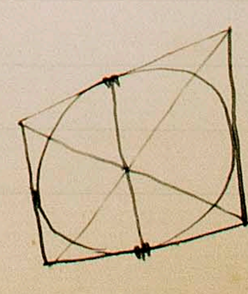
Maclaurin



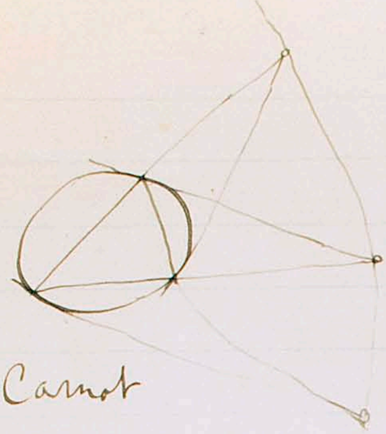
I.



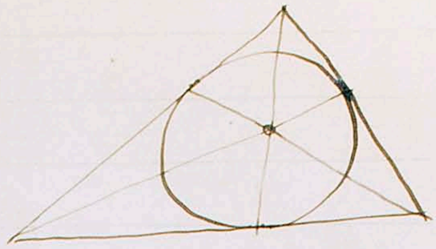
II.



III.



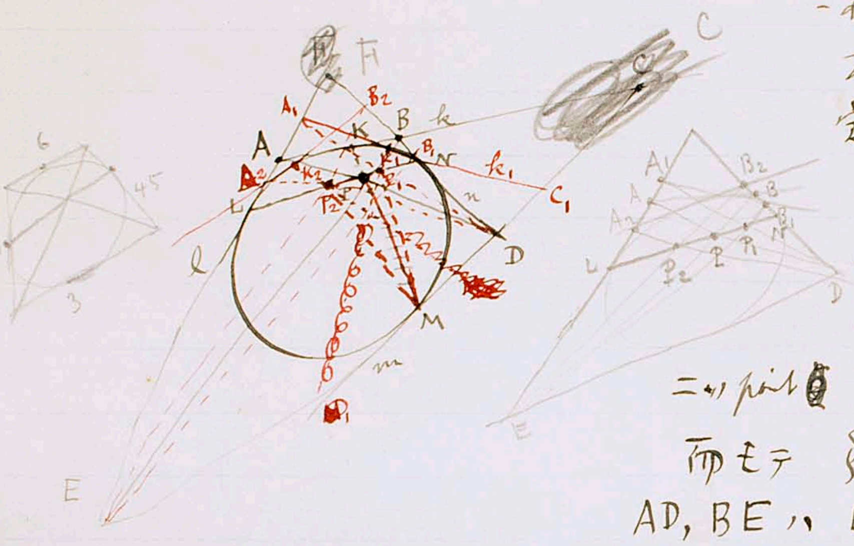
Carnot



Ceva (1678), Gergonne

IV. Equivalence of locus and envelope.

I. Second order ノ curve ノ上ニ四点 K, L, M, N ヲ取リ, ソレ等ノ点ニ於ケル tangent ヲ k, l, m, n トス.
而シテソノ tangent ヲ四辺トスル完全四辺形ヲ ABCDEF トス.



今, L, M, N ヲ fixed シテ K ヲ curve ノ上ヲ動カス. 然ルトキハ l, m, n ハ fixed シテ k ガ動ク.
二ツノ point E, D 及ビ line LN ハ fixed ス.
而シテ §16, II ノ右側ノ theorem ニヨリ
AD, BE ハ LN ト同一ノ点 P ニ於テ交ハル.

故ニ $D(PP_1P_2\cdots) \barwedge E(PP_1P_2\cdots)$

ナルガ故, $D(AA_1A_2\cdots) \barwedge E(BB_1B_2\cdots)$

即チ $(AA_1A_2\cdots) \barwedge (BB_1B_2\cdots)$

コレニ l, n 上ノ projective range ノ corresponding points ヲ結ブ直線 k ハ second order ノ envelope ヲ画ク. 換言スレバ, K ガ

$$L(NML\cdots) \barwedge N(NML\cdots)$$

ニヨリテ generate セラルル second order ノ curve ヲ画ク間ニ, k ハ l, n 上ニ於ケル projective range ニヨリテ generate セラルル second order ノ envelope ヲ画ク.

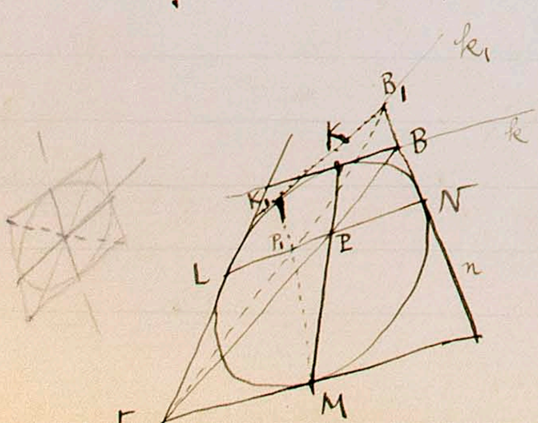
Theorem. Second order ノ curve ノ tangent ハ second order ノ envelope ヲ作ル.

Dual theorem. Second order ノ envelope ノ point of contact ハ second order ノ curve ヲ作ル.

II. 次ニ KM, BE ノ intersect P ハ常ニ LN ノ上ニアリ. 故ニ

$$M(PP_1P_2\cdots) \barwedge E(PP_1P_2\cdots)$$

$$\therefore M(KK_1K_2\cdots) \barwedge (BB_1B_2\cdots)$$



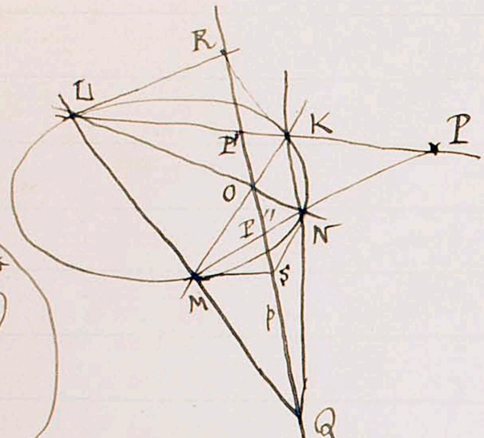
Theorem. Second order ノ curve 上ノ任意ノ一点ヲ M, 任意ノ一切線ヲ n トス. K ヲ此 curve 上ノ variable point トシ, k ヲ K ニ於ケル tangent トスレバ,

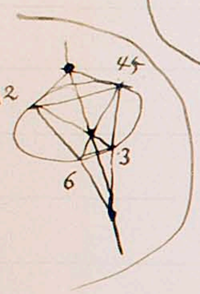
pencil $M(K\cdots) \barwedge$ range $n(k\cdots)$

ナリトス. 故ニ line MK ト point nk トヲ correspond セシムルコトヲ得 (Chasles …)

18. Poles and polars.

一ノ curve of the second order ヲ取リ、ソノ plane 上ニ於テ curve ノ上ニアラザル任意ノ一点ヲPトス。Pヲ過ギテ curve ト夫々K, L 及ビ M, N ニ於テ交ハル二ツノ直線ヲ引ク。(KM, LN), (KN, LM) ノ intersect ヲ夫々 O, Q トス。直線 OQ ヲ p トシテ表ハス。然ラバ K, L ニ於ケル tangent ノ交点ヲ R トスレバ、R ハ line p ノ上ニアリ。(§16, III 系ヨリ)





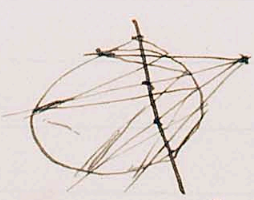
同様ニ M, N ニ於ケル tangent ノ交点 S モマタ line p ノ上ニアリ。

次ニ p ト KL トノ intersect ヲ P' トスレバ、KLPP' ハ harmonic range ヲナス。コレ四辺形 QNOM ヨリ明カナリ。

故ニ line p ハ PKL ノ如ク conic ト二点ニ於テ交ハル任意ノ一直線ヨリ作図スルコトヲ得。即チ K, L ニ関スル P ノ harmonic conjugate ヲ P' トシ、K, L ニ於ケル tangent ノ intersect ヲ R トシ、P'R ヲ結ベバ可ナリ。而シテ RP'P''S ハ collinear ナルガ故、PMN ヨリ作図ヲ始ムルモ同ジ line p ヲ得。

Theorem I. point P ヲ過ギテ any number ノ secant ヲ引ケバ、次ノ points ハ皆 one and the same line p ノ上ニアリ。

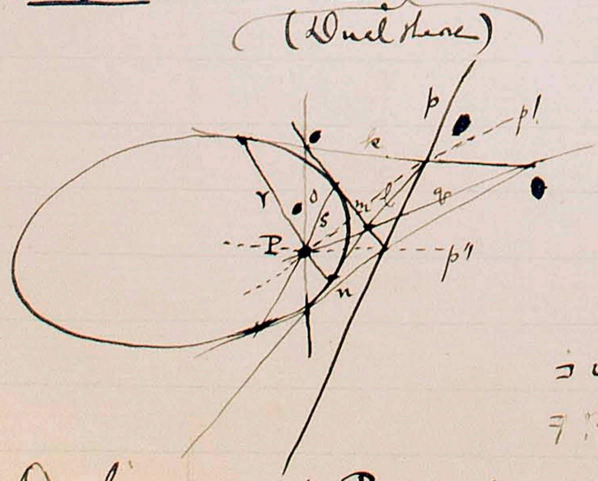
(1) O, Q ノ如キ点。
(2) P', P'' ノ如キ点。
(3) R, S ノ如キ点。



Def. line p ヲ上ノ curve of the second order ニ関スル point P ノ polar ナリトイフ。

~~Dual~~ Theorem. II (Dual theorem) line p 上ノ any number of point ヨリ tangent ヲ引ケバ、次ノ lines ハ皆 one and the same point P ヲ過グ。

(1) o, q ノ如キ line
(2) p', p'' ノ如キ line
(3) r, s ノ如キ line.



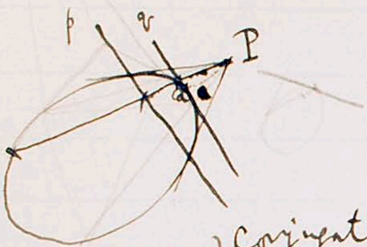
コレヲ証明スルニハ §16, II ノ右ノ theorem ヲ用ヒテ全ク dual ニスベシ。

Def. point P ヲ上ノ curve ニ関スル line p ノ pole トイフ。

コノ define ト construct トヨリ次ノ theorem アリ.

Theorem III. P ガ p ノ pole ナラバ, p ハ P ノ polar ナリ. 而シテ其ノ逆モ亦タ成立ス.

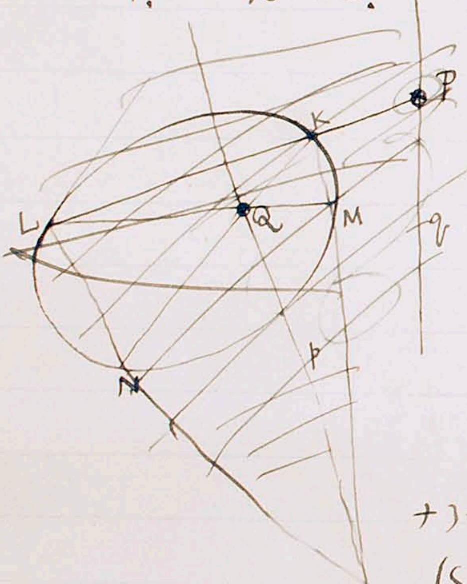
Theorem IV. P ガ 二次ノ curve ニ近ヅキテ其ノ上ノ一点 Q ニ会スレバ, p ハ Q ニ於ケル tangent q ニ会ス.

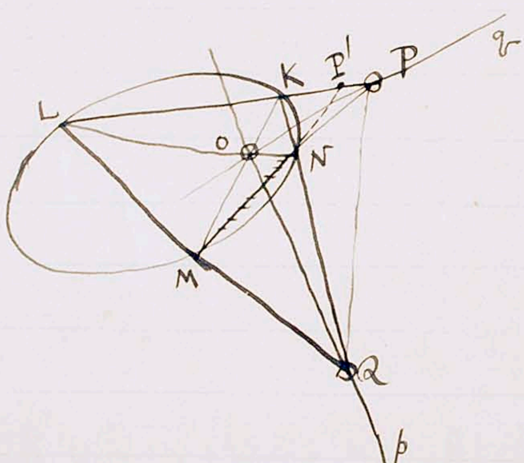


Pole & polar ノ theory ハ Desargues, De la Hire, Poncelet 等ニ因ルモノナリ.

19. Conjugate points and lines. ~~Method of reciprocal polars.~~

Theorem I. P ガ Q ノ polar q ノ上ニアレバ, Q ハ P ノ polar p ノ上ニアリ. Dual.





P ヲ過ギリテ KL ヲ引キ, QK, LQ ト curve トノ交リヲ M, N トス. LN, KM ノ交リヲ O ト~~ス~~ス. 仮設ニヨレバ P ハ q ノ上ニアリ. 又 §18 Theorem I ニヨリテ O ハ q ノ上ニアリ. 故ニ PO ハ q ニ外ナラズ. 次ニ M, N, P ハ collinear ナラザルベカラズ. 何トナレバ 若シ然カラズトセバ ~~MN~~ P/O ガ q トナル (§18, Theorem I) ベカラザレバナリ.

即チ MNP ハ collinear ナリ. 故ニ §18, Theor. I ニヨリテ Q ハ p ノ上ニアリ.

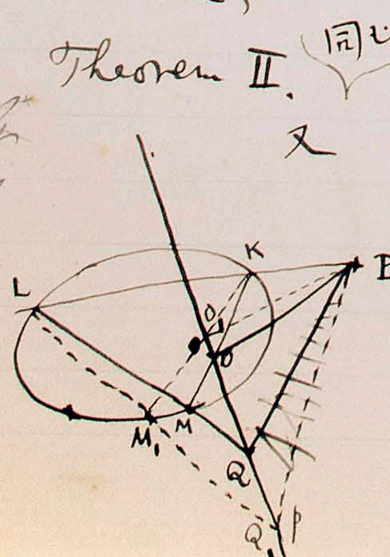
Def. 互ニ他ノ polar ノ上ニアル two points P, Q ハ curve of the second order ニ関シテ conjugate ナリトイフ.

dual ニ, 互ニ他ノ pole ヲ過ギル two lines p, q ハ conjugate ナリトイフ.

Def. 三角形 OPQ ヲ curve ノ self-conjugate triangle トイフ. ソノ各 side ハ corresponding vertex ノ polar ナルトキナリ.

Theorem II. 同ジ直線上ニ在ル Conjugate points ノ作ル range ハ projective ナリ.

又 ~~cent~~ pencil トソノ pole ノ range トハ projective ナリ.



Proof. P ヲ過ギリ definite line KL ヲ引ク. M ヲ curve 上ノ variable point トスレバ

$$K(MM_1\ldots)\ \pi\ L(MM_1\ldots)$$

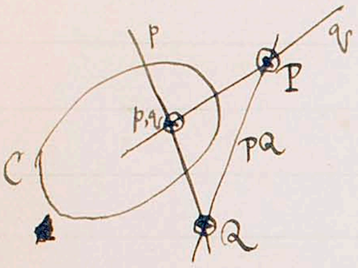
然ルニ KM, LM ト p トノ交点ヲ O, Q トスレバ Def. ニヨリテ O, Q ハ conjugate ナリ.

p ニテ切リシニ $(OO_1\ldots)\ \pi\ (QQ_1\ldots)$

故ニ $P(OO_1\ldots)\ \pi\ (QQ_1\ldots)$

20. Method of reciprocal polars.

pole and polar ノ理論ニヨレバ、plane ノ上ニ於テ一ツノ fixed curve of the second order C ヲ与フルトキニハ、point P ト line p トノ間ニ one to one correspondence (P, p) アリ。而シテ



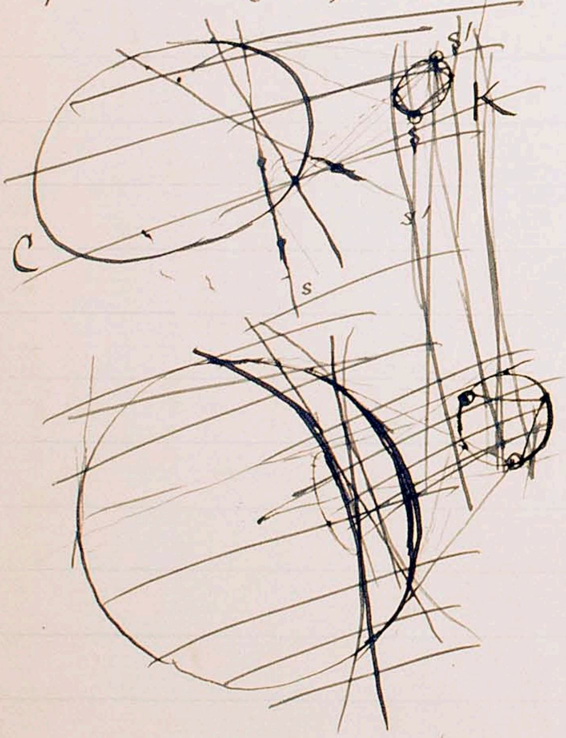
P, Q ノ結ビニ PQ ハ p, q ノ交リ pq ニ correspond.

又 P ガ q ノ上ニアレバ p ハ Q ヲ過ギル

即チ吾人ハ principle of duality ヲ実地ニ現スルコトヲ得ルナリ。Poncelet ハ コレヲ method of reciprocal polars ト呼ベリ。

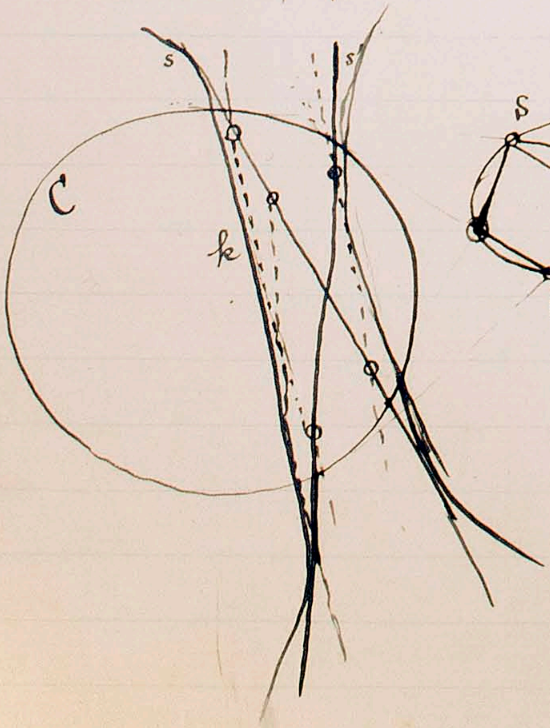
今 second order ノ curve ニツキテ此 method ヲ応用セン。

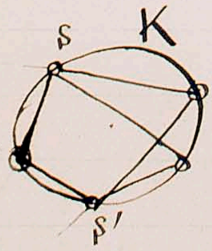
一ノ curve of the second order ヲ K トスレバ、K ハ二ツノ projective pencil (S), (S') ニヨリテ generate セラル。今 C ニ関スル points S, S' ノ polar ヲ夫々 s, s' トスレバ、projective pencil (S), (S') ハ夫々 projective range (s), (s') ニ correspond ス。(§19, Theorem II)



故ニ K ハ projective range (s), (s') ニヨリテ generate セラルル second order ノ envelope k ニ correspond ス。

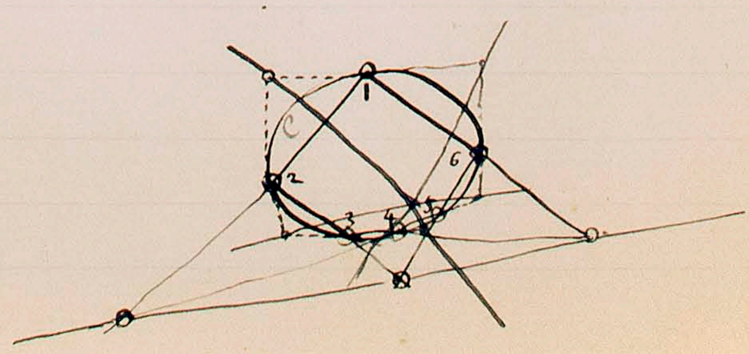
而シテ K ノ tangent ハ k ノ point of contact ニ correspond ス。





一直線ト K トノ交点ハ二ツ以上ナキ故、一点ヨリ k ニ引キ得ル tangent ハ二ツ以上ナシ。コノ意味ニ於テ K ヲ ~~curve~~ second degree ノ curve、k ヲ second class ノ curve トイフ。

Ex. C ニ関スル Pascal theorem ヲ polar reciprocate スレバ Brianchon トナル。

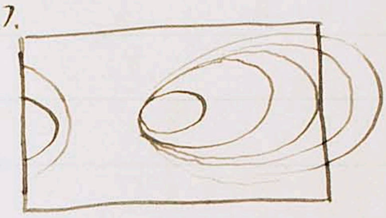


21. Classification of the curves and envelopes of the second order.

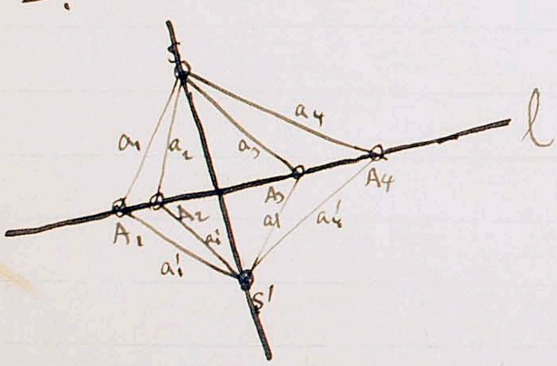
I. 此迄ハ 厳密ナル意味ニ於ケル projective geometry ヲ述ベタリ。コレヨリ affine geometry ニ移ル。ヨツテ improper elements ヲ考ヘニ入レル。

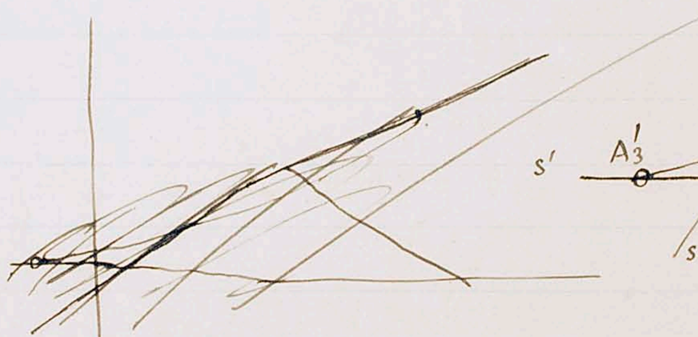
Def. second order curve ガ line at infinity ト交ラザルカ、コレニ切スルカ、又ハ二 points ニテ之ト交ルカニ従テ、之ヲ ellipse, parabola, hyperbola トイフ。

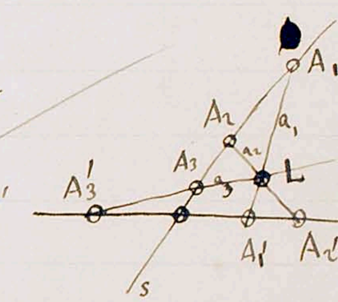
サテ ellipse ハ closed curve ナリ。又 hyperbola ノ point at infinity ニ於ケル tangent ヲ asymptote トイフ。



II.



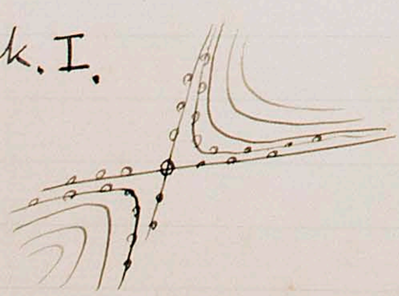


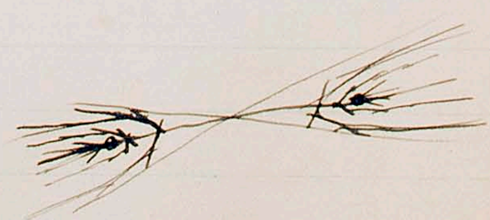


(S), (S') ガ projective pencil ヲトシ、ソレガ perspective ナルトキハ second order ノ curve ヲ generate セズ。コノ場合ニハ l, SS' ナル line-pair ヲ以テ degenerate curve ト見做ス。

L, SS' ナル point-pair ヲ以テ degenerate envelope ト見做ス。

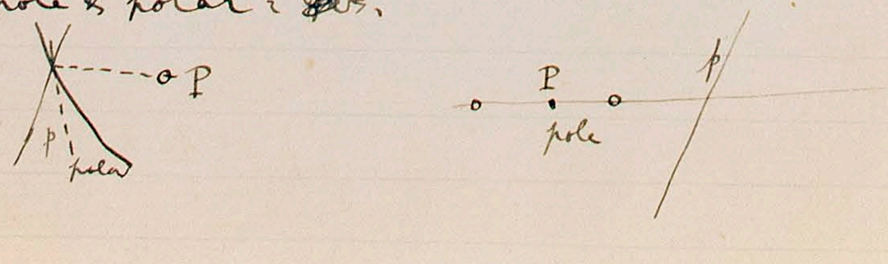
Remark. I.



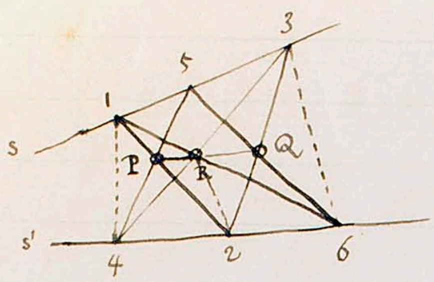


Remark. II. コノ場合ニハ curve ト envelope トノ equivalence トイフコトハ意味ヲ失フ。

pole & polar ニ論ズ。



但ニ Pascal-Brianchon ハ 求之ス.



$R(1P42) \barwedge 4(1532)$.

$4(1532) \barwedge 6(RQ32)$.

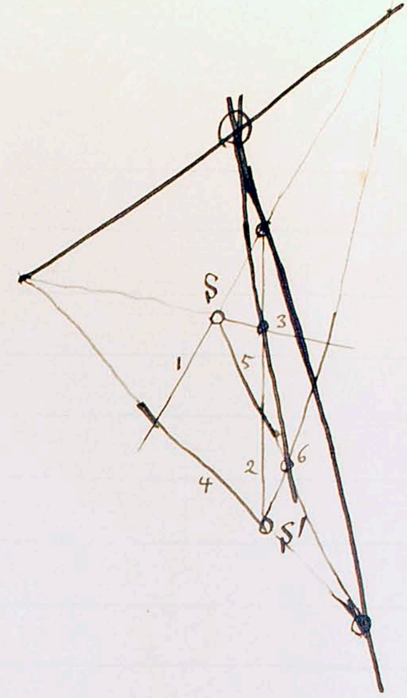
$6(RQ32) \barwedge R(1Q42)$.

故ニ

$R(1P42) \barwedge R(1Q42)$.

故ニ RP ト RQ トハ coincide ス.

コノ particular case ハ Pappus ノ定理ニ該ナリ



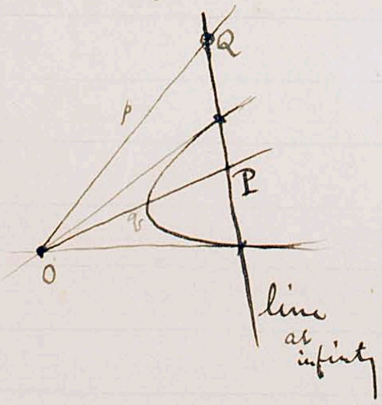
22. Some definitions.

Def. line at infinity ノ (second order ノ curve ニ関シ) pole ヲ curve ノ centre トイフ. (故ニ parabola ノ centre ハ infinity ニアリ.)

point at infinity ノ polar ヲ curve ノ diameter トイフ. 互ニ conjugate ナル diameter ヲ conjugate diameter トイフ.

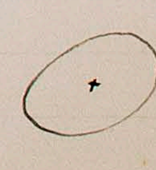
Theorem I. centre ヲ過ギル line ハ diameter ナリ. 逆ニ diameter ハ centre ヲ過ギル.

Theorem II. Hyperbola ノ asymptotes ハ centre ヲ過リ, 且ツ (任意ノ) conjugate diameter ニ関セテ harmonic ナリ.



Def. second order ノ curve (ノ平面ニ) 於テ, ソノ curve 以外ノ点ヨリ 二ツノ tangent ヲ引キ得ルトキハ ソノ点ハ curve ノ外部ニアリトイヒ, (tangent ヲ) 引キ得ザルトキハ curve ノ内部ニアリトイフ.

Theorem III. ellipse ノ centre ハ curve ノ内ニアリ. Hyperbola ノ centre ハ curve ノ外ニアリ.



(証) hyperbola ハ明カナレバ ellipse ノミニ就テ証明セン. ellipse ノ centre ガ外ニアリトセバ, ソレヨリ引ケル tangent ノ point of contact ヲ結ビタル直線ハ polar ナリ. 然ルニ コノ polar ハ line at infinity ナリ. 故ニ curve ガ line at infinity ト二点ニ於テ交ラザルベカラズ. コレ impossible ナリ.

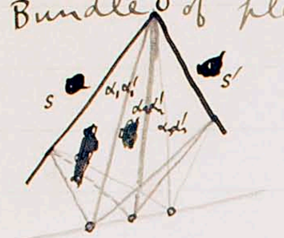
Chapter V. Products of projective elementary forms of the first rank.

II. Cones and Ruled surfaces of the second order.

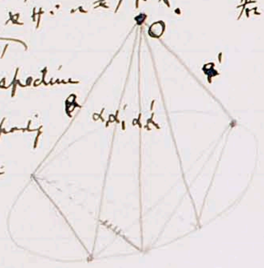
23. Cones and Conical envelopes of the second order.

吾々ハ same plane 上ニ於ケル projective elementary forms ノ products トシテ second order ノ curve 及ビ envelopes ヲ得タリ. コレヨリ same bundle ニ属スル projective elementary forms ノ products ヲ考フ.

Bundle of planes



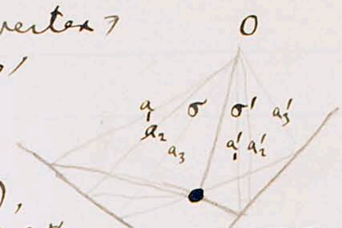
Bundle ノ vertex ヲ O トミ, 二ツノ [redacted] projective axial pencil $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$, $(\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3', \dots)$ ヲ [redacted] 考フル. コノ二ツノ pencil ノ axis ハ一致セザルモノトス. 若シコノ二ツノ axial projective pencil ガ perspective ナラバ, ソノ correspond plane ノ intersect $(\alpha_1,\alpha_1')(\alpha_2,\alpha_2'),\dots$ ハ one plane ヲ作ル.



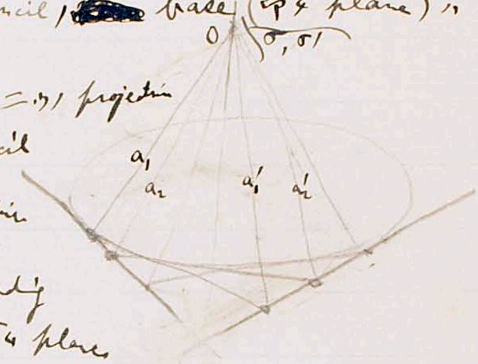
何トナレバ perspective ナル二ツノ axial pencil ハ同ジ point range ノ projection ナルベケレバナリ. (§.11)

Def. [redacted] 若シコノ二ツノ projective axial pencil ガ perspective ナラザルトキハ, ソノ corresponding planes ノ intersect ハ second order ノ cone ヲ generate スト称ス. O ヲ cone ノ vertex トイフ.

Bundle of lines



Bundle ノ vertex ヲ O トシ, 二ツノ projective flat pencil $(a_1, a_2, a_3, \dots)$, $(a_1' a_2' a_3' \dots)$ ヲ考フル. コノ二ツノ pencil ノ [redacted] base (即チ plane) ハ一致セザルモノトス. 若シコノ二ツノ projective flat pencil ガ perspective ナラバ, ソノ corresponding line ヲ含ム plane $(a_1 a_1')(a_2 a_2'),\dots$ ハ same line ヲ過ギル.



何トナレバ perspective ナル二ツノ flat pencil ハ同ジ axial pencil ノ [redacted] section ナルベケレバナリ (§.11).

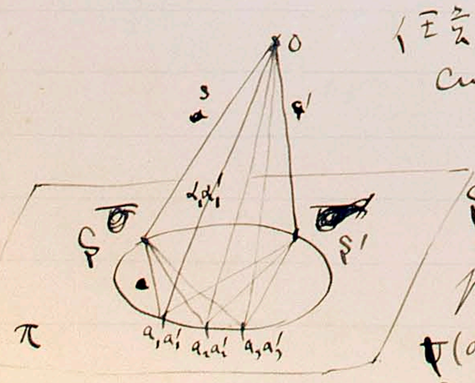
Def. [redacted] 若シコノ二ツノ projective flat pencil ガ perspective ナラザルトキハ, ソノ corresponding lines ヲ含ム plane ハ second order ノ conical envelope ヲ generate スト称ス. O ヲソノ vertex トイフ.

又ハ second order ノ axial pencil

Theorem 1.

Second order ノ cone ハ second order ノ curve ヲ space ノ任意ノ一点 [redacted] ヨリ project シテ得ラル. 逆ニ second order ノ cone ヲ任意ノ plane ニテ切レバ ~~ノ section ハ~~ second order ノ curve ヲ得.

Proof. plane π 上 [redacted] ニ於テ任意ノ second order curve ヲ [redacted] 考ヘ, ソノ上ニ二点 S, S' ヲ取レバ, curve ハ二ツノ projective flat pencil $S(a_1, a_2 \dots)$, $S'(a_1' a_2' \dots)$



ノ corresponding lines ノ intersect

$(a_1 a_1')$, $(a_2 a_2')$, ---- ニヨリテ generate セラル.

今コノ plane π 上ニアラザル任意ノ一点 O ヨリ コノ図形全体ヲ project セバ projective flat pencil $S\#(a_1 a_2 \dots)$, $S\#'(a_1' a_2' \dots)$ ハ O ヲ vertex トスル same bundle ニ属スル 二ツノ projective axial pencil $\#(\alpha_1 \alpha_2 \dots)$, $\#'(\alpha_1' \alpha_2' \dots)$ ニ変ハル。 而シテ second order ノ curve ハ $(\alpha_1 \alpha_1')$, $(\alpha_2 \alpha_2')$, --- ニヨリテ generate セラルル図形ニ変ハル。 コレ即チ second order ノ cone ニ外ナラズ。

第二ノ部分モ全ク同ジ故略ス。

コノ theorem ノ結果トシテ second order ノ cone 或ハ conical envelope ノ性質ハ second order ノ curve 或ハ envelope ノ性質ニ reduce セラル

コヽニ其ノ二三ノ theorem ヲ述ベン。

Theorem II

second order ノ cone ト其ノ vertex ヲ過ギル plane トハ 二ツヨリ多クノ line ニテ交ハルコトナシ.

Theorem III.

second order ノ cone ハ one point ヲ過ギル五ツノ line ニヨリテ決定セラル。 但シコノ lines ノ何レノ三ツモ same plane ノ上ニアラザルモノトス。

tangent plane, polar plane (polar line ニ相当スルモノ), polar line (pole ニ相当スルモノ), self-conjugate trieder 三面角 等ニツキテハ一々述ベズトモ明カナリ。

Def. vertex O ガ infinity ニアルトキノ cone ヲ cylinder トイフ.

24. Classification of products of projective elementary forms of the first rank.

吾人ハ first rank ノ二ツノ projective elementary forms ニヨリテ 四ツノ図形即チ second order ノ curve, envelope, cone, conical envelope ヲ generate スルコトヲ知レリ。 然ラバ elementary form

他ノ種々ノ combinatⁿ ニヨリテ 亦 新ナル 他ノ図形ガ得ラルベキヤ否ヤ.

I. a. same plane 上ニ於テ projective ナル pencil ト pencil. (second order ノ curve)
   b. 〃 〃 〃 range ト range. (second order ノ envelope)

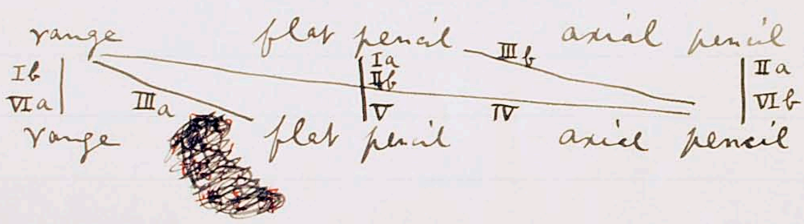
II. a. same bundle ニ於テ projective ナル axial pencil ト axial pencil (second order ノ cone)
    b. same bundle ニ於テ 〃 〃 flat pencil ト flat pencil (second order ノ conical envelope)

III. a. projective ナル flat pencil ト point range
     b. flat pencil ト axial pencil

IV. projective ナル point range ト axial pencil. (self-dual)

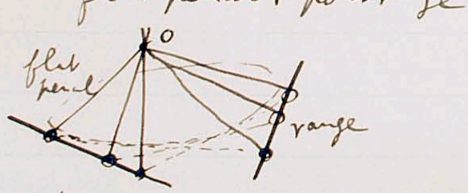
V. space ニ於ケル flat pencil ト flat pencil (self-dual)

VI. a. 一般ニ space ニ於ケル range ト range
    b. 一般ニ space ニ於ケル axial pencil ト axial pencil



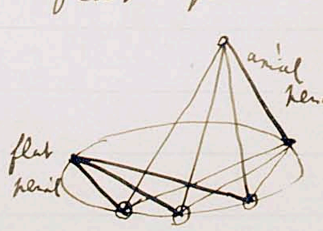
III.

flat pencil ト point range



コノ場合ニハ second order ノ conical envelope ヲ得.
(§23 ノ右側)

flat pencil ト axial pencil



second order ノ curve ヲ得.
(§23 ノ左側)

IV.

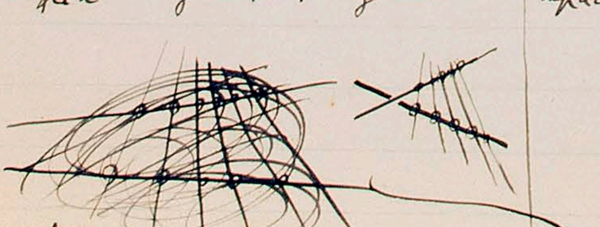
point range ト axial pencil ヨリハ intersectⁿ ニモ connectⁿ ニヨリテ 何モ得ラレズ.

V.

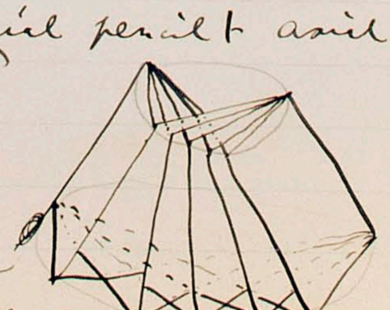
space ニ於ケル二ツノ projective flat pencil ノ correspondg line ハ相交ハラザレバ, 何モ得ラレズ.

VI.

space ニ於ケル range ト range



space ニ於ケル axial pencil ト axial pencil



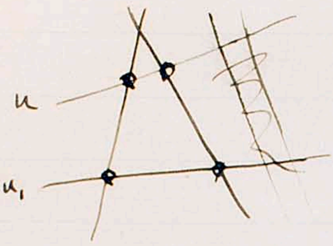
Def.

Def. Same plane ノ上ニアラザル二ツノ projective point range ノ correspondg ...

コノ二ツノ図形ガ得ビモノ ナルコトハ後ニ之レヲ知ルベシ

25. Ruled surfaces of the second order. Generat'g line.

Def. Same plane ノ上ニアラザル二ツノ projective point range u, u_1 ノ corresponding points ヲ結ブ ~~system~~ a set of lines V ハ ruled surface of the second order ヲ generate スト云フ. ソノ line V ヲ generating line ト称シ, u, u_1 ヲ directrix ト云フ.



~~[illegible]~~ 二ツノ generat'g lines ハ same plane ノ上ニアラズ。何トナレバ、コノ二ツガ same plane ノ上ニアレバ u, u_1 モ亦 same plane ノ上ニアレバナリ。 此ノ ruled surface ハ curved surface ナリ. generat'g line ノ existence ヲ認メタルハ Monge (1794) ナリ.

吾人ハ Steiner ノ思想ニ従テ論ゼン.

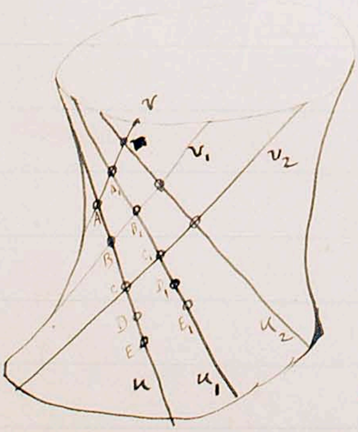
Theorem I. (i) Ruled surface ハ 第二ノ set of lines V ヲ含ム. 而シテ 一ツノ set ニ属スル任意ノ line ハ 他ノ set ニ属スル all lines ト交ハル. 之ニ反シテ 同ジ set ニ属スル line ハ 互ニ交ハルコトナシ.

(ii) 一ノ set ニ属スル任意ノ line 上ノ任意ノ pair ハ 他ノ set ニ属スル 一ツノ line ノ上ニアリ.

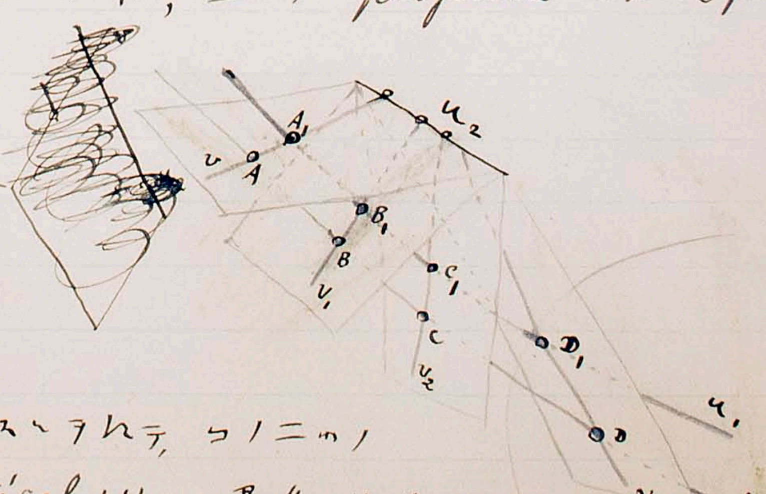
~~一ノ set ニ属スル任意ノ line ヲ含ム plane ハ 他ノ set ニ属スル 一ノ line ヲ含ム~~ ~~Dupin~~

コノ theorem ハ Monge-Hachette (1802).

Proof. range u, u_1 ノ correspond'g points ヲ結ブ所ノ set V ニ属スル任意ノ三ツノ line ヲ v, v_1, v_2 トス. コノ v, v_1, v_2 ニ交ハル任意ノ第三ノ直線ヲ u_2 トス. (直線ハ ∞^4 個アルモ 三ツノ fixed line ニ交ハル直線ハ ∞^1 個アリ)



u_2 ヲ axis トシテ 二ツノ point range u, u_1 ヲ project スレバ、二ツノ projective axial pencil ヲ得.

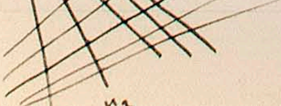


三ツノ corresponding planes

u_2A, u_2A_1;
u_2B, u_2B_1,
u_2C, u_2C_1 ハ coincide スルヲ以テ、コノ二ツノ proj. axial pencil ハ identical ナリ. 即チ u, u_1 ニ就テノ任意ノ correspond'g point ヲ D, D_1 トスレバ、二ツノ plane u_2D, u_2D_1 ハ一致ス. 換言スレバ、line DD_1 ハ u_2 ト交ハル. 即チ v_3 ハ u_2 ト交ハル. 由テ V ニ属スル任意ノ line ハ u_2 ト交ハル.

同様ニ他ノ line u_3 ヲ取ルモ, V ニ属スル任意ノ line ハ u_3 ト交ハル.

即チ此ノ所望ヲ得.



Remark. コノ結果トシテ ruled surface ハ self-dual ナリ.

由テ例ヘバ Theorem I ノ第二ノ部分ヨリ次ノ corollary ヲ得.

一ノ set ニ属スル任意ノ line ヲ含ム plane ハ他ノ set ニ属スル一ノ line ヲ含ム.

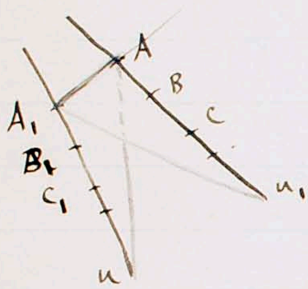
~~換言スレバ一ノ generatg line ヲ含ム plane ト ruled surface トハ~~ ~~line pair~~ ~~他ノ set ノ generatg line ニ於テ接ス.~~

set of lines U ハ他ノ set V ニ属スル任意ノ三ツノ lines v, v_1, v_2 ト交ハル総テノ line ヨリ成立ツ。 而シテ U ニ属スル任意ノ三ツノ line ヲ u, u_1, u_2 トスレバ set V ハ u, u_1, u_2 ニ交ハル総テノ line ヨリ成ル。

コレニヨリテ第一ノ部分ハ明カナルベシ。 第二ノ部分ハ定義ナリ。 ~~(proj. range entirety)~~
~~故ニ之ノ dual トミラルベシ~~

Corollary. ruled surface ハ互ニ相交ラザル三ツノ直線ニヨリテ定マル。

Theorem II. axis ガ相交ラザル二ツノ proj. axial pencil u, u_1 ハ ruled surface V ヲ generate ス。

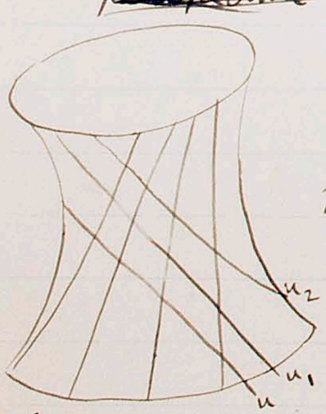


proof. axial pencil $u^{(\alpha\beta\gamma\ldots)}$ ヲ u_1 ニテ截リテ point range $(ABC\ldots)$ ヲ得、又 axial pencil $u_1^{(\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots)}$ ヲ u ニテ截リテ range $(A_1B_1C_1\ldots)$ ヲ得タリトセバ,

$$u_1(ABC\ldots)\ \pi\ u(A_1B_1C_1\ldots).$$

コレハ α ハ uA ニシテ α_1 ハ u_1A_1 ナレバ corresponding plane ノ intersection $\alpha\alpha_1$ ($\beta\beta_1\ldots$) ハ corresponding line ノ如ク AA_1 ($BB_1\ldots$) ニ同ジ。 ヨッテ $\alpha\alpha_1, \beta\beta_1, \ldots$ ハ ruled surface V ヲ画ク。

Theorem III. a set of lines ~~凡~~ ソレニ交ハル任意ノ二ツノ line ヲ projective range ニテ截ル。 又 a set of lines ヲソレニ交ハル任意ノ二ツノ line ヨリ project スレバ projective axial pencil ヲ得。 ~~而シテ コノ point range ト axial pencil トハ projective ナリ~~ (Steiner). ~~perspective~~



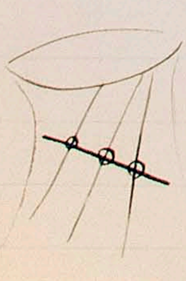
Proof. V ガ u, u_1 トニ交ハルトキ, V ノ総テト交ハル如キ u_2 ヲ取ルコトヲ得。 故ニ u, u_1 ト axial pencil $u_2(v, v_1, v_2, \ldots)$ トノ交リガ point range $u(v, v_1, v_2\ldots)$, $u_1(v, v_1, v_2\ldots)$ ニ外ナラズ。 故ニコノ二ツノ range ハ projective ナリ。

第二ノ部分ハソノ dual ナリ。

26. Degree, class, plane section.

Theorem I. 一ノ line ガ ruled surface ト二ツヨリ多クノ点ニテ交ハレバ、ソノ line ハ全ク surface ニ含マル。

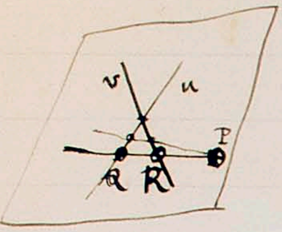
何トナレバ、ソノ直線ガ三ツノ点ニテ surface ト交ハレバ、ソノ交点ヲ過ギリテ三ツノ generating line ヲ引クコトヲ得。 故ニ上ノ直線ハ他ノ set of generating lines ニ属スベキナレバナリ。



コノ考ニ依テ ~~凡~~ 各 ruled surface ハ second degree ノ surface ナリト称セラル。

Theorem II. Ruled surface 上ノ一点ヲ過ギル二ツノ generating line u, v ヲ含ム plane ハ、コノ surface ト他ノ点ヲ共有セズ。(Dupin, 1813)

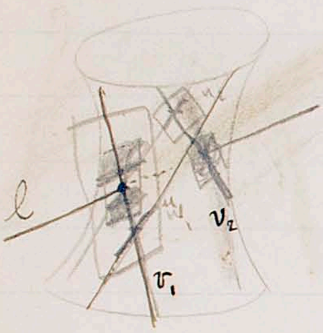
何トナレバ、若シ他ノ点 P ヲ共有スト假定セバ、P ヲ過ギリテ u, v ト交ハル(任意ノ)直線 PQR ヲ引ケバ、コノ直線ハ surface ニ含マレザルベカラズ。従テコノ plane ガ surface ニ含マルルコトトナル、コレ impossible ナリ。



Def. 上ノ plane (u, v) ハ point (u, v) ニ於テ surface ニ touch スト云フ。

Theorem III. Surface ニ含マレザル一ノ直線 l ヲ過ギリテ、二ツヨリ多クノ tangent plane ヲ引クコトヲ得ズ。

何トナレバ l ヲ過ギル tangent plane ハ u, v ~~[illegible]~~ ヲ含マザルヲ得ズ。故ニ ~~[illegible]~~ l ト v トハ same plane ノ上ニアラザルベカラズ、即チ l ト v トハ相交ハル。即チ l ハ surface ト交ラザルヲ得ズ。今 l ト surface トノ交点ヲ 次ニ 過ギル v ヲ過ギル tangent plane ヲ引ケバ、ソレヲ含ム u ガ定マル。(§25, Theorem II remark)



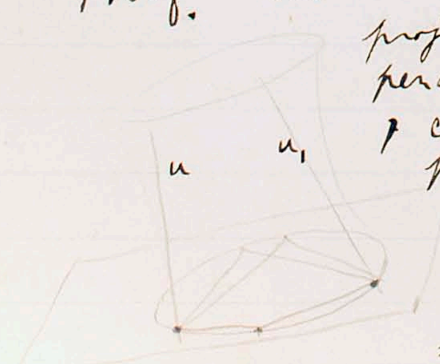
故ニ tangent plane ノ数ハ l ト surface トノ交点ノ数ニ等シ。

コノ意味ニヨリテ凡テノ ruled surface ヲ second class ナリト云フ。(Plücker, 1832)

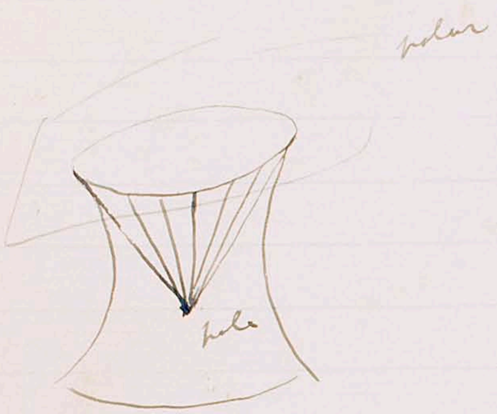
Theorem IV. generating line ヲ含マザル plane ト ruled surface トノ intersect ハ second order ノ curve ナリ

generating line ノ上ニアラザル point ヨリ ruled surface ヲ project スレバ、second order ノ conical envelope ヲ得。

Proof. ruled surface ハ projective axial pencil u, u_1 ノ corresponding plane ノ intersect ニヨリテ generate セラル。故ニコレヲ plane ニテ截レバ、二ツノ projective flat pencil ノ intersect ニヨリテ generate セラルル図形ヲ得。コレ即チ second order ノ curve ナリ

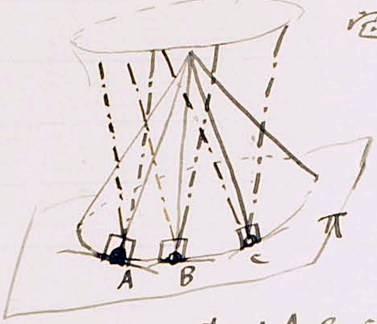


Theorem V. Second order ノ curve ノ上ノ点ニ於テ ruled surface ニ touch スル plane ハ second order ノ conical envelope ヲ作ル。



Ruled surface ニ touch スル plane ガ second order ノ conical envelope ヲ作ルトキハ，ソノ point of contact ハ second order ノ curve ヲ作ル。

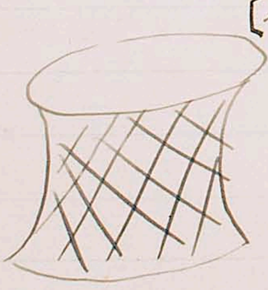
今三ツノ point of contact A, B, C ニ於テ定メラルル plane π ト conical envelope トノ intersect ヲ作レバ，second order ノ envelope ヲ得。即チソノ point of contact A, B, C ハ second order ノ curve k ノ上ニアリ。次ニ ruled surface ト plane π トノ intersect ハ，一ノ second order ノ curve 即 k' ナリ。然ルニ k ト k' トハ三点 A, B, C ト ソノ tangent トヲ共有スルガ，coincide セザルヲ得ズ。



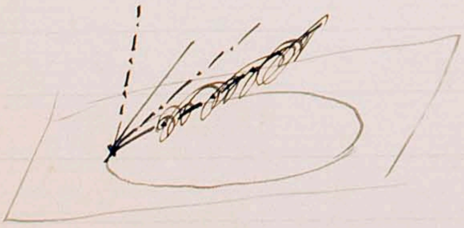
27. Classificat of the ruled surfaces.

Affine geometry ニ於ケル分類ハ Poncelet ナリ；interest

I. Second order ノ ruled surface ト plane at infinity トガ直線ニテ ~~交~~ セザルトキ，換言スレバ curve of the second order ナル ~~交~~ ルトキハ，コレヲ hyperboloid of one sheet トイフ。
[surface of revolution ノ場合ハ Kepler (1615), Wren (1669), Parent (1702) ノ知ルトコロ]



此ノ hyperboloid of one sheet ハ plane at infinity ニ touch セズ。此ノ point at infinity ニ於テ hyperboloid of one sheet ニ touch スル plane ハ proper ナル plane ナリ。之ヲ asymptotic plane トイフ。



asymptotic plane ハ二ツノ parallel ナル generating line ヲ含ム。即チ総テノ asympt. plane ハ one point (centre) ヲ common ニシ，conical envelope ヲ作ル。(§26, Theorem V).

コノ cone ヲ asymptotic cone トイフ (Euler 1743)。此ノ asymptotic cone ノ各 generating line ハ hyperboloid of one sheet ノ二ツノ generating line ニ parallel ナリ。

Asymptotic cone ノ二ツノ generating line ニ parallel ナルカ，一ツノ generating line ニ parallel ナルカ，又全ク generating line ニ parallel ナル (一ノ plane ガ) exist セザルトキハ，コノ asymptotic cone ト plane トハ infinity ニ於テ二ツノ点ヲ共有スルカ，一ツノ点ヲ共有スルカ，又ハ全ク共有セザルカ；即チソノ intersect ハ

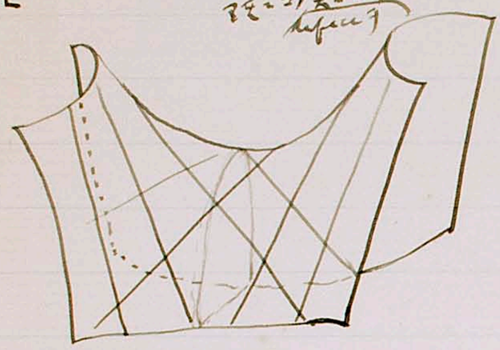
hyperbola, parabola 又ハ ellipse ナリ. 故ニ次ノ如ク言フヲ得.

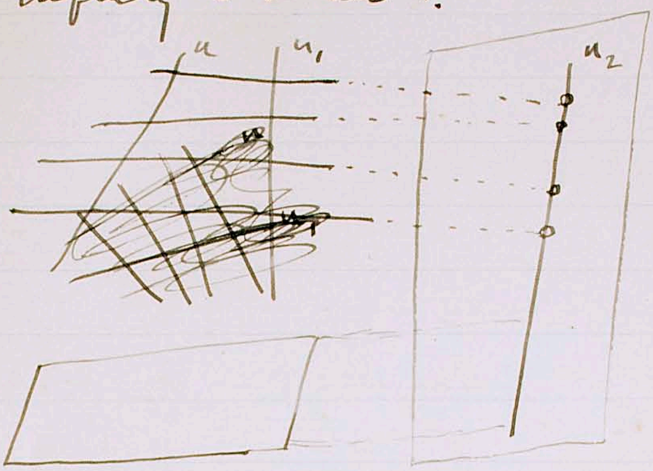
hyperboloid of one sheet ノ plane section ハ, 其ノ plane ト parallel ナル generating line ガ二ツアルカ, 一ツアルカ, 又ハナキカニ従テ, hyperbola, parabola 又ハ ellipse ナリ.

II. Ruled surface ト plane at infinity トガ一ツノ line 従テ二ツノ line ヲ共有スルトキハ, 其ノ ruled surface ヲ hyperbolic paraboloid ト云フ.

[surface of ~~revolution~~ revolution ノ場合ハ Archimedes 従ヒ其ノ考ヘシ surface ヲ]

hyperbolic paraboloid ハ plane at infinity ニ touch ス.

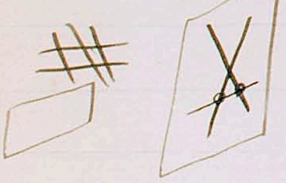


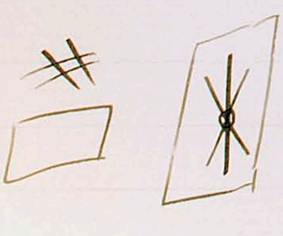


相交ラザル二直線 u, u₁ ニ交リ且ツ ~~[illegible]~~ u, u₁ ノ孰レニモ parallel ナラザル plane ニ parallel ナル line ハ hyperbolic paraboloid ヲ生ズ. 何トナレバ, 是等ノ all lines ト plane at infinity トノ交リハ一ノ直線 u₂ ナリ, ~~其~~ 即チ ruled surface ト plane at infinity トハ一ツノ直線ヲ共有ス. 従テ二ツノ直線ヲ共有ス.

従テ其ノ line ハ u, u₁, u₂ ニ交リ故ニ second order ノ ruled surface ヲ生ズ.

一般ニ一ノ plane ト hyperbolic paraboloid トノ交リハ, hyperbola ナリ. 何トナレバ, 其ノ intersection ハ ~~[illegible]~~ infinity ニ於テ二ツノ点ヲ有スレバナリ.





然レドモ其ノ plane 上ノ line at infinity ガ hyperbolic paraboloid 上ノ二ツノ line at infinity ノ交点ヲ過ギルトキハ, plane ノ方向ヲ定ムレバ, 其ノ plane section ハ parabola ナリ.

(其ノ plane ノ方向ハ axis ノ概念ヲ用フレバ簡単ニ述ベラル.)

Chapter VI.

Projective relations of extended elementary forms (Elementargebilde)

28. Summary of various methods of generation.

吾人ハ Steiner ニ従テ、first rank ノ projective elementary forms ヨリ出発シテ、second order ノ主ナル図形 curve, envelope, cone, conical envelope, ruled surface ヲ generate スルコトヲ知レリ。而モ此方法ニヨリテ コレ以外ノ図形ヲ作ルコト難カラザルコトハ、§24 ニ於テ証明セリ。

I. 由テ Seydewitz (1847-8) ハ 一ノ bundle ト ソレニ reciprocal ナル bundle トニ由テ second order ノ surface F_2 ヲ generate セリ。又 二ツノ ~~collinear ナル~~ bundle ニヨリテ space cubic C_3 ヲ generate セリ。ヨリニ collineation ノ関係アル

collineation トハ 1ノ point ヲ 1ノ point ニ移シ 1ノ line ヲ 1ノ line ニ移ス transformation ノコトナリ。

次ニ Charles (1857) ハ space cubic C_3 ヲ 三ツノ projective axial pencil ニヨリテ generate セリ。

Reye (1867) ハ 三ツノ ~~projective~~ collinear bundle ニヨリテ cubic surface F_3 ヲ generate セリ。尚 ~~数種セル元素~~ 二ツノ collinear space ニヨリテ Reye's complex ヲ作レリ。

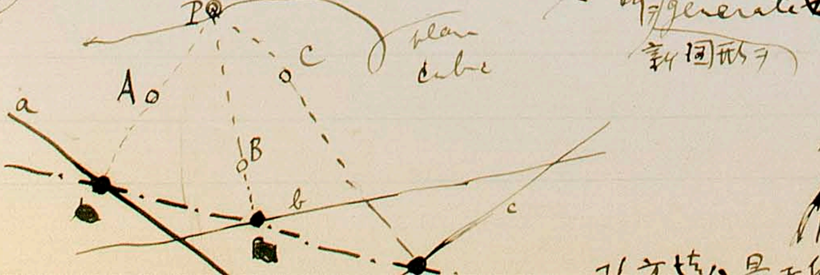
以上ハ Steiner ノ考ヲ modify シテ ソノ方法ヲ推擴セル方法ナリ

II. 然ルニ Von Staudt (1847) ハ 吾人ガ今マデニ採用セル Grundgebilde ノ外ニ 吾等ノ 図形ヲモ採用シ 之ヲ Elementargebilde ト名ヅケ、一方ニ於テハ projectivity ノ思想ヲ擴張シテ 此等ノ Elementargebilde ノ間ノ projectivity ヲ考ヘタリ。

サテ斯ノ如キ廣キ意味ニ於テ projective ナル Elementargebilde ヲ用ヒテ、Schröter (1857) 及ビ Cremona (1861) ハ plane cubic C_3, plane quartic C_4 及ビ 3rd order ノ ruled surface ヲ generate セリ。

コノ方法ニヨレバ、一歩一歩新ナル Elementargebilde ヲ考フレバ、益々 higher ナル curve 又ハ surface ヲ generate シ得ベキ者ナリ。

III. ~~他ノ意味ノ擴張ハ~~ 此マデハ 新キ図形ガ元ノ図形ノ corresponding elements ノ projection and section トシテ考ヘタレド、ソノ意味ヲ擴張シテ 単ニ或ル知ラレタル関係 elements-pair ニヨリテ 新図形ヲ generate セシコトトス。コノ方法ハ最モ一般的ナルモノニシテ、



Grassmann (1854) ハ plane C_3 及ビ space C_3 ヲ作リ、Schur (1881) ハ F_4 ヲ作レリ。猶一般ナ

~~Chapter VI.~~

~~Projective Relations of (extended) Elementary forms (Elementargebilde).~~

2[9]. Extended elementary forms. (Elementargebilde. (Projectivity.) Harmonic elements.)

~~吾人ハ first rank ノ (projective) elementary forms ヨリ出発シテ second order ノ図形~~

~~cone of the second order, envelope ..~~

~~cone, conical envelope, ruled surface~~

ヲ ~~Grundgebilde ト云フ。コレヨリ更ニ歩ヲ進メテ他ノ figure ヲ作ルコトハ~~

~~他ノ方法ニテ取扱フベキモノナリ。~~ 吾人ハ Von Staudt ニ従テ次ノ定義ヲ (Grundgebilde)

ナ採用セン。

Def. first rank ノ elementary forms ト ~~上ノ五ツ~~ second order ノ図形トヲ総称シテ extended elementary forms (Elementargebilde) ト云フ。即チ

point range.
1. point range of the first order.
2. point range of the second order (curve of the second order).

axial pencil.
1. axial pencil of the first order
2. axial pencil of the second order (conical envelope)

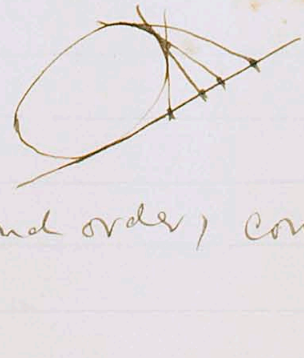
line-figure
1. flat pencil of the first order
2. flat pencil of the second order (envelope of the second order)
3. cone of the second order
4. ruled surface of the second order

次ニ harmonic elements ノ意味ヲ擴張ス。

second order ノ curve ノ上ノ四ツノ harmonic point トハ、ソノ上ノ任意ノ一点ヨリ project シテ四ツノ line ガ harmonic pencil ヲナスモノヲ云フ。

projective ナレバ一方ガ harmonic ナリシバ他方モ harmonic ナラザルベカラズ

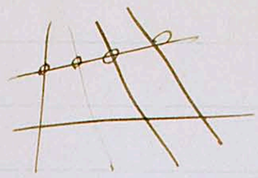
second order ノ envelope ノ四ツノ harmonic line トハ、ソノ中ノ任意ノ一直線ニテ截ラレ四ツノ point ガ harmonic range ヲナスモノヲ云フ。



second order ノ cone ノ四ツノ harmonic line トハ、ソノ cone ノ任意ノ一 line ヨリ project シテ四ツノ plane ガ harmonic axial pencil ヲナスモノヲ云フ

second order ノ conical envelope

Second order ノ ruled surface ノ四ツノ harmonic lines ハ, ソノ ruled surface ノ任意ノ line ニ由テ四ツノ harmonic range ニ截ラレ, 又任意ノ line ヨリ四ツノ harmonic axial pencil ニ project セラルヽモノナリ.



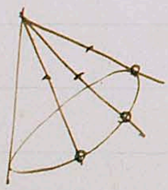
Def. 二ツノ Elementargebild ハ, ソノ一方ノ四ツノ harmonic elements ガ他ノ四ツノ harmonic elements ニ correspond スル如キ correspondence ヲナシ得ルトキ, 互ニ projective ナリトイフ.

例ヘハ:

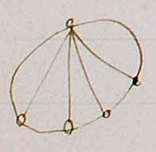
(Curvilinear point range)

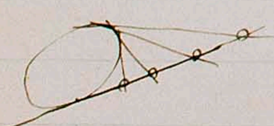
Def. 二ツノ異ル種類ノ projective ナル Elementargebild ガ, 一方ノ任意ノ element ガ他方ノ corresponding element ノ上ニアルトキハ, 互ニ perspective ナリトイフ.

例ヘハ: second order ノ point range (curve) ト second order ノ cone トハ, cone ノ任意ノ直線ガ curve ノ corresponding point ヲ過ギルトキニ perspective ナリ.



second order ノ point range ヲソノ任意ノ一点ヨリ project スレハ, ソレニ ~~project~~ perspective ナル flat pencil ヲ得. 何トナレハ一方ノ任意ノ harmonic elements ガ他方ノ ~~harmonic~~ element ニ correspond スルガ故, projective ナレバナリ. 同様ニ second order ノ flat pencil ヲソノ任意ノ一直線ニテ截レバ, ソレニ perspective ナル point range ヲ得. 同様ニ ruled surface ヲソノ一ノ directrix ニテ截レバ, ソレニ perspective ナル point range ヲ得.





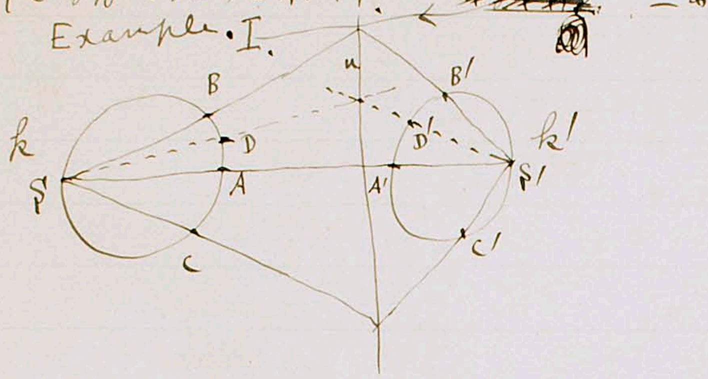
由テ second order ノ二ツノ ~~figure~~ Elementargebild ガ projective ナラバ, ソレゾレ其レ等ニ perspective ナル二ツノ first rank ノ elementary forms ガ互ニ projective ナリ. 而シテ其ノ逆モ亦成立ス. 然ルニ二ツノ first rank ノ elementary forms ガ互ニ projective ナル為メノ necessary & sufficient condi ハ, ソノ一方ガ他ノ一方ヨリ ~~projective and sect~~ perspective ナル数ツカノ elementary forms ノ chain ニ由テ得ラルヽコトナリ. 従テ

Theorem 1. 二ツノ second order ノ Elementargebild ガ projective ナル為メノ necessary & sufficient condit ハ, ソノ一方ガ他ノ一方ヨリ perspective ナル Elementargebild ノ chain ニ由テ得ラルヽコトナリ.

Theorem II. 二ツノ Elementargebilde E, E′ ノ, ソノ一方ノ三ツノ elements a, b, c ガ他方ノ element a′, b′, c′ ニ correspond スル様ニ projective relation ヲ ~~[illegible]~~ ツケルコトヲ得. 而モテ此ノ如キ projectivity ハ unique ニ定マル.

何トナレバ, 此 theorem ハ first rank ノ elementary forms ニツキテ証明セラレタレバナリ.

Example I.



same plane ニ在ル ニツノ second order ノ point range k, k′ ニ就テ

$$k(ABC)\ \pi\ k'(A'B'C')$$

ナラシメタルトキ, AA′ ヲ結ビ直線ト k, k′ トノ交リヲ S, S′ トス. 二ツノ flat pencil

$$S(ABC\ldots)\ \text{ト}\ S'(A'B'C'\ldots)\ \text{ハ}$$

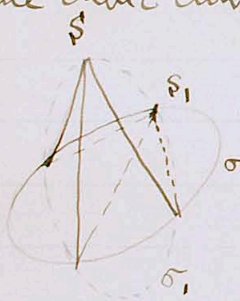
projective ナリ. 然ルニ SA, S′A′ ガ coincide スレバ, コノ二ツノ pencil ハ perspective ナリ. 故ニ SD, S′D′ ハ axis 上ニテ交ル.

~~同ジ平面ノ projective~~

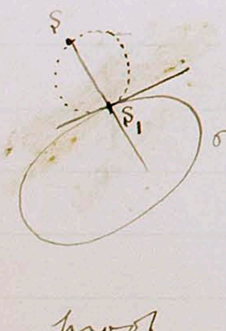
~~Relation between projective~~

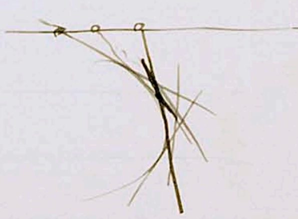
30. ~~Figures of the first and the second orders.~~ Plane cubic curves.

I. コレ両者ノ 互ニ projective ナル same plane ニ在ル flat pencil ト 2nd order ノ curve, 及ビ point range ト 2nd order ノ envelope ハ同様ニ論ズ可シ.



Theorem I. flat pencil S トソレニ projective ナル curve of the 2nd order σ ガ perspective ナラザルモノトス. 然ルトキハ S ニ属スル line ニシテ curve σ ノ corresponding point ヲ過ギルモノハ, 多クトモ三ツヲ超エズ, 少クトモ一ツハ存在ス. (Von Staudt 1856)



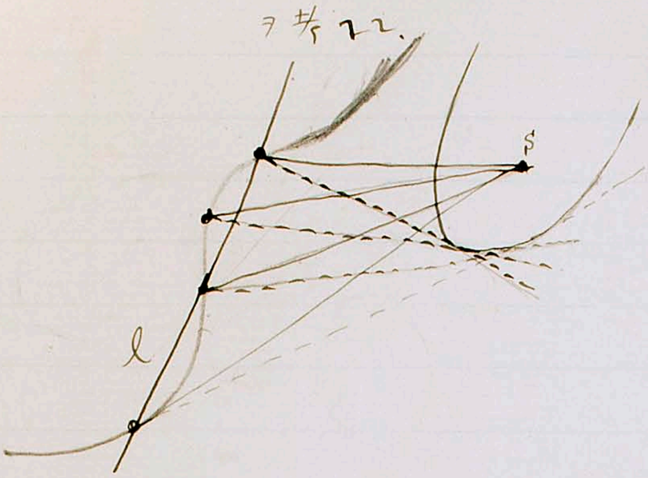


point range トソレニ projective ナル envelope of the 2nd order ガ perspective ナラザルモノトス. 然ルトキハ range ニ属スル point ニシテ envelope ノ corresponding line 上ニアルモノハ多クトモ三ツヲ超エズ, 少クトモ一ツハ存在ス.

proof. S ト projective ニシテ σ ト perspective ナル一ツノ flat pencil S_1 ヲ考フレバ, 問題ハ S ト S_1 ノ corresponding line ノ交リガ σ ノ上ニアルカヲ求ムルコトニ帰ス. 然ルニ S ト S_1 ノ corresponding line ノ intersect ハ S, S_1 ヲ過ギル second order curve σ_1 ヲ作ル. σ ト σ_1 トノ交点ハ多クトモ三ツヲ超エズ. ハ S_1 ヲ共有スル故

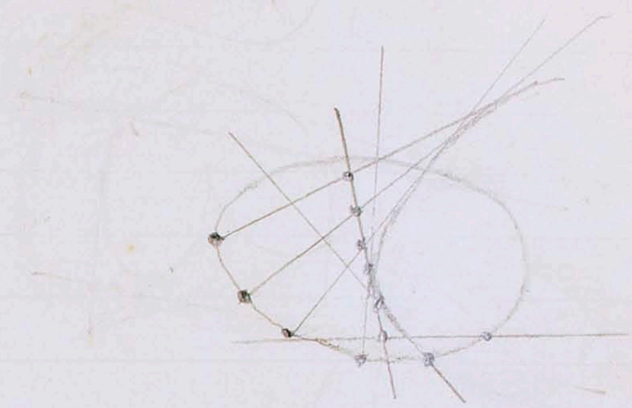
II、上ノ如ク flat pencil ト 2nd order ノ curve, point range ト 2nd order ノ envelope トニヨリテハ何モ新図形ヲ得ズ。然ルニコレハ

projective flat pencil ト 2nd order ノ envelope ヲ考フ。



コノ pencil ト envelope ノ correspondg line ノ intersectⁿ ハ一ノ plane curve (c) ヲ作ル。

proj. point range ト 2nd order ノ curve ヲ考フ。



コノ point range ト curve 上ノ correspondg point トヲ結ビタル一ツノ line figure ヲ作ル。

Theorem II.

任意ノ直線 l トコノ curve c トノ intersectⁿ ハ多クトモ三ツヲ超エズ。
(~~Von Staudt~~ Schröter 1888)

Proof. l ト pencil S トノ交リナル point range ト envelope トハ projective ナリ。然ルニ Theorem I ノ右ニヨリテ envelope ノ line ニシテ range ノ correspondg point ヲ過ギルモノハ三ツヲ超エズ。換言スレバ pencil ト envelope ノ correspondg line ノ intersectⁿ ノ中ニテ l ノ上ニアルモノハ三ツヲ超エズ。

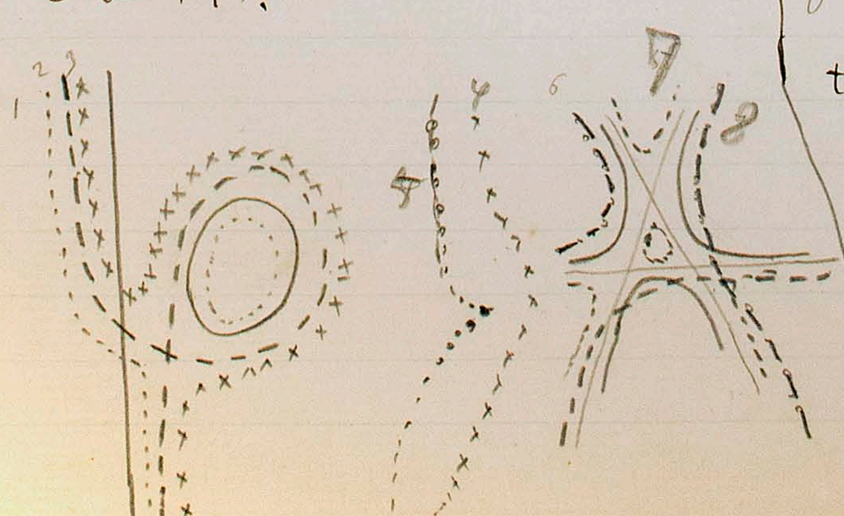
任意ノ点ヲ過ギテ此 line figure ニ属スル line ハ多クトモ三ツヲ超エズ。

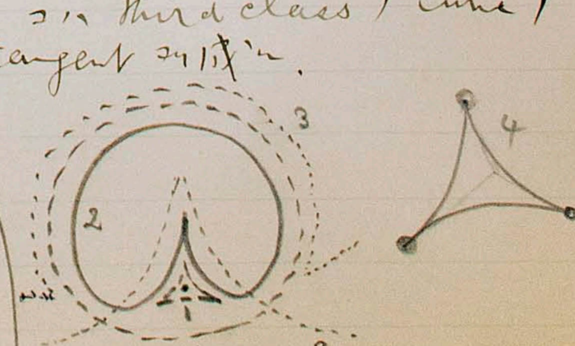
Definition

コノ curve ヲ third order ノ curve ト云フ。

コノ line-figure ヲ third order ノ flat pencil ト云フ。

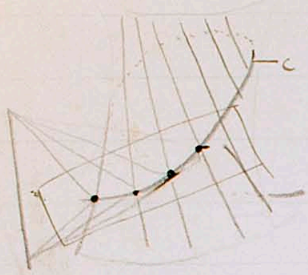
コハ third class ノ curve ノ tangent ヨリ成ル。



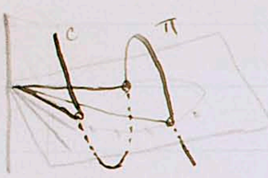


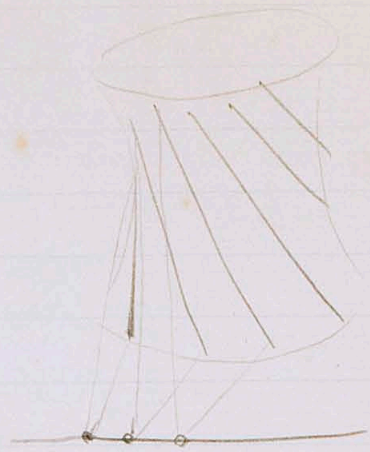
31. Space cubic curves.

一般ニ first order ノ axial pencil (又ハ point range) ト之レニ projective ナル second order ノ ruled surface トハ何ヲ generate スルカ.



axial pencil ト之レニ projective ナル second order ノ ruled surface (cone ヲモ入レテ) ノ corresponding generating line トノ intersection ハ一ノ space curve c ヲ generate ス. 而シテ此ノ図形全体ヲ任意ノ plane π ニテ截レバ ruled surface ノ generating line ハ second order ノ point range トナリ axial pencil ハ flat pencil トナル. 而シテ此ノ二ツハ projective ナルガ故ニ其ノ corresponding line ニシテ corresponding point ヲ過ギルモノハ多クトモ三ツヲ超エズ. 従テ π ト space curve c トノ intersection ハ多クトモ三ツヲ超エズ.





point range ト之レニ projective ナル second order ノ ruled surface (second order ノ envelope ヲモ入レテ) ノ corresponding line ノ結ビテナル plane ハ plane ノ成ス一般ノ図形ヲ作ル. 此ノ図形ニ属スル plane ハ (而シテ任意ノ (space ノ) 一点ヲ過ギリテ) 多クトモ三ツヲ超エズ.

Definition. projective ナル axial pencil ト ruled surface of the second order (cone ヲモ入レテ) トハ third order ノ space curve c_3 ヲ generate ス.

Def. third order ノ axial pencil ヲ generate ス. (Ebenengewinde)

Remark. 後ニ証明スル如ク, third order ノ axial pencil ハ space cubic curve ノ tangent plane ナリ.

Plane at infinity ト交ハル点

cubic ellipse	cubic hyperbola	cubic hyperbolic parabola	cubic parabola
1	3	1. coinc. 2	coinc. 3.

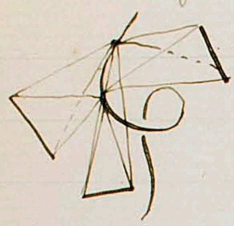
Horopterkurve (Helmholtz 1862)

Theorem

三ツノ projective axial pencil (first order ノ) ノ intersection ハ space curve of the 3rd order ヲ generate ス. Chasles 1837, 1857.

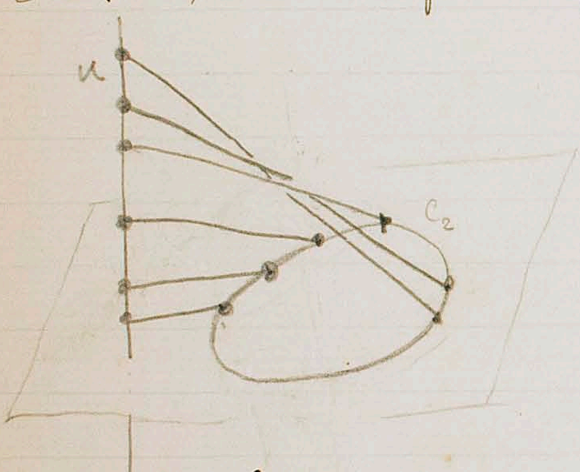
三ツノ projective point range (first order ノ) ノ結ビハ 3rd order ノ Ebenengewinde ヲ generate ス.

何トナレバ, projective ナル二ツノ axial pencil ハ一ツノ ruled surface ヲ ~~作リ~~ generate シ, 而シテコノ ruled surface ト第三ノ axial pencil トハ space cubic ヲ generate スルコトナリ.



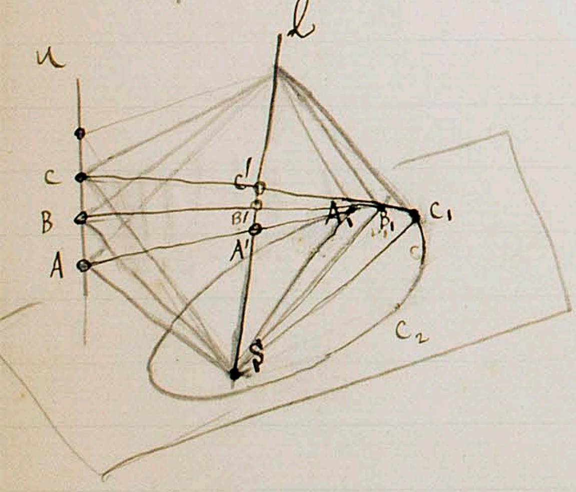
space cubic ニ就テハ時間ノ都合ニヨリテ後ニ詳論セントス.

32. Ruled surfaces of the third order.



first order ノ point range u ト second order ノ curve C_2 トガ互ニ projective ニシテ, 而モ same plane ノ上ニアラズ又 ~~[illegible]~~ common point ヲ有セザルモノトス. 然ルトキハ其ノ corresponding points ヲ結ベバ, 一ノ Regelschar (regulus) ヲ得.

Theorem 1. コノ regulus ト任意ノ直線 l トノ交点ハ多クトモ三ツ ~~[illegible]~~ ヲ超エズ. (Benno Klein, 1876).

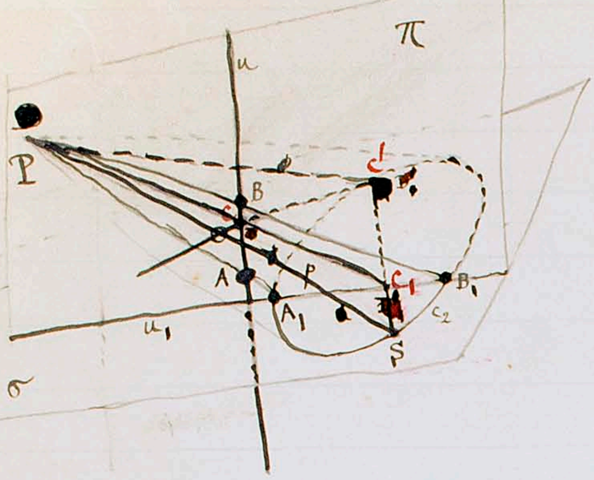


Proof. l ヲ含ミ point range u ヲ通ル plane ハ, u ト projective ナル axial pencil ヲ作ル. 而シテコノ axial pencil ト second order ノ point range C_2 トハ projective ナリ. 今此 axial pencil ヲ C_2 ヲ含ム plane ニテ切レバ, C_2 ニ projective ナル flat pencil S ヲ得. 然ルニ S ニ属スル line ニシテ C_2 ノ corresponding points ヲ通ルモノハ多クトモ三ツヲ超エズ. 之ヲ A_1, B_1, C_1 トス. A, A_1, l ハ same plane ノ上ニアルヲ以テ l ハ AA_1 ト交ハリ, 同様ニ BB_1, CC_1 ト交ハル.

Def. コノ regulus ハ一ノ third order ノ ~~regulus~~ ruled surface R_3 ヲ作ル.

[Cremona, Sturm 等ノ方法ハ之ト異ナレリ].

Theorem 2. R_3 ヲ任意ノplaneニテ截レバ 3rd orderノplane curveヲ得。何トナレバ其ノplane上ノ任意ノ直線ハ、ソノplane sect.ナルcurveト三ツノ点ニ於テ交ハレバナリ。

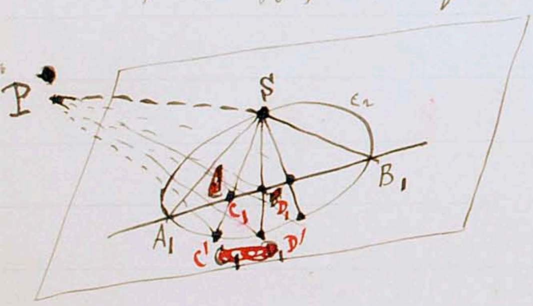


~~Theorem~~ コレヨリ R_3 ヲ簡単ニgenerateスル方法ニ就テ考ヘン。

uヲ過ギリテ c_2 ト交ハル任意ノ平面ヲπトセ、ソノ交リヲ A_1, B_1 トセン。A_1, B_1 ヲ過ギリテ regulusニ属スルlineガuト A, B ニテ交レリトス。AA_1, BB_1 ハ same plane π ノ上ニアレバ交ル、ソノ交点ヲ P トス。

P ヲ ~~vertex~~ centre トセテ point range u ト curve c_2 トヲ project スレバ、互ニ projective ナル flat pencil ト second order ノ cone トヲ得。今コノ flat pencil ノ諸line ト cone ノ correspond'g line トヲ含ム plane ヲ作レバ、ソレ等ノ plane ハ一ノ axial pencil ヲナスコトヲ証明セン。

ソレガ為メニハ plane σ ニテ flat pencil ト cone トヲ截レバ、互ニ projective ナル point range ト ~~second order ノ~~ curve c_2 ヲ得。而モテ A_1, B_1 ハ common ナル correspond'g points ナリ。由テ C_1 ノ correspond'g point ヲ C' トシ、C_1C' ト c_2 トノ intersect ヲ S トスレバ、



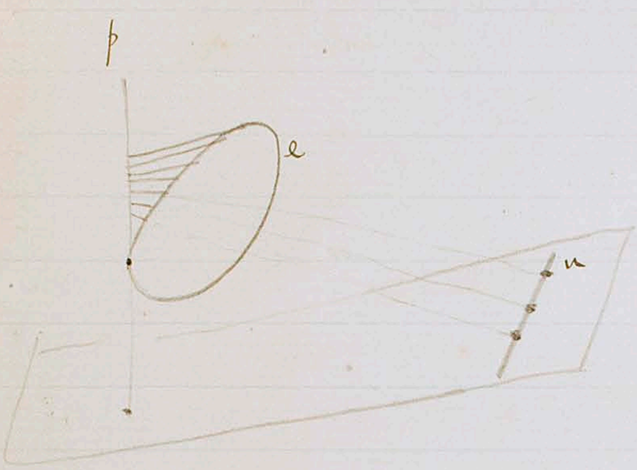
$$S(A_1 B_1 C_1 \cdots) \,\pi\, S(A_1 B_1 C' \cdots)$$

然ルニ SA_1, SB_1, SC_1 ハ コノ二ツノ pencil ニ common ナリ。故ニコノ二ツノ pencil ハ identity ナリ。即チ C_1C', D_1D', E_1E', … ハ same point S ヲ過ギル。c_2 ノ上ノ 従テ plane PC_1C', PD_1D', … ハ PS ヲ axis トスル axial pencil ヲナス。即チp

サテ P ヲ u ト u_1 ノ交点トスレバ、projective range u ト u_1 トニ就テ C ト C_1 トハ correspond'g point ナリ。従テ u ト c_2 トニ就テ C ト C' トハ correspond'g point ナリ。即チ line CC' ハ regulus ニ属ス。~~換言スレバ regulus ニ属スル一ノ line ハ~~ 何トナレバ P, S, C_1, C', C ハ same plane ノ上ニアリ。由テ CC' ハ PS 即チp ト交ラザルベカラズ。同様ニ DD', EE', … モ p ト交ル。由テ

Theorem 3. R_3 ノ regulus ハ皆二直線 u, p 及ビ curve c_2 ト交ル。

逆ニ, 一ノ curve C₂ト 二点ニテ交ル直線 u, p トアリ. ~~[struck]~~ u ハ C₂ ノ平面上ニアラズシテ C₂ト交ラズ, p ハ C₂ ノ平面上ニアラズシテ C₂ト交ルモノトス.
然ルトキハ C₂, u, p ニ同時ニ交ル ~~[struck]~~ a system of lines ハ third order ノ ruled surface R₃ ヲ画ク.
コノ通ノ上ノ証明ヲ略シ, モテ証明セヨ.



Ex. 一ツノ line p ト一ノ ellipse e トガ ~~相交テ~~ 相交リ且ツ same plane ノ上ニアラザルモノトス. 然ルトキハ p ~~[struck]~~ ニ直角ニ交リ且ツ e ト交ル直線ハ R₃ ヲ作ル. 何トナレバ p ニ直角ナル plane 上ノ line at infinity ガ示サレナレバナリ. 之ヲ Ball ノ Cylindroid トイフ. (Cayley's method).
1871

33. Quartic curves, etc.

projective ナル First ~~rank~~ order ノ Elementary forms ト second order ノ Elementargebilde トヲ種々ニ組合ハセテ得ラルル図形ハ前ニ述ベタル third order ノ figure ニ止マル. (其ノ証明ハ諸君自ラ試ミラレタシ)

更ニ進ミテ fourth order ノ figure ヲ generate スル為メニハ projective ナル二ツノ second order ノ Elementargebilde ヲ組合ハサザルベカラズ.

サテ §30 ニ就テ証明セシ如ク first order ノ flat pencil トソレニ projective ナル 2nd order ノ curve トガ perspective ナラザルトキハ, pencil ニ属スル line ニシテ curve ノ corresponding point ヲ過ギルモノハ多クトモ三ツヲ超エズ. (Staudt). ~~[struck]~~ コノ theorem ヲ基礎トシテ 3rd order ノ figure ヲ作レルナリ.

之ニ相当セル theorem トシテ次ノ theorem ヲ証明スルコトヲ得.

second order ノ flat pencil トソレニ projective ナル 2nd order ノ curve トガ perspective ナラザルトキハ, pencil ニ属スル line ニシテ curve ノ corresponding point ヲ過ギルモノハ多クトモ四ツヲ超エズ. (証明略ス). コノ theorem ヲ基礎トシテ fourth order ノ figure ヲ作ルコトヲ得.

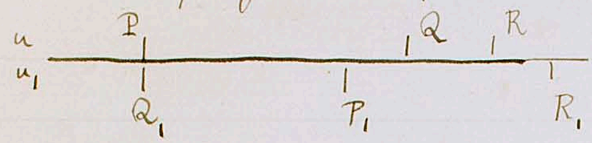
例ヘバ same plane ノ上ニアル二ツノ projective flat pencil of the second order ノ corresponding line ノ intersection ハ fourth order ノ curve ヲ generate ス.

Staudtガ採用セシ Elementargebilde ヲ 種々ニ組合ハスルトキ fourth order 以上ノ figure ハ得ラレズ

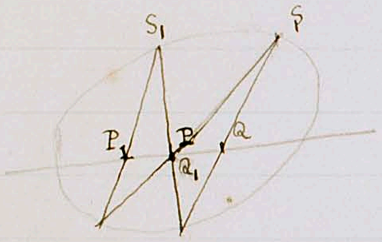
Chapter VII.
Involution

34. Definition

同ジ種類ノ二ツノ elementary forms of the first rank 例ヘバ二ツノ projective point range u, u_1 ガ同ジ base ヲ有セルモノトス。

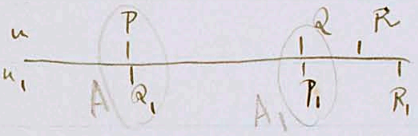


u ニ就テノ P ニ correspond スル u_1 ノ point ヲ P_1 トス。 u_1 ニ就テノ P（之ヲ Q_1 ニテ表ハス）ニ correspond スル u ノ point Q ハ、一般ニハ P_1 ニ coincide セズ。



例ヘバ左図ノ如シ。

然レドモ時ニハ Q ガ P_1 ニ coincide スルコトナキニシモアラズ。 コノ場合ニハ



$(AA_1\cdots)\,\pi\,(A_1A\cdots)$

ニテ AA_1 ガ二重ニ correspond スルナリ。

Def. 同ジ種類ノ二ツノ projective figures u, u_1 ガ conjective（即チ同ジ base, vertex 又ハ axis）ヲ有スルモノトス。 若シ二ツノ elements ガ doubly ニ correspond スルトキハ、コノ二ツノ figure ハ involution ヲナストイフ。

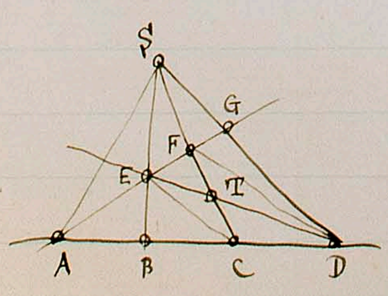
異ナル種類ノ projective figure ニ於キテハ projection 又ハ section ニヨリテ同ジ種類ノモノニ化セシ後、コノ定義ヲ適用スベシ。

Involution ノ概念ハ Desargues ニ初マル。 コノ Definit. ハ Chasles (1837) ニ係ル。

Theorem 1. 一ツノ elementary form of the first rank ノ four elements ヲ A, B, C, D トスレバ、

$$ABCD\ \pi\ BADC\ \pi\ CDAB\ \pi\ DCBA \qquad \text{(Möbius).}$$

Proof. point range ニ就テ。



$$ABCD\ \pi\ CDAB$$

ナルコトヲ証明セン。 他ノ場合モ亦同様ナリ。

ABCD ハ S ヨリ AEFG ヲ project セラル。

AEFG ハ D ヨリ CTFS ヲ project セラル。

CTFS ハ E ヨリ CDAB ヲ project セラル。

ナレバ、

$$ABCD\ \pi\ AEFG\ \pi\ CTFS\ \pi\ CDAB.$$

Theorem 2. 二ツノ projective range ニ就テ任意ノ one pair ノ elements A, A_1 ガ doubly ニ correspond スレバ、他ノ pair ノ elements モ又皆 doubly ニ correspond ス。

何トナレバ $AA_1P \pi A_1AP_1$ ニヨリテ projectivity ガ 一定セラルレモノナレバ. 然ルニ Theor. I ニヨリテ

$$AA_1PP_1 \pi A_1AP_1P$$

セラレ P, P_1 モマタ doubly ニ correspond スレバナリ.

Theorem 3. Involutionハ 任意ノ 2 pairノ elements (A, A_1), (B, B_1) ニヨリテ決定セラル.

何トナレバ, three ~~AAB~~ pairノ elements

$$A, A_1; \quad A_1, A; \quad B, B_1$$

ニヨリテ projectivityハ 定マレバナリ.

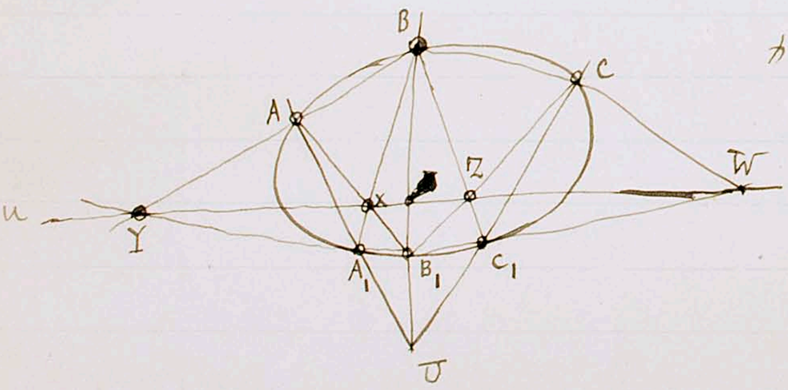
35. Involutions of the elementary ~~forms~~ figures of the ~~S~~second order.

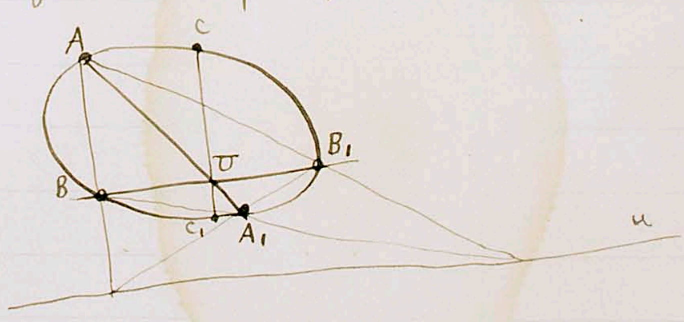
Def. Second orderノ elementary figuresニツキテモ first orderノ elementary figuresト全ク同様 ~~...~~ ニシテ involutionノ定義ヲ下ス.

シカシナガラ 任意ノ one pairノ elements A, A_1 ガ doublyニ correspond スレバ, 他ノ pairニツキテモ必然ニシカルコトヲ証明セザルベカラズ.

今 同ジ curveノ上ニアル 二ツノ projective ~~...~~ ranges of the second order ニツキテ 之ヲ証明セン.

今 $AA_1B \pi A_1AB_1$ ニヨリテ projectivity ガ define セラレタリト仮定セン.





Uノ polarヲ uトセヨ. 然ラバ

AA_1, BB_1ノ intersectヲ Uトス. ~~Uノ polarヲ uトス.~~

$$B_1(AA_1B) \pi B(A_1AB_1)$$

コノ二ツノ pencilハ BB_1ヲ commonニ持ツ故 perspective ニシテ, 且ツ points rangeハトモ perspectiveナリ. 何トナレバ

$\left.\begin{matrix}B_1A\\BA_1\end{matrix}\right\}X$ $\quad$ $\left.\begin{matrix}B_1A_1\\BA\end{matrix}\right\}Y$ トスレバ, X, Yヲ結ブ直線ガ u ナレバナリ. ~~ハUノ polarナリ.~~

~~polarナリ.~~

サテ $\begin{matrix}B\\C\end{matrix}$ ト $\begin{matrix}B\\C_1\end{matrix}$ トハ corresponding pointsニシテ且ツ doublyニ correspondス. 何トナレバ,

Uヨリ引ケル任意ノ直線上ニ

$\left.\begin{matrix}BC_1\\B_1C\end{matrix}\right\}$ノ交ハモ, $\left.\begin{matrix}BC\\B_1C_1\end{matrix}\right\}$ノ交ハモ u上ニアレバ,

$$B_1(CC_1\cdots) \pi B(C_1C\cdots)$$

ナレバナリ.

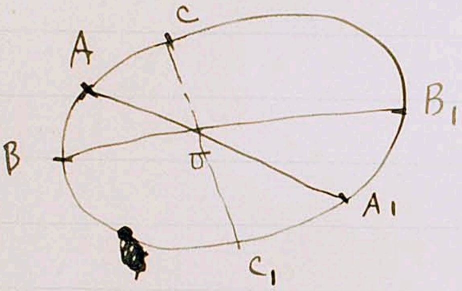
コノ証明ニ由テ下ノ結果ヲ得.

Theorem. second order ノ二ツノ proj. range ガ involution ヲナストキハ, ソノ corresponding points ヲ結ブ直線ハ, 総テ ~~同~~ 同一ノ点ヲ通ル. (之ヲ centre of involution トイフ).

又 corresponding points ニ於ケル tangent ノ intersection ハ同一ノ直線ノ上ニアリ (之ヲ axis of involution トイフ). (Seydewitz 1844 ?)

コノ theorem ノ逆モ亦成立ス.

Ex. 1. second order ノ curve ノ上ニ involution ヲナス point pair (A, A_1), (B, B_1) ヲ与ヘテ C ノ corresponding point C_1 ヲ求ム.



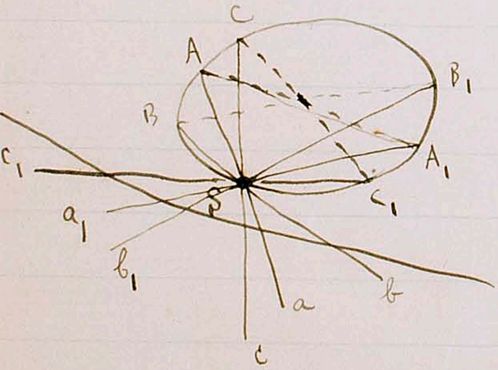
Ex. 2. involution ヲナス flat pencil ノ two pair of lines (a, a_1), (b, b_1) ヲ与ヘテ c ノ corresponding line c_1 ヲ求ム.

S ヲ通ギル任意ノ curve of the second order ヲ画ケ.

何トナレバ

$(aa_1bc) \overset{[illegible]}{\barwedge} (AA_1BC) \barwedge (A_1AB_1C_1)$

$\underset{廣義ノ}{\barwedge} (a_1ab_1c_1)$

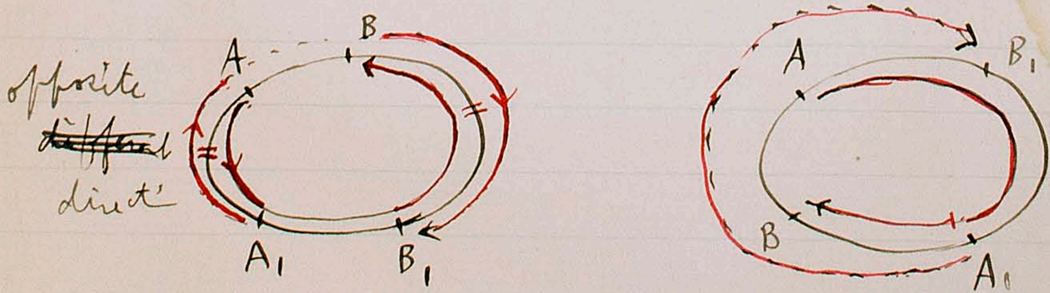


Ex. 3. involution ヲナス point range.

36. Double elements

上ノ example 2, 3 ニ於テハ point range 又ハ flat pencil ノ involution ハ second order ノ curve ノ上ノ point range ノ involution ニ直ニ帰セラル. コレ故ニ常ニ curve 上ノ point range ニ就テ考フルナリ.

involution ハ two pair of elements (A, A_1), (B, B_1) ニ由テ定マル.



same direct'

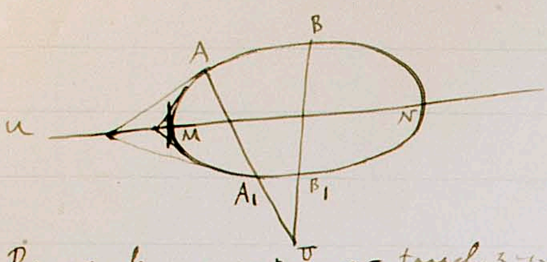
$AA_1B \barwedge A_1AB_1$.

A_1, B (A~~B~~, ~~A~~B_1) ガ相分タザル場合. コノ場合ニハ corresponding points ガ重ナル (double point) 許アリ. hyperbolic involution.

~~AB, A₁B₁~~ double point ハ二ツアリ. (involution ノ)

AA_1, BB_1 ガ相分ツ場合. コノ場合ニハ corresponding points ハ重ナルコトナシ. elliptic involution.

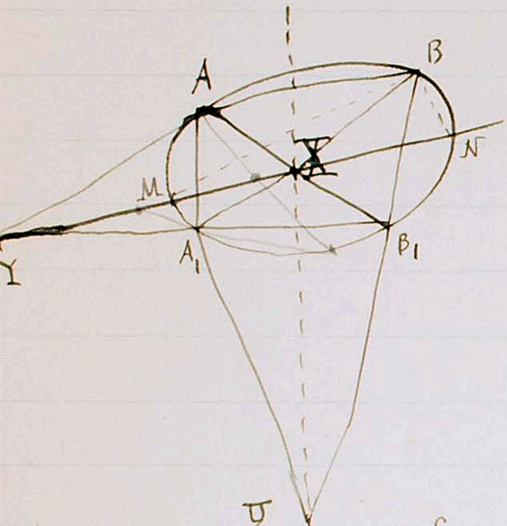
Theorem 1. Involut. ノ Double points ハ second order ノ curve ト axis of involut. トノ intersection ナリ.



Proof. A, A_1 ニ於ケル tangent ノ交リハ u ノ上ニアリ. 故ニ A, A_1 ガ coincide スルトキハ A, A_1 ハ u ノ上ニアリ. 即チ double points M, N ハ u ト curve トノ交リナリ.

Remark. u ガ curve ニ touch スルトキハ double point ハ相重ナル. コノ場合ヲ parabolic involution 又ハ ausgeartete Involution トイフ.

Theorem 2. Involution ノ double points M, N ハ one pair ノ corresponding points A, A_1 ヲ harmonic ニ分ツ.

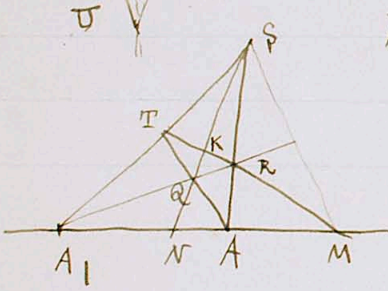


Proof. Y ノ polar ハ X ヲ通ルキハ故ニ, §18 ニヨリテ (~~YXMN~~ YMXN) ハ harmonic ナリ. 故ニ

B(AMA₁N) ハ harmonic range ヲナス.

換言スレバ, コノ curve ノ上ニ於テ AMA₁N ハ harmonic range ヲナス. (§29).

Another proof. コノ theorem ハ頗ル重要ナレバ first order ノ point range ニ就テ elementary proof ヲ与フ.



仮定ニヨリテ MANA₁ π MA₁NA.

S ヨリ project スレバ

MANA₁ π MRKT

故ニ MRKT π MA₁NA.

M ガ common ナレバ perspective ナリ. 故ニ

コレニヨリ proj. range ニ於テ

RA₁, KN, TA ハ一点 Q ニ於テ交ル. 故ニ完全四辺形ニヨリ MANA₁ ハ harmonic ナリ

37. Desargues' theorems.

コレヨリ 3 pairs of elements ガ involution ヲナス場合ニ就テ論ゼン. コレ即チ Desargues (1639) ノ考ヘタ involution ナリ. 即チ

AA₁BC π A₁AB₁C₁ ナラバ A, A₁ ハ doubly ニ correspond スレバ B, B₁, 及ビ C, C₁ モマタ doubly ニ correspond ス. 故ニ

AA₁; BB₁; CC₁

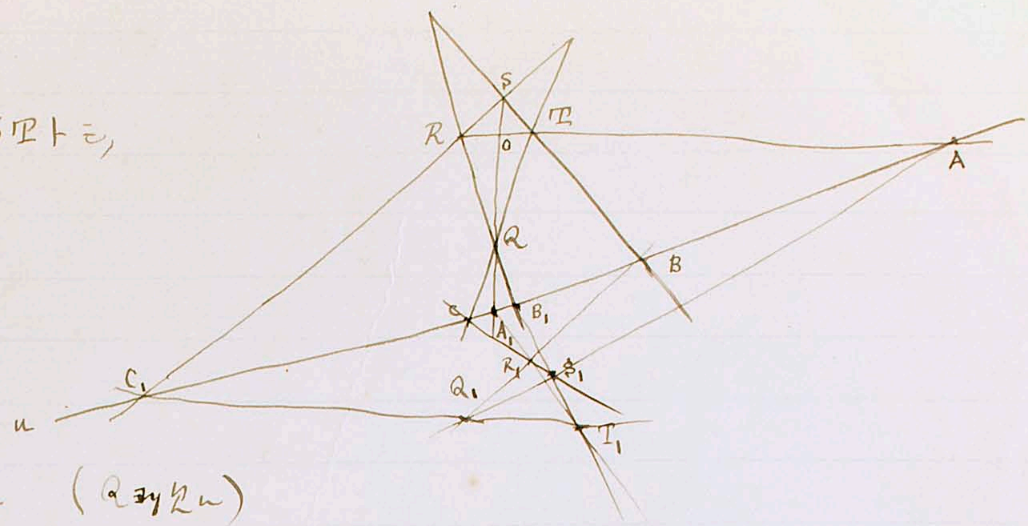
ハ involution ヲナス.

Desargues' theorem I.

完全四角形ノ三對ノ對~~辺~~辺ト頂点ヲ通ラザル其ノ平面上ノ直線トノ交リナル 3 pairs of points ハ involution ヲナス.

完全四辺形ノ三對ノ對頂点ヲソノ辺ノ上ニアラザルコノ平面上ノ点ヨリ project スレバ 3 pairs of lines ハ involution ヲナス.

完全四角形ヲ QRST トシ,
u ノ上ノ
$A, A_1;\ B, B_1;\ C, C_1$
ガ involut. ヲナスコトヲ
証明セヨ.



$ACA_1B_1 \barwedge ATOR$ (Q ヨリ見レバ)

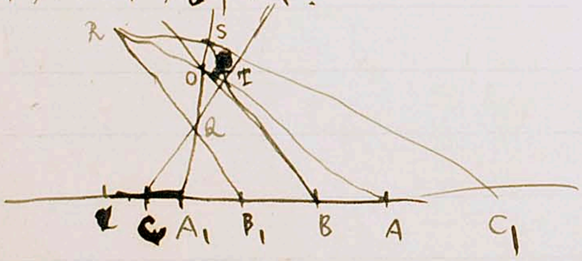
$\barwedge ABA_1C_1$ (S ヨリ見レバ)

マタ §34 Theorem 1 ニヨリテ

$ABA_1C_1 \barwedge A_1C_1AB.$

故ニ $\underline{A}C\underline{A_1}B_1 \barwedge \underline{A_1}C_1\underline{A}B$

Ex. 1. 一直線 u ノ上ニ two pairs of points (A, A_1), (B, B_1) ニヨリテ定メラレル involution アリ. C ヲ与ヘテ C_1 ヲ求ムルコト, 但シ second order ノ curve ヲ用フルコトヲ許サズ.



Ex. 2. 任意ノ四角形 $Q_1R_1S_1T_1$ ヲ作ル. コノ二ツノ四角形 QRST ト $Q_1R_1S_1T_1$ トガ異ル plane ノ上ニアルモノト考ヘヨ. 然ラバ二ツノ tetrahedron

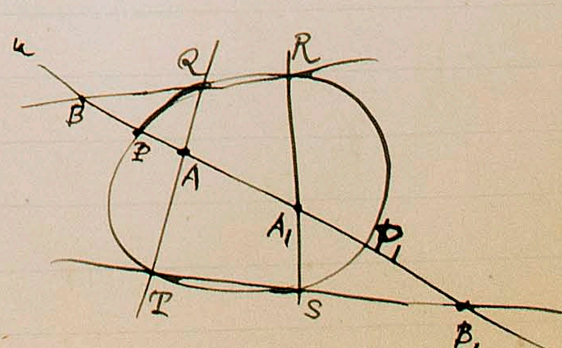
$QRST_1$, $Q_1R_1S_1T$

ヲ得. 而シテ plane QRS ノ上ニ T ガ exist シ, $Q_1R_1S_1$ ノ上ニ T_1 ガ exist ス.
又 QRT_1 ノ上ニ S_1 ガ exist シ, Q_1R_1T ノ上ニ S ガ exist ス;
QST_1 ノ上ニ R_1 ガ, Q_1S_1T ノ上ニ R ガ;
RST_1 ノ上ニ Q_1 ガ, R_1S_1T ノ上ニ Q ガ exist ス.

ヨッテ一方ノ tetrahedron ハ他方ノ tetrahedron ニ内接スルト同時ニ外接ス. 斯ノ如キ二ツノ tetrahedron ハ infinite number アリ. (Möbius, 1828). コノ duality ヲ Nullsystem トイフ

Desargues' theorem II.

一ツノ四角形 QRST ガ一ノ curve of the 2nd order ニ内接スルトキ, 一ノ直線 u ニヨリコノ curve ト四角形ノ対辺トヲ截レバ, ソノ 3 pairs of points ハ involution ヲナス.



何トナレバ,

$PBP_1A \barwedge PA_1P_1B_1$
$\barwedge Q(PRP_1T)$
(Q ヨリ) (S ヨリ)

然ルニ $PA_1\ P_1B_1 \pi\ P_1B_1PA_1$

故ニ $\underline{P}B\underline{P}_1A\ \pi\ \underline{P}_1B_1\underline{P}A_1$

Conicニ關スル三大定理. generating method of Steiner
Pascal
Desargues

Chapter VIII

Problems of the second degree. Imaginary elements.

38. Problems of the first degree and the second degree.

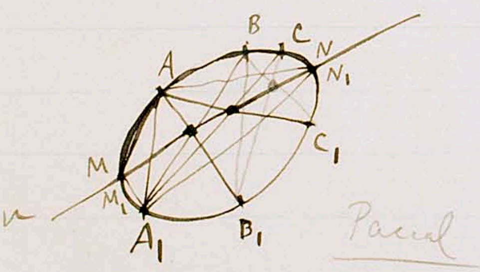
Geometrical construct' ノ中ニハ只一ツノ solution ノミヲ有スルモノアリ。例ヘバ一直線上ニ於テ A, B ニ関スル C ノ harmonic conjugate D ヲ求ムル場合ノ如シ。 此等ノ如キ問題ヲ first degree ノ problem トイフ。

マタ 二ツノ(マデノ) solution ヲ有セシムル construct' アリ。之ヲ second degree ノ problem トイフ。 尚ホ此等ノ problems ノ classificat' ニ就テハ後ニ詳論セントス。

Second degree ノ problem ノ中ニテ typical ニシテ且ツ fundamental ナルモノハ 次ノ如シ。

conjunctive (collocal) ナル 二ツノ projectiveナル Elementargebilde ノ self-correspond'g points ヲ求ム。

I. 先ヅ 二ツノ proj. point range k, k_1 ガ同一ノ curve of the second order ノ上ニアル場合ヲ考フ。



Point range k, k_1 ノ projectivity ハ

$$k(ABC) \barwedge k_1(A_1B_1C_1)$$

ニ因テ define セラレタルモノトセヨ。

$$A(A_1B_1C_1) \barwedge A_1(ABC)$$

~~[illegible]~~ ニシテ AA_1 ハ common ナレバ perspective ナリ。 故ニ

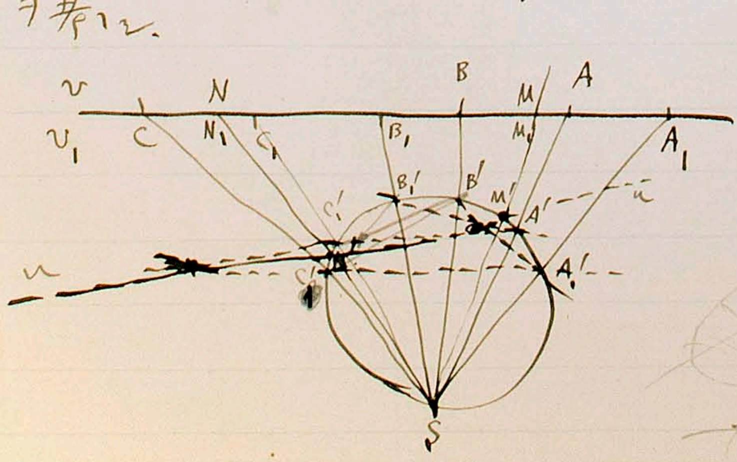
$$(AB_1, A_1B), (AC_1, A_1C)$$

ヲ結ブ直線ヲ u トスレバ u ト curve トノ intersect' ガ求ムル所ノ self-correspond'g point ナリ。~~[illegible]~~ 然ルニ u ハコノ curve ト二ツノ point ニ於テ交ハリ、二ツノ重ナル point ニ於テ交ハリ (即チ touch スル) 又ハ common point ヲ有セズ。

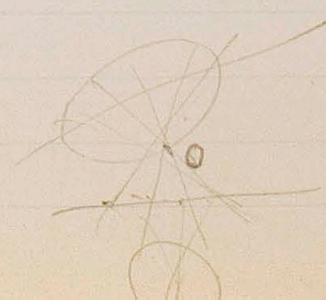
特ニ point range ガ involut' ヲナス場合ニ就テハ後ニ論ゼン。(正ニ然リ)

II. 次ニ 二ツノ proj. point range ガ same line ノ上ニアル場合ヲ考フ。

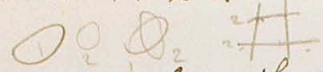
Steiner's construct' (1832).



u ガ curve ト交ハリ、切スルカ、交ハラザルカニ従ヒ solut' ハ 2, 1, 0 ナリ。



H. Schubert (1879) ハ Prinzip von der Erhaltung der Anzahl ... specialize シテモ solution ノ number ハ不変ナリ. Kohn (1903), Study (1904) ハ其ノ一般ニ正当ナラザル コトヲ指摘セリ.



Von Staudt 及ビ Lüroth ノ theory ヲ分リ易ク書キ出セルハ

{ Reye, Geometrie der Lage, Bd. I, 5. Aufl., p. 181.
Mathews, Projective geometry, p. 152.

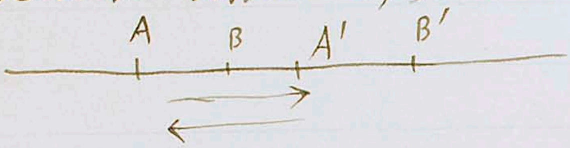
又ハ analytic ニ説明セルハ { Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, Bd. I. Teil 1., p. 339; Bd. II, Teil 1, p. 104.

Klein, Elementarmathematik, II, p. 263.

実際 imaginary elements ヲ[redacted]ノ如ク自由ニ用ヰ得ルニ至ラシメシハ Poncelet, Chasles, Darboux, Lie 等ノ功ナリ.

40. Von Staudt's ~~definition~~ theory (I). (Klein)

(一直線上ノ point range ニ於テ) elliptic involution ノ double point ハ exist セザレド, elliptic involution ヲ用ヰテ imaginary points ヲ define セントハ至当ノコトナリ. サレド double points ハ二ツアリ. コレヲ如何ニシテ区別スベキカ. ソレガ為ニ Staudt ハ involution ノ sense ニ就テ考ヘタリ.



即チ (A, A_1), (B, B_1) ニ就テ separate セラルルトキ, order (又ハ sense)

ABA'B' (π BA'B'A π A'B'AB π B'ABA')

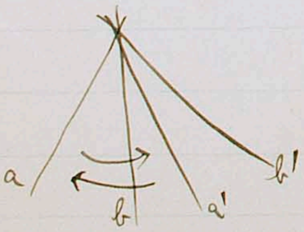
ト A'BAB' (π BAB'A' π AB'A'B π B'A'BA)

トヲ区別セリ.

Def. 一直線上ノ point range ノ elliptic involution (AA₁, BB₁, ...) ニ就テ sense ABA' ヲ~~有~~ (取ルモノトシ) 定メタルトキハ, ソノ involution ハ一ノ imaginary point ヲ定ム.

同ジ involution ニ就テ sense A'BA ヲ取ルモノトスレバ, ソノ involution ハ上ノ imaginary point ニ conjugate ナル imaginary point ヲ定ム.

Def. flat pencil ノ elliptic involution (aa₁, bb₁, ...) ニ就テ sense aba' ヲ取ルモノトシテ定メタルトキニ, ソノ involution ハ一ノ imaginary line ヲ定ム. 同ジ involution ニ就テ sense a'ba ヲ取レバ, conjugate imaginary line ヲ定ム.

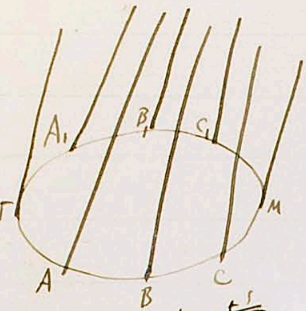


コレ等ノ definition ニ依テ与ヘラレタル point, line ガ此迄取扱ヘル real point, real line ト如何ナル関係アルカ, 又ソノ上ニアリ, ソレヲ通ズ, ソレ等ハ如何ニシテ考フベキカ.

Def. 一ノ imaginary point ハ一ツ而モ唯一ツノ real line ノ上ニアリ. 即チ其 point ヲ define スル involution ノ base (range) ノ上ニアリ.

Def. 一ノ imaginary line ハ一ツ而モ唯一ツノ real point ヲ過ギル. 即チ其ノ line ヲ define スル involution pencil ノ vertex ヲ過ル.

III. Second order ノ ~~ruled surface~~ regulus ノ場合



コノ場合ニハ ~~[illegible]~~ one plane ヲ以テ切リテ second order ノ curve ヲ得レバ, M, N ヲ regulus ニ属スル line ヲ引ケバヨシ.

此ノ場合ニ於テモ同様ニシテ self-corresponding elements ヲ定ムルコトヲ得.

~~Introduction~~

39. Imaginary elements and the principle of continuity.

数学上ノ進歩ノ或ル部分ハ既ニ導カレタル観念ヲ擴張シテ新観念ヲ導入シテ コレマデノ theorem 又ハ rule ヲ一般ナラシムルコトニヨリテ成シ遂ゲラレタルコトハ, 既ニ我々ノ知ル所ナリ. 例ヘバ算術ニ於テハ negative number ヲ入レ, irrational number ヲ入レ, 最後ニ imaginary number ヲ入ル. コノ imaginary number ヲ入レザルトキハ, n次方程式ハ n個ノ roots ヲ有スト云フコトハ無意味トナリ, 従テ analytic geometry ハ成立セズ. 同様ニ synthetic geometry ニ於テモ elements at infinity ノ観念ヲ導入シタリ. コノ観念ヲ基トシテ affine geometry ガ建テラレタリ, 観念ノ必要ナルコトハ従来屢々述ベ得ル所ナリ.

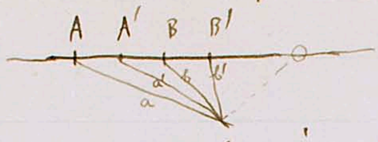
サテ吾々ハ second degree ノ ~~問題~~ typical problem ニ於テ solution ガ二ツアルカ, (相重ナル) 一ツアルカ, 又ハナキコトヲ見タリ. ~~[illegible]~~ コレニ於テ所謂 imaginary elements ノ観念ヲ入レテ, solution ガ常ニ二ツアル様ニシタイ希望ヲ抱カザルヲ得ズ. 丁度二次方程式ニ於ケルト同様ナルベシ. ($ax^2+bx+c=0$)

之ヲ歴史ニ徴スルニ Monge ハ既ニ此ノ考アリ. 一般ナル construction ニ於テ得ベキ図形ノ性質ハ, ソノ図形ノ或ル部分ガ real ニテモ imaginary ニテモ ソレニ関係ナク, 依然トシテ成立スルモノナリ. 即チ theorem ハ普遍的ナル真理ナリ. 若シ某図形ガ real ノ場合ニ適用セラ~~ルル~~ルル場合ニハ, 図形ノ或ル部分ガ imaginary ナル ~~[illegible]~~ 場合ニモ適用セラルベキ性質ノモノナリ.

Poncelet ハコノ考ヲ一般ニ Principle of continuity ト呼ビ, infinity ニアル elements ノ観念ヲ導入シ, 更ニ analytic geometry ノ助ケヲ藉リテ コノ Principle ヲ徹底セント試ミ, Chasles モ亦一層之ニ歩ヲ進メ imaginary number ノ性質ヲ利用シテ imaginary (幾何学上ノ) elements ノ導入ヲ説明セントセリ.

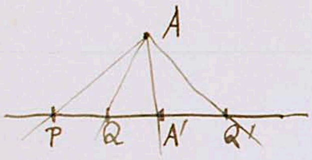
真ニ Poncelet ノ理想ヲ完成 ~~[illegible]~~ シ geometrically ニ imaginary element ヲ define シタルハ von Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage (1856) ニシテ, 之ヲ補修セルハ Lüroth, Math. Ann., 8 (1875) ナリ.

Def. $(AA', BB', ---)$ ニ由テ define セラレタル imaginary point ト $(aa_1', bb_1', ---)$ ニ由テ define セラレタル imaginary line トガ, コノ range ト pencil トガ perspective ナルトキニ, ソノ point ガ, line ノ上ニアリトイフ.



Theorem I. 一ツノ real point A ト一ツノ imaginary point B トヲ通リテ常ニ一ツ而モ唯一ツノ line ヲ引クコトヲ得.

proof. B ガ elliptic involution $(PP', QQ', --)$ 及ビ sense PQP' ニ由テ define セラレタリトス. 若シ A ガ B ノ involution ノ base ノ上ニアレバ, ソノ base ハ, A, B ヲ通ル line ナリ. 若シ A ガ B ノ base ノ上ニアラザレバ, $(AP, AQ; AP', AQ', --)$ 及ビ sense $A(PQP')$ ニ由テ define セラレタ involution line ガ A, B ヲ通ル.

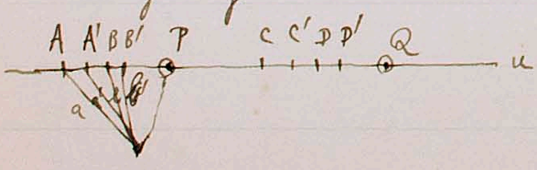


次ニ第一ノ場合ニハ B ガ imaginary point ニテ line AB ガ real ナルユエ, 其ノ如キ line ハ只一ツニ限ル, 第二ノ場合ニハ A ガ real ニテ line AB ガ imaginary ナルユエ, 其ノ如キ line ハ只一ツニ限ル.

Theorem II. 一ツノ real line a ト一ツノ imaginary line b トハ常ニ一ツノ而モ唯一ツノ point ヲ共有ス.

Theorem III. 二ツノ imaginary points ヲ通リテ常ニ一ツノ而モ唯一ツノ line ヲ引クコトヲ得.

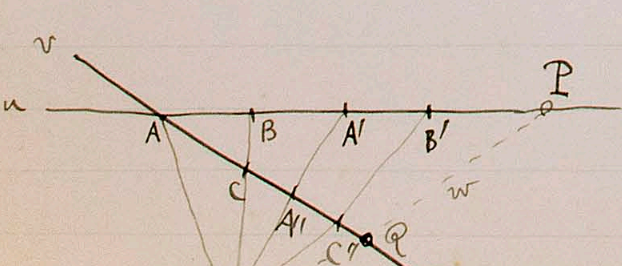
(i) 二ツノ imaginary points P,Q ガ同ジ real base u ヲ有スル場合. コノ場合ニハ, ソノ base ガ即チ二点ヲ通ル line ナリ. real line ニテ imaginary points ヲ有スモノハ, ソノ外ニハナシ. ~~complex~~ マタ imaginary line ト real line u トハ one point ヲ共有スルノミ, 故ニコノ imaginary line ガ P ヲ通ルトキハ Q ヲ通ルコト能ハズ.



(ii) 二ツノ imaginary point P, Q ガ different base u, v ヲ有スル場合. u, v ノ交リヲ A トス. P ガ $(AB, A'B', —)$ ニ由テ, Q ガ $(AC, A''C'', --)$ ニ由テ define セラレタリトス. 然ルトキハ

$(ABA'B'\cdots) \barwedge (ACA''C''\cdots)$

ニテ即チ A ハ common ナルユエ perspective. 故ニ BC, $A'A''$, $B'C''$ ハ same point ヲ通ル. 而シテ $S(ABA'B'\cdots)$ ニ由テ define セラレタ imaginary line w (involution pencil) ハ P, Q ヲ通ル.



而シテ P ニ correspond スル v ノ point ハ Q ノ外ニナキユエ, w ハ一ツニ限ル.

Theorem IV. 二ツノ imaginary lines ~~...~~ ハ常ニ一ツ而シテ一ツノ point ヲ共有ス.

此ニ於テ one plane ノ上ニ於ケル point ト line トノ relation ハ, ソレガ real ナルト imaginary ナルトヲ問ハズ, project and section ノ手段ニ依リテ成立スルヲ知ル.

41. Staudt's theory (II).

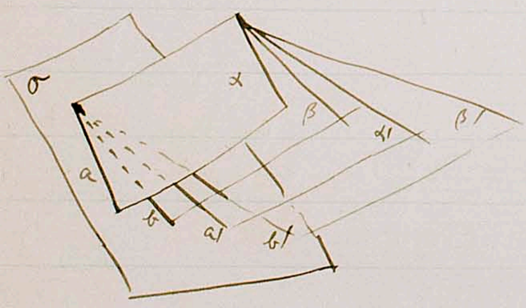
次ニ Space ニ移ル.

Def. elliptic involution ヲナス axial pencil ($\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, —) ニ於テ sense $\alpha\beta\alpha'$ ハ一ツノ imaginary plane ヲ定メ, sense $\alpha'\beta\alpha$ ハ上ノ plane ニ conjugate ナル一ツノ imaginary plane ヲ定ム.

Def. 一ツノ imaginary plane ハ一ツ而シテ唯一ツノ real line ヲ含ム. 即チソノ plane ヲ define スル axial pencil ノ axis コレナリ.

Def. 一ツノ imaginary plane ハソノ上ニアル real line 上ノ總テノ real points ヲ含ミ, ソノ他ノ real points ヲ含マズ.

Def. $\xi = \alpha\beta\alpha'\beta'$ ヲ一ノ imaginary plane トシ, σ ヲ一ノ real plane トス. σ ガ ξ ノ axis ヲ含ムトキハ, ソノ axis ヲ σ ト ξ トノ intersection トイフ. 若シ σ ガ ξ ノ axis ヲ含マザルトキハ, σ ノ上ニ elliptic involution ヲナス flat pencil (a b a' b' —) アリ. ソシテ之ニ依リテ define サルル imaginary line ヲ σ ト ξ トノ intersection トイフ.



コレ等ノ Definition ヲ基トシテ證明ヲ進メ行ケバ, 結局残ル所ノモノハ次ノ二ツナリ.

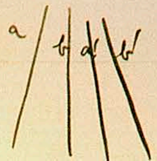
I. Space ニ於テ相交ハザル(即チ skew ナル)二ツノ base ノ上ニアル imaginary points ヲ結ブ line トハ何ゾヤ.

II. skew axis ヲ有スル二ツノ imaginary plane ノ intersect トハ何ゾヤ.

ソノ他ノ場合ハ皆完全ニ define セラル.

Von Staudt ハ次ノ define ヲ与ヘタリ.

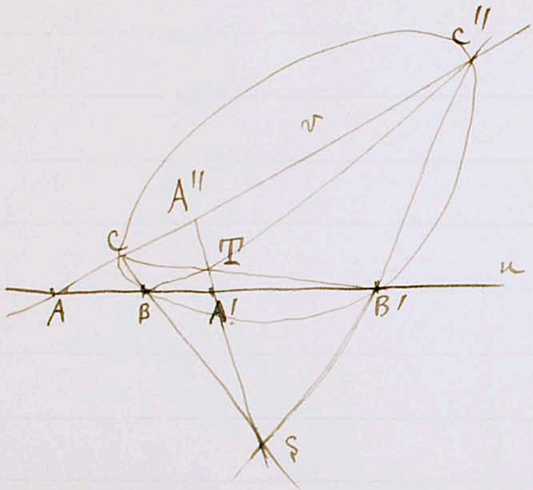
一ツノ ruled surface of the second order ノ same system ニ属スル四ツノ real line ヲ a, b, a', b' トシ, コレ等ガ elliptic involution ヲナスモノトス. 然ルトキハ sense a b a' ニ依リテ一ツノ imaginary line of the second kind (bicomplex line, skew complex line) ガ定マル. 又 sense a' b a ニ依リテ上ノ line ニ conjugate ナル imaginary line of the second kind ガ定マル.



コレマデ考ヘタル project 及 sect, principle of duality, perspective triangle ニ関スル Desargues's theorem ガ; real elements ニテモ imaginary elements ニテモ 一様ニ成立スルコトヲ証明セシ後 ~~[illegible]~~ ガモ, 之レ明ハ ~~長~~ クナル故略ス.
(harmonic property

ココニ唯一ツノ theorem ヲ prove スルニ止メン

Theorem. elliptic involution $(AA', BB', \ldots)$ ニ依テ define セラルル 二ツノ conjugate imaginary points ヲ ~~M, N~~ X, X_0 トス. 然ル片ハ 任意ノ A, A' ハ M, N ニ依テ harmonically ニ分タル.

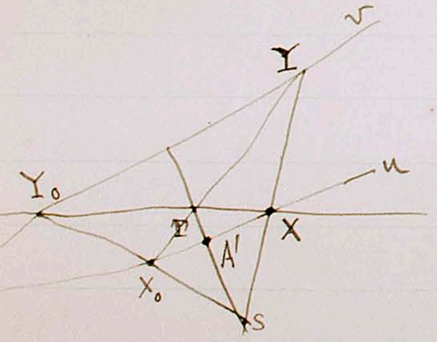


A ヲ過ギテ real line v ヲ引キ, ソノ上ニ C, A'', C'' ヲ取リ ~~$(AA''CC'')$ ガ~~ ~~harmonic ナル様ニ [illegible] 取ル,~~
$ACA''C''$ ハ harmonic range ヲナシ 而モテ elliptic invol.
~~[illegible]~~ $ACA''C''$ ハ v ノ上ニ imaginary point Y ヲ定メ, $AC''A''C$ ハ conjugate imaginary point Y_0 ヲ定ム.

⇒ $BC, A'A'', B'C''$ ハ real point S ニ於テ交リ, $BC'', A'A'', B'C$ ハ real point T ニ於テ交ル様ニ取ル

A ハ二ツノ involution u, v ニ common ナル perspective

今 完全四角形 $STYY_0$ ヲ考フルニ, 二辺 SY, TY_0 ハ X ニ於テ交リ, 二辺 SY_0, TY ハ X_0 ニ於テ交リ, YY_0 ハ A ヲ過ギリ, ST ハ A' ヲ過グ, 故ニ X, X_0 ハ A, A' ヲ harmonically ニ分ツ.
(harmonic range ノ define ハ real ノ場合ト同ジ)

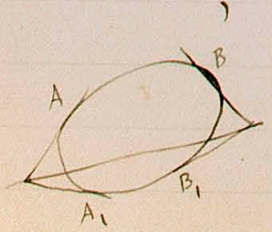


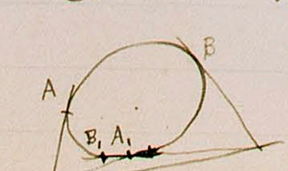
Remark. コノ theorem ニヨレバ X, X_0 ハ elliptic involution ノ double point ト見做スヲ得. 由テ involution ノ double point ハ常ニ二ツアリ. hyperbolic involution ニ於テハ二ツノ double points ハ real ニシテ elliptic invol. ニ於テハ conjugate imaginary ナリ.

42. Some theorems and ~~examples~~ problems.

Theorem I. Second order ノ curve (real) ト 一ツノ line (real) トハ 二ツノ real point 又ハ 二ツノ conjugate imag. points ニ於テ交ル

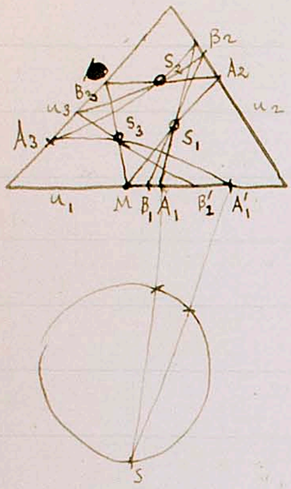
何トナレバ, ソノ直線上ノ任意ノ二点ヨリ two pair ノ real tangent ヲ引キ, ソノ point of contact ヲ AA_1, BB_1 トスレバ, $(AA_1, BB_1, \ldots)$ ニ依テ involution ガ定マル, 而シテ ソノ involution ノ double points ハ ソノ直線ト curve トノ intersection





Theorem 2. conjective ナル二ツノ projective elementary forms of the first rank ハ二ツノ ~~double~~ self-correspondg elements ヲ有ス. (real or conjugate imag.)

~~Exam~~ Problem 1. same plane上ニ [redacted] 与ヘラレタル n 個ノ points $S_1, S_2, \dots, S_n$ ト n 個ノ line $u_1, u_2, \dots, u_n$ アリ. 今 n 角形ヲ作ルニ, ソノ辺ハ此等ノ given points ヲ過ギ ソノ頂点ハ此等ノ given line ノ上ニアル様ニセヨ. (Poncelet).



$(A_1B_1\cdots)\,\pi\,(A_2B_2\cdots)\,\pi\cdots\pi\,(A_nB_n\cdots)$
$\pi\,(A_1'B_1'\cdots)$.

$(A_1B_1\cdots)$ ト $(A_1'B_1'\cdots)$ トノ self-correspondg point

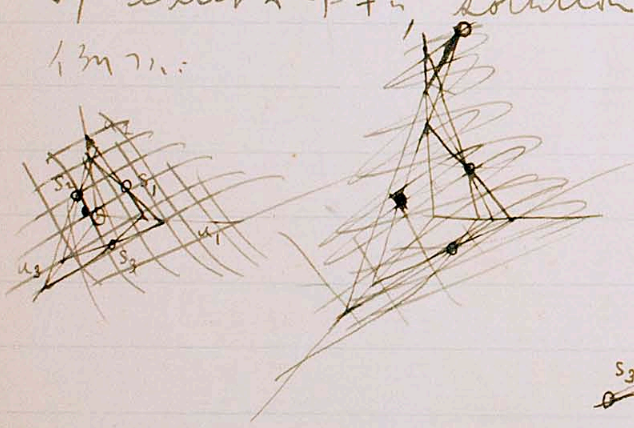
M, N ガ一ツノ vertex ナリ.

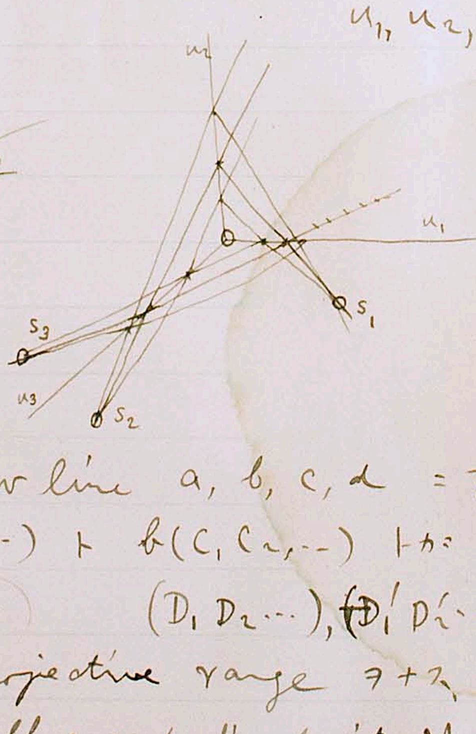
此ノ如キ解キ方ヲ method of false position トイフ.

Remark. 若シ $(A_1B_1\cdots)$, $(A_1'B_1'\cdots)$ ノ self-correspondg points ガ二ツヨリ exist スルトキハ, solution ハ infinite number exist スベシ.

例ヘバ:

u_1, u_2, u_3 ガ same point O ヲ過ギル場合ノ如シ.

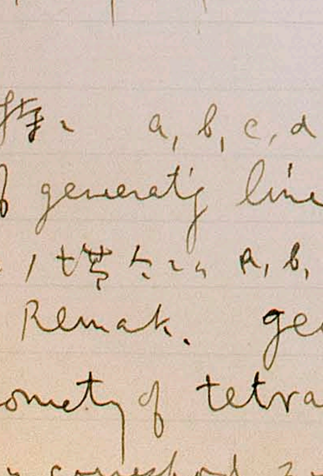




(Brianchon et Petit, 1808; Steiner, 1827)

Problem 2. 四ツノ skew line a, b, c, d ニ交ハル line ヲ求ム.

a$(C_1C_2\cdots)$ ト b$(C_1C_2\cdots)$ トガ d ヲ截ル点ヲ
perspective axial pencil
$(D_1D_2\cdots)$, $(D_1'D_2'\cdots)$ トスレバ, コレハ projective range ヲナス. 故ニソノ self-correspondg points M, N ヲソレニ correspondg スル c ノ上ノ point ニ結ベバ求ムル所ノ line ヲ得.



但シ a, b, c, d ガ second order ノ ruled surface ノ same system of generatg line ~~...~~ ニ属スルトキハ solutn ハ infinite number アリ. コノ場合ニハ a, b, c, d ガ Hyperboloidische Lage ニアリトイフ. (Hermes, 1858)

Remark. geometry of triangle ニ於ケル concurrent line (三ツノ) ト geometry of tetrahedron ニ於テ hyperboloidisch Lage ニアル四ツノ line トハ correspond スル ~~...~~ 場合多シ.

Chapter IX.

Collineation and Correlation of the Elementary Forms of the Second Rank.

43.. Collineation and correlation.

コレヨリハ皆ノ elementary forms of the second rank 即チ plane field ト bundle トヲ考フル。

Def. I. 二ツノ plane field ハ same bundle ノ section ナルトキ互ニ perspective ナリトイフ。II. 次ニ一ツノ plane field ガ一ツノ bundle ノ section ナルトキ、即チ一ツノ bundle ガ一ツノ plane field ノ projection ナルトキ、此ノ plane field ト bundle トハ perspective ナリトイフ。III. 又二ツノ bundle ハ same plane field ノ projection ナルトキ互ニ perspective ナリトイフ。

Poncelet 及ビ Chasles ハ perspective ノ代リニ homologie トハ称ヘリ。

サテ perspective ヲ反覆スルトキハ最初ト最後ノ elementary forms of the second rank ハ perspective ノ性質ヲ失フ。然レドモ例ヘバ plane field ニツキテ考フレバ point range, flat pencil ハ矢張 point range, flat pencil ニ変ハラズ、invariant ナリ。コノ考ヘヨリ Möbius ハ collineation ノ思想ヲ導ケリ (1827)。(Chasles ハ homographie トイヘリ)。

Def. I. 二ツノ plane field ξ, ξ_1 ニ於テ

ξ ノ任意ノ one point P ガ ξ_1 ノ one point P_1 ニ correspond シ、且ツ ξ ニ於テ P ヲ過ギル(任意ノ) one line g ガ ξ_1 ニ於テ P_1 ヲ過ギル one line g_1 ニ correspond スルトキハ、ξ, ξ_1 ハ collinear ナリトイフ。

II. 一ツノ plane field ξ ト一ツノ bundle S_1 ニ於テ

ξ ノ任意ノ one point P ガ S_1 ノ one line p_1 ニ correspond シ、且ツ ξ ニ於テ P ヲ過ギル(任意ノ) one line g ガ ξ_1 ニ於テ p_1 ヲ過ギル one plane γ_1 ニ correspond スルトキハ、ξ ト S_1 トハ collinear ナリトイフ。

III. 二ツノ bundle S, S_1 ニ於テ

S ノ任意ノ one line p ガ S_1 ノ one line p_1 ニ correspond シ、且ツ S ニ於テ p ヲ過ギル任意ノ one plane γ ガ S_1 ニ於テ p_1 ヲ過ギル one plane γ_1 ニ correspond スルトキハ、S, S_1 ハ collinear ナリトイフ。

以上ノ definition ヲ簡単ニ次ノ如ク述ブルヲ得。

second rank ノ二ツノ elementary forms アリ。一方ノ form ニ於ケル異ナル種類ノ elements P, g ヲ取リテ、P ガ g ノ上ニアルモノトス。他方ノ form ニ於テ二ツノ異ナル種類ノ elements P_1, g_1 ガ夫レ P, g ニ correspond シ且ツ P_1 ガ g_1 ノ上ニアルモノトス。然ルトキハ此ノ二ツノ forms ハ collinear ナリトイフ。

(Remark. コノ definition ハ third rank ノ elementary form 即チ space ニ於テモ適用セラル)

Theorem 1. Second rank ノ二ツノ elementary forms ガ perspective ナルトキハ, collinear ナリ.

Theorem 2. 二ツノ elementary forms ガ共ニ第三ノ elementary form ト collinear ナラバ 互ニ collinear ナリ.

吾人ハ principle of duality ニヨリテ correlation 又ハ reciprocal relation ヲ得. cp 4

Def. Second rank ノ二ツノ elementary forms アリ, 一方ノ form ニ就テ異ル種類ノ elements P, g ヲ取リ, P ガ g ノ上ニアルモノトス. 他方ノ form ニ就テ二ツノ異ル種類ノ elements p_1, G_1 ガ共ニ P, g ニ correspond シ, 且ツ p_1 ガ G_1 ヲ通ルモノトス. 斯ノ如キトキハ コノ二ツノ forms ハ correlative ナリトイフ.

Remark. コノ definit' ハ space ニモ適用セラル.

Theorem 3. 二ツノ elementary forms ガ共ニ第三ノ elementary form ニ correlative ナラバ 互ニ collinear ナリ. 逆ニ, 二ツノ collinear forms ノ中ノ一ツガ第三ト correlative ナラバ, 他ノ一ツモマタ第三ト correlative ナリ.

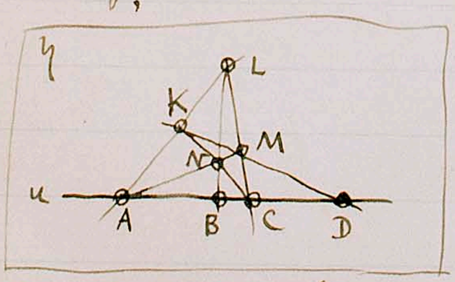
Determination of collineati and correlation.

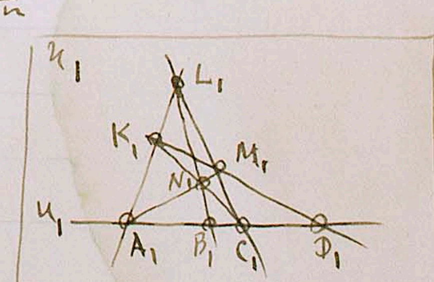
I. 44 Projectivity

~~Def. Second rank ノ二ツノ elementary forms ニ就テ任意ノ harmonic elements ガ harmonic elements ニ correspond スルトキ projective ナリトイフ.~~

Theorem 1. Collinear ナル二ツノ elementary forms ハ projective ナリ. 又 correlative ナル二ツノ elementary forms モ亦 ~~projective ナリ~~.

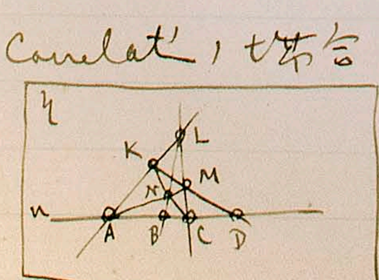
Proof. collineation ノ場合

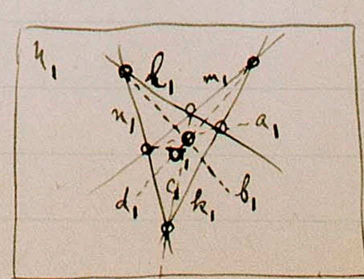




η ニ就テ u ノ上ニ harmonic range ABCD ヲ考フレバ,
$η_1$ ニ就テハ u_1 ノ上ニ range $A_1B_1C_1D_1$ ガ correspond ス.
η ニ就テ完全四辺形 KLMN ヲ作レバ, $η_1$ ニ就テモ同ジク完全四角形 $K_1L_1M_1N_1$ ヲ得. 故ニ A_1, B_1, C_1, D_1 ハ harmonic ナリ.
(D_1 ハ K_1M_1 ノ上ニアリテ)

Correlat' ノ場合



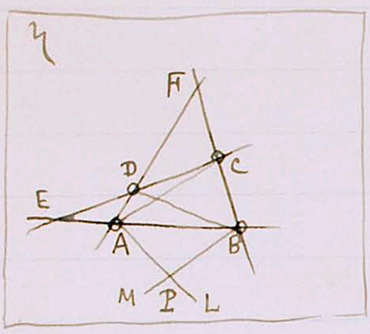


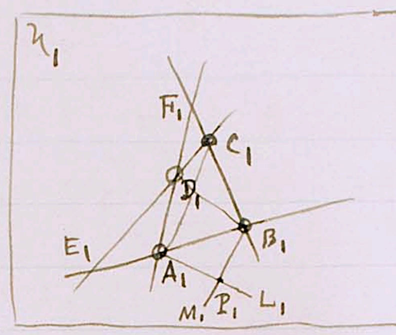
u ノ上ノ ABCD
完全四角形 KLMN (fair range)

U_1 ヲ通ル flat pencil a_1, b_1, c_1, d_1,
完全四辺形 k_1, l_1, m_1, n_1,

Cor. Collineation 又ハ correlation ニヨリテ互ニ correspond スル二ツノ elementary forms of the first rank ハ projective ナリ. (Möbius 1827).

II. Theorem 2. 二ツノ plane field η, η_1 ガ collineation ノ関係ヲ有スル~~[illegible]~~ルトキハ, η ノ上ニ ~~与ヘ~~ 任意ニ 与ヘラレタル ~~[illegible]~~ 一ツノ四角形ノ vertices A, B, C, D ヲモテ η_1 ノ上ノ任意ノ四角形ノ vertices A_1, B_1, C_1, D_1 ニ夫々 correspond セシムルコトヲ得. 然ルトキハ コノ二ツノ plane field ノ collineation ハ unique ニ定マル. (Möbius 1827)





A, B, C, D	A_1, B_1, C_1, D_1
AB, AC, AD,	A_1B_1, A_1C_1, A_1D_1
BA, BC, BD	B_1A_1, B_1C_1, B_1D_1

Theorem 1 ノ Cor. ニヨレバ 二ツノ pencil A(BCD...) ト $A_1(B_1C_1D_1\ldots)$ トハ projective ナルヲ以テ, AL ニ correspond スル A_1L_1 ヲ求ムルコトヲ得. マタ 二ツノ pencil B(ACD...) ト $B_1(A_1C_1D_1\ldots)$ ナルヲ以テ, BM ニ correspond スル B_1M_1 ヲ求ムルコトヲ得. サレバ AL, BM ノ intersect ハ, A_1L_1, B_1M_1 ノ intersect P_1 ニ correspond ス. コノ方法ニヨレバ η ニ於テ任意ノ one point P ヲ与フレバ, η_1 ニ於テ P_1 ガ unique ニ定マリ, Q ヲ与フレバ Q_1 ガ unique ニ定マリ, line PQ ヲ与フレバ line P_1Q_1 ガ unique ニ定マル.

Remark. ABCD ヲ与フルトキ, A_1, B_1, C_1, D_1 ノ夫々ノ撰ビ方ハ ∞^2 アリ. サレバ二ツノ plane field ノ collineat. ハ ∞^8 個アリ.

~~[illegible]~~ Theorem 3 (dual). 二ツノ plane field η, η_1 ガ correlat. ノ関係ヲ有スルトキハ, η ノ上ニ任意ニ与ヘラレタル一ツノ四角形ノ vertices A, B, C, D ヲモテ η_1 ノ上ノ任意ノ四辺形ノ sides a_1, b_1, c_1, d_1 ニ夫々 correspond セシムルコトヲ得. 然ルトキハ コノ二ツノ plane field ノ correlation ハ unique ニ定マル. 二ツノ plane field ノ correlat. ハ ∞^8 個アリ.

~~45. Collineation and correlation of plane curves~~

III. 先ヅ Collineat. ヨリ初ム.

plane η	plane η_1
point P, line l	point P_1, line l.
curve  line ト n point ニテ交ハ	curve  line ト n points ニテ交ハ
tangent, point of contact	tangent, point of contact,
point of inflexion, cusp 	point of inflexion. cusp. 
double point,	double point.

collineat. ニヨリテ second ~~degree~~ order ノ curve ハ ~~invariant~~ second order ノ curve ニ変ズ

即チ curve ノ point of inflexion ノ数, double point ノ数 等ハ collineat. ニヨリテ invariant ナリ。マタ harmonic range, harmonic pencil, 又 ~~...~~ 2nd degree ノ curve ニ関スル pole, polar ~~theory~~ ハ invariant ナリ。又 ~~involut.~~, Pascal's theorem 等モ invariant ナリ。

実ニ Poncelet (1822) ~~ハ project. 及 sect. ニ於ケル~~ ノ考ヘヲ今日ノ完璧ニテ述ベシガ, collineat. ニヨリテ invariant ナル property ヲ projective property ト言フナリ。

Def. η ノ上ノ line at infinity ニ correspond スル η_1 ノ上 line 及ビ η_1 ノ上ノ line at infinity ニ correspond スル η ノ上ノ line ヲ vanishing line (Fluchtgerade) ト云フ。

例ヘバ η ノ上ニ於テ ellipse ガ vanishing line ト交ハルカ之ニ切スルカニ従テ, η_1 ノ上ニ於テハ hyperbola ~~...~~ マタハ parabola トナル。

Def. Vanishing line ガ line at infinity ナルトキハ, collineat. ヲ affinity ト云フ。

Correlation ニ於キテハ dual ニ研究スルコトヲ得ルハ皆明カナリ。

今日ニテハ collineation ト correlation トヲ總稱シテ projective transformation ト云フ。而シテ projective transf. ニヨリテ invariant ナル性質ヲ projective property ト云フ。

45. Perspective collineation.

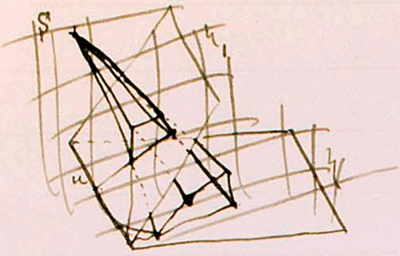
~~Theorem I.~~ §44 ノ Theorem 2 ヨリ次ノ結果ヲ得。

同ジ base ヲ有スル二ツノ collinear plane field ニ於テ, 互ニ correspond スル 四角形ノ vertices (又ハ四辺形ノ sides) ~~correspond~~ ガ common ナルトキハ, 他ノ總テノ corresponding elements ガ common ナリ。即チ 二ツノ plane field ハ identical ナリ。	同ジ vertex ヲ有スル二ツノ collinear bundle ニ於テ, 互ニ correspond スル 四角錐 Vierkant ノ edge (又ハ四面角ノ face) ガ common ナルトキハ, 他ノ總テノ corresponding elements ガ common ナリ。即チ 二ツノ bundle ハ identical ナリ。 

コレヨリ次ノ theorem ヲ得。

Theorem I.

異ナル base ヲ有スル 二ツノ collinear plane field η, η_1 ニ於テ, η ノ上ノ 一ツノ四角形ノ vertices ト η_1 ノ上ノ

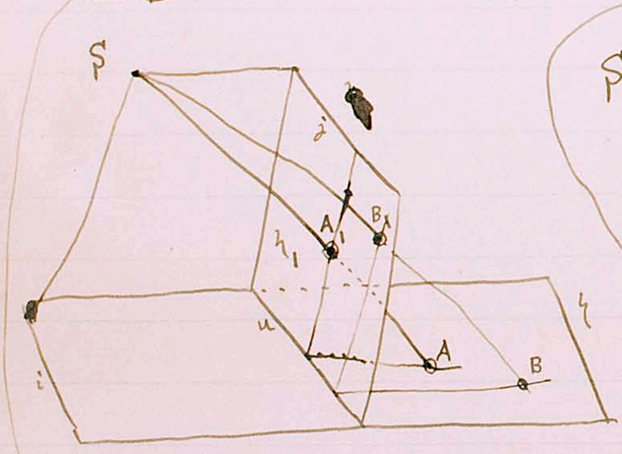


corresponding points ヲ結ブ直線ハ one point S ヲ過ギルトキハ、コノ二ツノ plane field ハ perspective ニシテ、ソノ centre ハ S ナリ。

何トナレバ、S ヨリ ε_1 ヲ ε ノ上ニ project スレバ、上ノ図ノ両部ガ相重ナル故、identical トナレバナリ。

コノ場合ニハ $\varepsilon, \varepsilon_1$ ノ交リ u ハ corresponding lines ノ intersection ノ locus ナリ。故ニ u ヲ axis of perspective トイフ。

$\varepsilon, \varepsilon_1$ ノ交リ u ノ周リニ ε_1 ヲ回転セシテ ε ノ plane ニ一致セシムル limiting position ヲ考フルモ、上述ノ性質ハ失ハレズ。



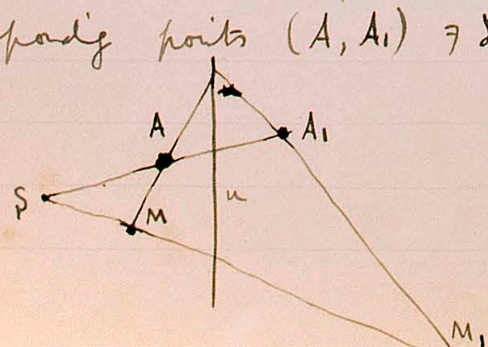
S ヲ過リテ ε ニ parallel plane ヲ作リ ε_1 トノ交リヲ j トスレバ、ε_1 ノ上ノ j ハ ε ノ上ノ line at infinity ニ correspond スル故、j ハ ε_1 ノ上ノ vanishing line ナリ。又 S ヲ過リテ ε_1 ニ parallel ニ引キシ plane ト ε トノ交リ i ハ ε ノ vanishing line ナリ。u, i, j ハ parallel ナリ。

Theorem II.

即チ same base ヲ有スル二ツノ collinear plane field ニ於テ、corresponding points ヲ結ブ直線ハ same point S ヲ過ギルトキハ、corresponding lines ノ交リハ same line u ノ上ニアリ。

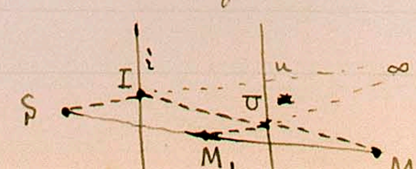
此ノ如キ special ナル collineation ヲ perspective (Poncelet ノ homologie) トイフ。

Ex. 1. Centre of perspective S, axis of perspective u ト one pair ノ corresponding points (A, A_1) ヲ与ヘラレタトキ、M ノ corresponding point M_1 ヲ求ム。



Ex. 2. Centre S, axis u, vanishing line i ヲ与ヘ、M ノ corresponding point M_1 ヲ求ム。

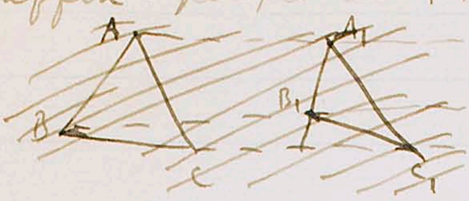
任意ノ直線 MI ヲ引キ IS ニ parallel ニ UM_1 ヲ引ク

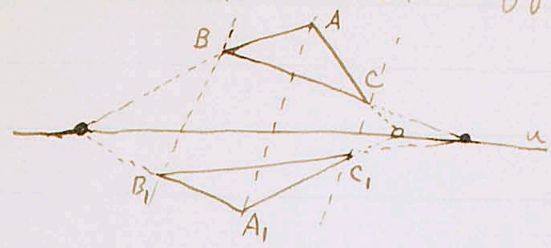


コレヨリ perspective ~~or central~~ ノ particular case ヲ考フル。

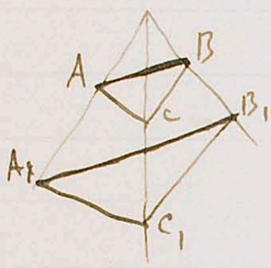
I. centre S ガ infinity ニアル場合 (parallel projection)

コノ場合ニハ vanishing line i ハ infinity ニアリ. 故ニ point at infinity ガ point at infinity ニ correspond ス. 之ヲ ~~affin transformation~~ ~~[illegible]~~ affin-perspective トイフ.





II. axis u ガ infinity ニアル場合

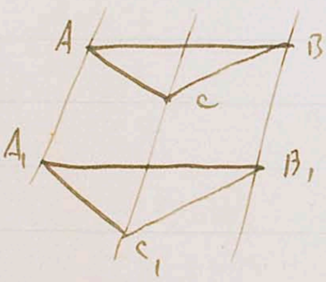


コレ ~~[illegible]~~ (ヨトヨ₁トガ) similar and similarly situated

即チ homothety ノ場合

III ~~●~~ Centre S ト axis u トガ共ニ infinity ニアル場合

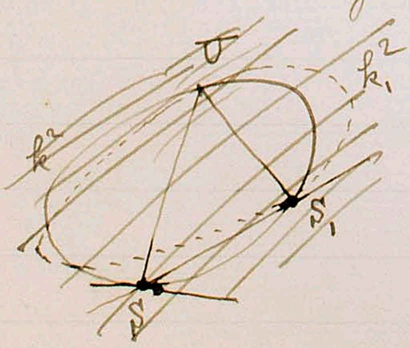
コレ即チ congruent ~~[illegible]~~ ナリ.



46. Invariant points and lines.

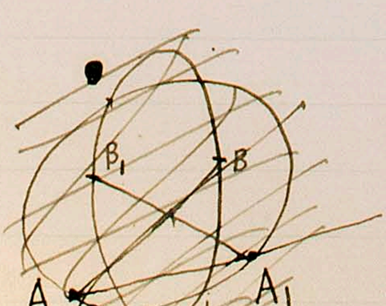
(invariant)

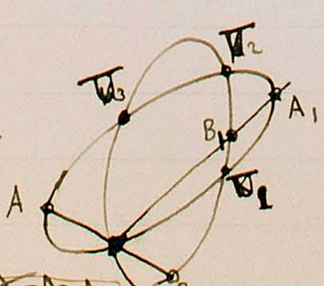
Same base ヲ有スル collinear plane fields $\mathfrak{y}, \mathfrak{y}_1$ ガ identical ニモアラズ, 又 perspective ニモアラザルモノトス. 然ルトキハ self-corresponding points ノ一ツヲ U トセヨ. $\mathfrak{y}$ ニ於テ一ノ flat pencil $\mathbf{A}$ ニ correspond スル $\mathfrak{y}_1$ ノ flat pencil ヲ $\mathbf{A}_1$ トスレバ, $\mathbf{A}$ ト $\mathbf{A}_1$ トハ projective ナルガ故ニ corresponding line ノ交リハ second order ノ curve k^2 ヲ画ク. 而シテ $\mathbf{A}U$, $\mathbf{A}_1U$ ハ corresponding line ナルガ故, U ハ k^2 ノ上ニアリ.

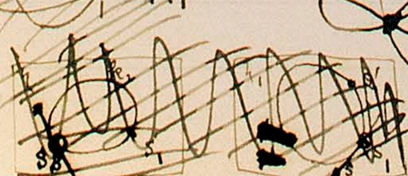


~~今 k^2 ヲ $\mathfrak{y}$ ニ属スルト考フレバ, $\mathfrak{y}_1$ ニ於テコレニ correspond スル k_1^2 ガ存在ス. 然ルニ k^2 ハ S ニ於テ line SS (即チ tangent) ニ touch ス. 従テ k_1^2 ハ S_1 ニ於テ line S_1S ニ touch ス.~~

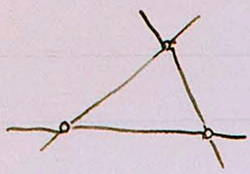
● 次ニ他ノ corresponding pencil B, B₁ ヲ考フレバ, コレ亦一ノ k_2^2 ヲ画ク. ~~[illegible]~~ 而シテ U ハ k_2, k_2' ノ交リナリ. 但シソノ四点ノ中ニハ AB, A₁B₁ ノ交リヲ含ム. 何トナレバ AB, A₁B₁ ハ corresponding line ナルガ故 AB, A₁B₁ ノ intersect ハ k_2 ノ上ニアリ. 又 BA, B₁A₁ —— k_2' ノ上ニアルベケレバナリ.







Theorem. same base ヲ有スル二ツノ collinear plane fields ノ double point (invariant point) ハ一般ニ三ツアリ. ソノ三点ヲ二ツヅツ結ブ三ツノ line ハ double line (invariant line) ナリ.



此ノ three points ノ中一ツハ常ニ real ニシテ他ノ二ツハ real points or conjugate imaginary points ナリ.

invariant points ノ determination ハ collineation ノ systematic classification 並ビ cinematics ニ於テモ必要ナレバ, 後ニ analytic ニ詳論セント欲ス.

Chapter X.

Collineation and correlation of space.

47. Definitions and theorems.

二ツノ spaces Σ, Σ_1 ニ於テ，Σ ノ任意ノ一点 P ガ Σ_1 ノ一点 P_1 ニ correspond シ 且ツ (Σ ニ於テ) P ヲ過ギル任意ノ直線又ハ平面ガ (Σ_1 ニ於テ) P_1 ヲ過ギル夫々一ツノ直線又ハ平面ニ correspond スルトキハ，Σ ト Σ_1 トハ collineation ヲナストイフ.

二ツノ spaces Σ, Σ_1 ニ於テ，Σ ノ任意ノ一点 P ガ Σ_1 ノ一平面 π_1 ニ correspond シ 且ツ Σ ニ於テ P ヲ過ギル任意ノ直線又ハ平面ガ夫々 Σ_1 ニ於テ π_1 ノ上ニアル一ツノ直線又ハ点ニ correspond スルトキハ，Σ ト Σ_1 トハ correlation ヲナストイフ.

Collineation ト correlation トヲ總稱シテ projective transformation トイヒ，ソレニ由リテ invariant ナル property ヲ projective property トイフ.
vanishing plane, affine transformation 等ハ plane ノ場合ト analogous ナリ.
Plane ノ場合ト同様ニ次ノ theorem ヲ得.

Theorem I. 二ツノ space Σ, Σ_1 ガ collineation ヲナストセバ，Σ ノ任意ノ五点 (但シ其ノ四ツモ同一平面上ニナキモノトス) ヲモテ Σ_1 ノ任意ノ五点 (但シ其ノ四ツモ同一平面上ニナキモノトス) ニ夫々 correspond セシムルコトヲ得. 然ルトキハ コノ二ツノ space ノ collineation ハ unique ニ定マル (Möbius 1827)

Theorem II. Collineat. space ニ於ケル point rank ノ second rank ノ form ハ projective ナリ.

Correlat. ニツキテモ同様ノ theorem ガ成立ス.

Optics

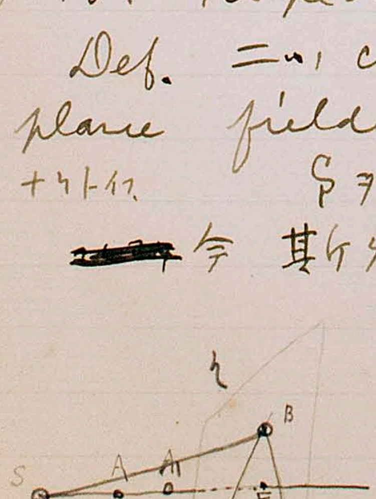
Theorem III. 同ジ space ニ於テ collineat. ノ invariant point ハ一般ニ四ツアリ.

48. Perspective collineat.

Def. 二ツノ collinear space ニ於テ 一ツノ bundle S 及ビ一ツノ plane field ε ガ common ナルトキハ (互ニ correspond スル)，perspective アルハ homologic ナリトイフ. S ヲ homologi ノ centre，ε ヲソノ plane トイフ.

今其ノ如キ correspondence ノ existence ヲ証明セン.

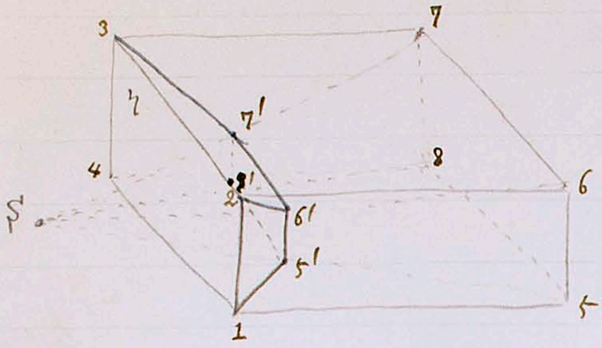
任意ノ point S ト ε (plane) トヲ取ツテ外ニ任意ノ point A ト ソノ corresponding point A_1 トヲ取ツ. 但シ AA_1 ハ S ヲ過ギリ 且ツ ε ノ上ニアラザルモノトス.



今 ε ノ上ニ任意ノ三点 B, C, D ヲ取ル，但シ BC, CD, DB ハ孰レモ SAA_1 ト交ラザルモノトス.

然ラバ collineat. ハ $SABCD$, SA_1BCD ニヨリテ uniquely ニ定マル (§ 47. theorem I). 然ルニ § 45 ノ右側ニヨリテ $S(ABCD)$ ト $S(A_1BCD)$ ハ common ナレバ，コノ二ツノ bundle ハ identical ナリ. 即チ S ヲ過ギル任意ノ line ハ self-correspondence ヲナス. 又 ε ノ上ニ於テ B, C, D, E ガ common ナレバ，identical ナリ.

スルヲ以テ茲ニ略ス
Perspective collineation ニ就テハ descriptive geometry ニ於テ論
Perspective collineat. ヲ利用シテ relief-perspective ニ彫刻ヲ作ルコトヲ得.



S = 眼ヲ置キシヲ ~~[struck]~~ fundamental (relief-perspective) plane トス

space	1 2 3 4 5 6 7 8
relief	1 2 3 4 5' 6' 7' 8'

5' ヲ極メテ S ニ接近セシムレバ relief ハ極メテ薄キモノトナル. 芝居ノ back, 又ハ Panorama ハ之ヲ應用セシモノナリ. relief ノ厚サガ 0 トナレバ limit ニ於テハ絵ヲ得ベシ.

前ニ入レ

Optical instruments ノ theory

光線ガ ~~[struck]~~ 多クノ homogeneous medium ヲ pass スルモノトスレバ, 最初ノ medium ニ於ケル光線 line ハ最後ノ medium ニ於テモ line ナリ. 最初ノ medium ニ於ケル bundle P ハ, 一般ノ場合ニハ, 最後ノ medium ニ於テ一ノ bundle P_1 ヲ作ラズ. 特ニ bundle ヲナス場合ニハ P, P_1 ヲ anastigmatic ~~bundle~~ point-pair トイフ.

実際 optical instrument ノ theory ニ於テハ 簡単ノ為メニ ~~[struck]~~ space ガ皆 anastigmatic point ヨリ成ルモノト考フ. 然ルトキハ Objektraum ト Bildraum トハ collineation ヲナス.

コノ collineat. ニ於テ 二ツノ Raum ノ (Fluchtebene ニテ) vanishing plane ヲ Brennebene (~~fo~~ focal plane) トイフ. 特ニ Objektraum ノ Fluchtebene ガ infinity ニアレバ, 即チ affine transformat. ノ場合ニハ, teleskopische Abbildung トイフ.

Hamilton, Plücker, Lie (Huyghens)

Bruns

Klein

Integral invariant

Vessiot, 吾, 伊, 白耳

~~Dilatation~~

elasticity ノ deformat., heat ニヨル expansion } affine transf.

time t ヲ fixed ス ~~relativ~~ Lorentz transf.

(same ニ於テ [illegible]

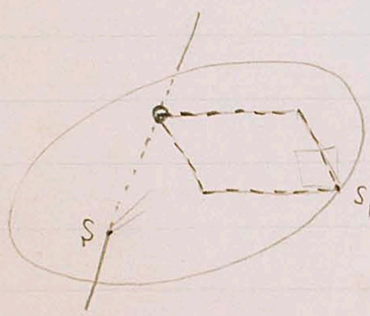
Chapter XI.
Surfaces of the second order.

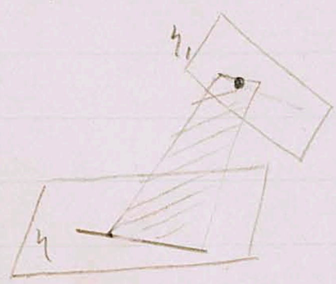
49. Fundamental Theorems.

Definition.

二ツノ correlative bundle S, S_1 ガ異ナル vertex ヲ有スルトキ、一ツノ bundle ノ任意ノ ~~[illegible]~~ line トソレニ correspond スル他ノ bundle ノ plane トノ intersection ハ second order ノ surface F^2 ヲ画クナリ。(Seydewitz, 1847)

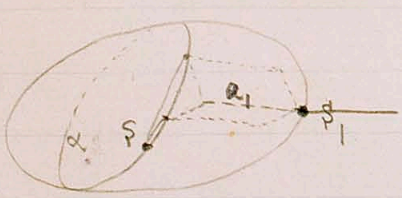
二ツノ correlative plane field η, η_1 ガ異ナル base ヲ有スルトキ、一ツノ field ノ任意ノ line トソレニ correspond スル他ノ field ノ point ト ニヨツテ定メラルル plane ハ ~~[illegible]~~, second order ノ ~~[illegible]~~ plane ニ bundle ヲ画クトイフ。





second order ノ surface ト plane ~~[illegible]~~ bundle トハ dual ナルモ、吾人ハコレヲ主トシテ surface ノ方ニ就キテ考フ。

~~vertex~~ S ヲ含ム任意ノ plane α ト surface F^2 トノ交リハ curve of second order ナリ。何トナレバ α ノ上ニ於テ bundle S ニ属スル line ハ flat pencil ヲ ~~[illegible]~~ ナシ、而シテ之レニ correspond スル S_1 ノ plane ハ α ニ correspond スル line a_1 ヲ axis トスル axial pencil ヲ作ル。而シテ此ノ flat pencil ト axial pencil トハ projective ナルガ故ニ、curve of second order ヲ generate ス。(§24, III)

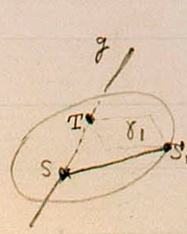


Theorem I.

second order ノ surface F^2 ト ソレニ含マレザル任意ノ line g トハ 二ツヨリ多クノ point ニ就テ交ラズ。

何トナレバ plane Sg ト surface トノ交リハ second order ノ curve ナレバナリ。

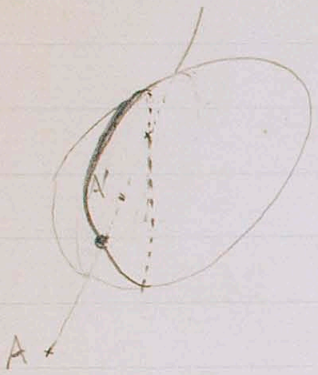
Def. S ヲ通ズル任意ノ line g ト surface ノ他ノ交リ T ハ、g ニ correspond スル plane γ_1 ノ上ニアリ。特ニ T ガ S ニ重ナル場合ニハ、γ_1 ハ 二ツノ bundle ニ common ナル line SS_1 ヲ含ム。コノ場合ニハ g ヲ S ニ於ケル tangent トイフ。space S_1 ニ於ケル line SS_1 ニ correspond スル space S ノ plane ヲ考フルニ、ソノ上ニ於ケル凡テノ line γ ハ S ニ於ケル tangent ナリ。故ニコノ plane ヲ S ニ於ケル tangent plane トイフ。



Theorem II. second order surface ノ上ノ任意ノ点ハ、ソノ surface ヲ generate スル correlative bundle ノ vertex ト見做スコトヲ得.

コノ theorem ハ甚ダ重要ノモノナレドモ証明ガ長クナル故略ス
(Reye, II, p. 39-41)

50. Pole and polar plane.
Method of reciprocal polars.



51. Classification of ~~the~~ surfaces of the second order.

I. cone.

II. Ruled surfaces { hyperboloid of one sheet / hyperbolic paraboloid

III. Non-ruled surfaces {
- Ellipsoid — point at infinity ヲ含マザルモノ
- elliptic paraboloid — plane at infinity ニ touch スルモノ
- hyperboloid of two sheets — plane at infinity ト curve of second order ニテ交ハルモノ

~~1. 2.~~ F^2 又ハ higher order ノ plane curve, space curve, surface ノヲ synthetic ニ述ベタル二三ノ著書ヲ擧グ.
(2 ハ line geometry)

Reye, Geometrie der Lage, II, III.
Schröter, Theorie der Oberflächen 2. O. und d. Raumkurve 3. O.
Schröter, Theorie d. ebenen Kurven 3. O.
Cremona, Allgemeine Theorie d. Oberflächen
Schröter, Geom. Theorie d. Raumkurve 4. O. 1.st species.
Sturm, Flächen 3. O.
Sturm, Liniengeometrie.
Sturm, Geometr. Verwandtschaften. (partly analytic)
E. Kötter, Grundzüge einer rein geometrischen Theorie d. algebra. ebenen Kurven.

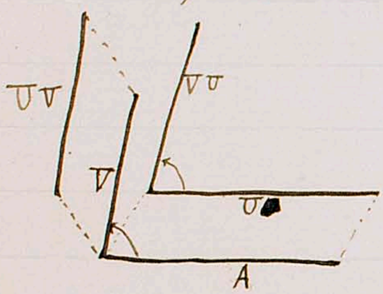
Chapter XII.

Theory of ~~Discontinuous~~ group.

52. Definition of group.

コヽニ與ヘラレタル object 又ハ objects ノ set A アリ。コレニ施ス operation ノ sets ヲ $U, V, W, \dots$ トス。而シテ A ニ U ヲ apply セル result ヲ $U(A)$ ニテ表ハス。又 $U(A)$ ニ更ニ V ヲ apply セル result ヲ $V(U(A)) = VUA$ ニテ表ハス。之ヲ product トイフ。object A ガ常ニ同ジモノナル場合ハ A ヲ略シテ VU ト書ク。

VU ト UV トハ必ズシモ同一ナラズ。例ヘバ U ヲ parallel translat^n, V ヲ一ツノ rotat^n トスレバ $UV \neq VU$.



若シ $UV = VU$ ナルトキハ U ト V トハ commutative ナリトイフ。

之ニ反シテ associative law

$$U(VW) = (UV)W = \cdots$$

ハ holdス。

次ニ任意ノ operat^n U ニ對シテ

$$U'U(A) = UU'(A) = A$$

ナラシムベキ一ツノ definite ナル unique operat^n U' ガ existスルトキハ, U' ヲ U ノ inverse トイヒ, 之ヲ U^{-1} ニテ表ハス。而シテ

$$U^{-1}U = UU^{-1} = 1$$

ト書ク。1 ハ A ヲ不變ナラシムル identical operat^n ノ symbol ナリ。

Def. operat^n ノ sets $U, V, W, \dots$ ノ totality ヲ G ニテ表ハストキ, G ノ内ノ任意ノ二ツ operation ノ product ガマタ G ニ屬シ, 且ツ G ノ内ノ任意ノ operat^n ノ inverse ガマタ G ニ屬スルトキハ, G ハ一ツノ group ナリトイフ。G ノ中ニハ identical operat^n モ含マルヽトス。[Galois] G ニ含マル operat^n ノ数ガ finite ナラバ finite group, inf. ナラバ infinite group トイフ。此数ヲ order トイフ。

~~Theorem 1. $UV = UW$ 又ハ $VU = WU$ ナラバ $V = W$ ナリ。~~

~~Proof. $UV = UW$ ナラバ~~

~~$U^{-1}(UV) = U^{-1}(UW)$.~~

~~$\therefore (U^{-1}U)V = (U^{-1}U)W$. $\therefore V = W$.~~

~~マタ $VU = WU$ ナラバ $(VU)U^{-1} = (WU)U^{-1}$ ヨリ $V = W$.~~

~~Theorem 2.~~

~~$(UVW)^{-1} = W^{-1}V^{-1}U^{-1}$.~~

~~何トナレバ $(UVW)(W^{-1}V^{-1}U^{-1}) = UV \cdot WW^{-1} \cdot V^{-1}U^{-1}$~~

~~$= UV \cdot V^{-1}U^{-1} = U \cdot VV^{-1} \cdot U^{-1} = UU^{-1} = 1$.~~

Theorem. operation ノ sequence

$$U, U^2, U^3, \cdots, U^n, \cdots$$

ハ unlimited ナレカ, 然ラザレバ $U^p=1$ ナル如キ least positive integer p ガ exist ス.

Proof. 若シ コノ sequence ノ中ニ同ジモノアリトセバ, 即

$$U^{k+p} = U^k$$

ナルガ如キ二ツノ least pos. integer k, p ガ exist セザルベカラズ. 由テ

$$U^{-k}U^{k+p} = U^{-k}U^k = 1. \quad \therefore U^p = 1.$$

(コノ場合ニハ operat^n U ハ period p ヲ有ストイフ 又ハ n^{th} order ノ cycle ヲナストイフ.

コノ場合ニハ

$$1, U, U^2, \cdots U^{p-1}$$

ハ皆異ル. 何トナレバ若シ $U^m = U^n$ $(p > m > n)$ ナリトセバ $U^{m-n} = 1$ コレ p ガ $U^p=1$ ナル如キ least pos. integer ノ cond^n ニ反スレバナリ.

Def. 一ツノ group ノ一部分ガ又 group ヲナスノキハ之ヲ original group ノ subgroup トイフ.

53. Projective groups.

吾人ハ same rank ノ figure ニ就テ二ツノ projective transformat^n ノ組合セハ又一ツノ projective transform. ナルコトヲ知レリ. 即チ projective transformat^n ハ一ツノ infinite group ヲ作ル. 之ヲ symbol ニテ表ハサバ same rank ノ任意ノ三ツノ figures F_1, F_2, F_3 ニ就テ $F_1 \barwedge F_2$, $F_2 \barwedge F_3$ ナレバ又 $F_1 \barwedge F_3$.

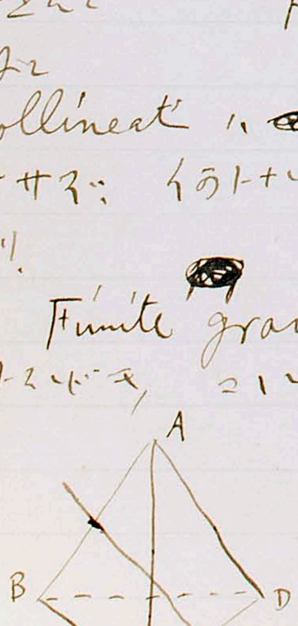
即チ $F_2 = U_1 F_1$, $F_3 = U_2 F_2$, $F_3 = U_3 F_1$.

然ルニ $F_3 = U_2(U_1 F_1) = U_2 U_1 F_1$.

故ニ $U_3 = U_2 U_1$. (コノ立脚地ヨリ projective geometry ヲ取カヒテ論ゼシハ Stephanos 1879 ナリ)

Collineat^n ハ一ツノ subgroup ヲナセドモ, correlat^n ハ group ヲナサズ. 何トナレバ二ツノ correlat ノ product ハ collineat^n ナレバナリ.

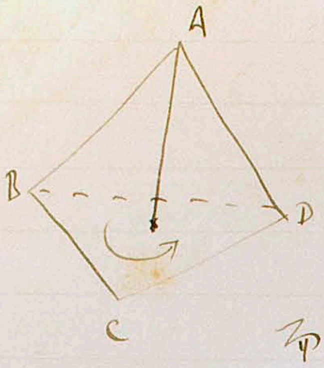
Finite group ノ example ハ algebra ニ就テ研究スルヲ常トスレドモ, コヽニ一例ヲ挙グレバ



正四面体 ABCD ノ中心ヲ通ル axis ノ周リ rotat^n ニヨテ vertices ヲ permutate スルコトヲ考フレバ コレハ collineat^n ノ一種ナリ.

$F = ABCD$

AB, CD ヲ bisect スル axis	$U_1 F = BADC$,	$U_1^2 = 1$.
AC, BD 〃	$U_2 F = CDAB$,	$U_2^2 = 1$.
BC, AD 〃	$U_3 F = DCBA$,	$U_3^2 = 1$.



$V_1 = ACDB \quad V_1^2 = ADBC \quad V_1^3 = 1$

$V_2 = DBAC, \quad V_2^3 = 1$

$V_3 = BDCA \quad V_3^3 = 1$

$V_4 = CABD \quad V_4^3 = 1.$

而シテ $G(1, U_1, U_2, U_3, V_1, V_1^2, V_2, V_2^2, V_3, V_3^2, V_4, V_4^2)$ ハ order 12 ノ group ヲナス. 何トナレバ、コノ 12 ハ vertices ノ all permutat' ヲ尽シテ、ソノ任意ノ二ッ ノ product モマタ G ニ属スレバナリ. 之ヲ tetrahedral group トイフ.

$(1, U_1, U_2, U_3)$ ハ其ノ subgroup ナリ. 何トナレバ

	1	U_1	U_2	U_3
1	1	U_1	U_2	U_3
U_1	U_1	1	U_3	U_2
U_2	U_2	U_3	1	U_1
U_3	U_3	U_2	U_1	1

	U_m
U_n	$U_n U_m$.

§4. Involution.

First rank ノ elementary form ニ projective transformat' (conjective ナル) U ヲ施ストキ、$U^p = 1$ ナルベキ least pos. integer p ガ exist スルトキハ、之ヲ p th order ノ cyclic projectivity トイフ. 例ヘバ angle $\frac{2\pi}{p}$ ダケノ rotat' ノ如シ. Sturm, Geom. Verwandt. Bd I, p. 187–208. Lüroth, Math. Ann. 11 (1877)

コノ中 最モ simple ナルハ

$$U^2 = 1$$

~~而シテ involut'~~ (ノ場合ナリ. コレ即チ) 何トナレバ involut' ニ就テハ (Involut' ナリ) $(AA'B\cdots) \overset{\pi}{\wedge} (A'AB'\cdots)$

ニ就テハ definit' ニヨリテ $UA = A', \quad UA' = A$

故ニ $U^2A = UA' = A$ 即チ $U^2 = 1$ ナレバナリ.

逆ニ $U^2 = 1$ ナラバ $UA = A'$, $UA' = U(UA) = U^2A = A$. 故ニ involut' ナリ.

Theorem 1. 任意ノ projectivity ハ 二ッノ involut' ノ product ト見做スコトヲ得. (H. Wiener 1890–93, Leipziger Berichte)

U ヲ一ッノ projectivity トシ、A, A' ヲ one pair ノ correspondg point トスレバ $UA = A'$. 今 $UA' = A''$ トセヨ.

若シ $A'' = A$ ナラバ、U ハ involut' ナリ.

若シ $A'' \neq A$ ナリトセバ、A, A'' ヲ one pair ノ correspondg point トシ A' ヲ double point トスル様ナル involut' (コハ unique ニ定マル) ヲ V_1 トセヨ. 然ラバ

$$V_1U(AA') = V_1(A'A'') = A'A.$$

故ニ $$(V_1U)^2(AA') = V_1U(A'A) = AA'.$$

故ニ V_1U ハ一ッノ involution ナリ. 之ヲ V_2 ニテ表ハセシ.

即チ $\overline{V}_1\overline{U} = \overline{V}_2.$

$\overline{V}_1^2 = 1$ ナレバ

即チ A'A" ニ対応セシムレバ $\overline{U} = \overline{V}_1^2\overline{U} = \overline{V}_1\overline{V}_2.$

マタハ $\overline{U}\overline{V}_1(A'A'') = \overline{U}(A'A) = A''A'$

故ニ $(\overline{U}\overline{V}_1)^2(A'A'') = \overline{U}\overline{V}_1(A''A') = A'A''.$

$\overline{U}\overline{V}_1$ ハ 一ツノ involut' ニシテ セヨ

$$\overline{U}\overline{V}_1 = \overline{V}_3$$

是ニ於テ

$$\overline{U} = \overline{U}\overline{V}_1^2 = \overline{V}_3\overline{V}_1.$$

$$\therefore\ \overline{U} = \overline{V}_1\overline{V}_2 = \overline{V}_3\overline{V}_1.$$

Def. 二ツノ involution $\overline{V}_1, \overline{V}_2$ ニ就テ $\overline{V}_2\overline{V}_1 = \overline{V}_1\overline{V}_2$ ナルトキ commutative ナリトイフ. (Segre ハ harmonic ト日ヘリ)

Theorem 2. $\overline{V}_1, \overline{V}_2$ ガ commutative involution ナルトキハ, $\overline{V}_2$ ハ 一ツノ involution ナリ. 而シテ其ノ逆モ亦真ナリ.

Proof. $\overline{V}_1\overline{V}_2 = \overline{V}_2\overline{V}_1$ ナリトセバ

$$(\overline{V}_1\overline{V}_2)^2 = \overline{V}_1\overline{V}_2 \cdot \overline{V}_2\overline{V}_1 = \overline{V}_1 \cdot \overline{V}_2^2 \cdot \overline{V}_1 = \overline{V}_1^2 = 1.$$

即チ $\overline{V}_1\overline{V}_2$ ハ 一ツノ involut ナリ.

逆ニ $\overline{V}_1\overline{V}_2 = \overline{V}_3$ ナリトセヨ. 但シ $\overline{V}_1^2 = \overline{V}_2^2 = \overline{V}_3^2 = 1$

然ラバ $\overline{V}_1\overline{V}_2\overline{V}_3 = \overline{V}_3^2 = 1.$

故ニ $\overline{V}_2\overline{V}_1 = \overline{V}_2\overline{V}_1 \cdot \overline{V}_1\overline{V}_2\overline{V}_3 = \overline{V}_2 \cdot \overline{V}_1^2 \cdot \overline{V}_2\overline{V}_3 = \overline{V}_2 \cdot \overline{V}_2\overline{V}_3$

$$= \overline{V}_2^2 \cdot \overline{V}_3 = \overline{V}_3 = \overline{V}_1\overline{V}_2.$$

Theorem 3. Involution $\overline{V}$ ノ任意ノ conjugate points ヲ A, A' トス. 然ルトキハ A, A' ヲ double points ニ有スル involut' $\overline{V}'$ ハ $\overline{V}$ ト commutative ナリ.

何トナレバ $\overline{V}\overline{V}'(AA') = \overline{V}(AA') = A'A.$

故ニ $(\overline{V}\overline{V}')^2(AA') = AA'$

故ニ $\overline{V}\overline{V}'$ ハ 一ツノ involut' ナリ. 故ニ theore 2 ノ逆ニ由テ

$$\overline{V}\overline{V}' = \overline{V}'\overline{V}.$$

Remark. plane 又ハ space ニ於テ, cyclic projectivity ノ理論ハ 甚ダ複雑ナリ. (Encykl. d. math. Wiss., III, 1, p. 434-437).

Chapter III. Numerical integration

§13 Use of the interpolation-formula.

§14. principle of Mechanical quadrature
(Mittelwerts-Methode)

~~general~~

§15 Newton-Cotes method

§16 Tchebycheff method

§17 Gauss method

(十七 +32h)
計算

Chapter IV.
Empirical formulas.

§18. General principle.

§19. Types of empirical functions. ~~formulas~~

§20. Approximating Polynomials.

~~§21. Fourier's analysis~~

Harmonic analysis

§21. ~~Trigonometric interpolat.~~