岩波講座

物　理　學

I.　A.

物理學と數學

小倉金之助

岩波書店

物 理 學

I. A.

物 理 學 と 數 學

小 倉 金 之 助

目　　次

はしがき

与へられた課題は，“物理學と數學”であるが，さて如何にこれに答ふべきであらうか．

客觀的に見て，疑もなく正しい方法は，物理學と數學との關聯を，歷史的に忠實に，どこまでも系統的に追究することであらう．けれども遺憾ながら今日の私には，かやうな研究に對する用意が缺けてゐる．已むなくここでは，一方，かやうな歷史の部分的素描を與へると共に，他方，物理學に於ける數學についての，貧しい所感を述べることにした[1]．

それで，どんな意味でも，これは系統的な講座ではなく，ただ一門外漢の單なる主觀的感想に過ぎないのである[2]．この點について，豫め讀者諸君の了解をお願ひして置く．

---

(1) それについては，特に Klein, Picard, Poincaré, Weyl のもの，並びに本講座の月報に負ふところ，甚だ多かつたことを感謝したい．

(2) それで讀者諸君は，例へば本講座中の石原純さんの‘物理學概論’のやうな，系統的記述を一讀されてから，拙文を批判的にお讀み願ひたいのである．

第一章　物理學と數學との交渉史の諸斷面

物理學と數學との關係を明かにするために，私達は先づその間の交渉の歷史から始めよう．

物理學と數學との交渉は，相互的である．けれども物理學が數學に負ふところは，本講座中の諸項目に於て，具體的に全面的に示されてゐるし，また“物理學史”の方でも，この題目に觸れられるであらうから，ここでは，逆に，數學が如何に（廣い意味での）物理學に負ふところあつたかを，中心課題と致したい．それも主として，數學諸分科の起源に重點をおいて，考へて見たいのである．諸分科の其の後の發展を，系統的に追究することなどは，ここでは企てなかつた．

解　析　學

さて數學が，何を，どんな仕方で，物理學に負ふたかを示すために，先づ解析學の歷史の數頁を，讀み上げることにする．

17 世紀に，運動學と，生れたばかりの力學の發達 (Kepler, Galilei, Huygens) は，解析學の進展の主要原因となつた．

面積と體積の問題や，曲線への切線の問題と相俟つて，速度加速度を含めての運動の研究が，微積分學の創見へと導いたことは，あまりにも周知のことである．特に導函數の觀念が，可動性とか速さに關聯した，一種の何か漠然たる考への中から生れ出たことは，Newton 自らがよく語つてゐる．

“Therefore, considering that quantities, which increase in equal times, and by increasing are generated, become greater or less according to the greater or less velocity with which they increase and are generated; I sought a method of determining quantities from the velocities of the motions, or increments, with which they are generated; and calling these velocities of the motions, or increments, *fluxions*, and the generated quantities *fluents*, I fell by degrees, in the years 1665 and 1666, upon the *method of fluxions*, which I have made use of here in the quadrature of curves.

Fluxions are very nearly as the augments of the fluents generated in equal, but very small, particles of time; and, to speak accurately, they are in the *first ratio* of the nascent augments; but they may be expounded by any lines which are proportional to them.····From the fluxions to find the fluents is a much more difficult problem, and the first step of the solution is to find the quadrature of curves. ....”

ここで fluent, fluxion といつた言葉ほど，Newton の微積分學 (method of fluxions) の起源を，明かに告げるものはないだらう[1]．

かやうに微積分學，微分方程式の誕生によつて，“プリンシピア”が現はれる．新興の解析學は，最短時降線の問題や，曲面上の測地線の問題に適用されて，ここに變分學が生れて來た (Bernoulli). 17 世紀に於ける解析學の歷史は，その最も重要な諸點で，力學の歷史であり，物理學の歷史であつたのである．

歷史はまた，複素變數の函數論が，物理學の中から生れたことを示してゐる．曲線に沿へる積分が初めて取扱はれ，その積分値が二定點の間の途に無關係なるための條件が求められたのは，Clairaut の“地球の形狀の理論”に於てであつた．つゞいて複素變數の函數が，明瞭に取扱はれたのは，

(1) 實はこれと類似の言葉は，對數の研究に於ける Napier の fluxus や，微積分の先驅的研究に於ける Cavalieri の fluens など，既に Newton 以前から，用ひられたのである．

流體力學に關する d'Alembert の論文の中であり，ここで彼は今日 Cauchy-Riemann の名で呼ばれるところの微分方程式を導き，有名なる二階偏微分方程式（Newton ポテンシャルの式）を書いた．つづいて Euler は流體力學の論文で，Lagrange は地圖（等角寫像）の研究で，またこの問題に觸れた．かやうに，19 世紀に入つてから，大なる發展を遂げた函數論も，その起りを物理學に負ふたのである．

私達は只今，二階偏微分方程式に觸れたが，振動する絃の方程式を導いたのも，d'Alembert であつた．引力の研究もまた同様に，解析學の發達に大なる寄與をなしたが，ここにはただ，ポテンシャル論に於ける，Laplace の方程式を回想するに止めよう．やがて Fourier の熱導論が現はれ，その偏微分方程式の解法の中から，Fourier 級數が生れて來た．

かやうにして限界値問題に於ける，種々の型式が導入されたが，私達はここに物理學が，偏微分方程式論に於て，二重の役割を果すことを見るのである．先づ第一に，物理學は自然から，數學者の思ひも及ばないやうな，しかも數學上の重大な諸問題を提供して吳れた．第二に，物理學は自然觀察の結果から，或る程度まで偏微分方程式の解を豫測させたし，また時には推論をさへ暗示して吳れた．"物理學の理論がなかつたなら，私達は偏微分方程式を知らなかつたであらう"（Poincaré）．

熱の傳導にはじまつた Fourier 級數は，汲めども盡きない諸問題への道を開いた．人はこの級數によつて，不連續函數を表はすことが出來，それによつて函數の概念は著しく擴張され，ここに純粹にして抽象的な實變數の函數論が，發展すべき素地が作られたのである．G. Cantor をして，集合論に於ける一つの基本概念の創造へと導いたのも，またこの級數の考察からであつた．

物理學から來た，Fourier その他の級數（直交函數の級數）による展開は，他方，Abel による力學の問題，Volterra による靜電氣の問題，ポテンシャル論に於ける Fredholm の研究などと相俟つて，積分方程式論の分野を拓いて吳れた．量子力學に適用される Hilbert 空間なども，積分方程式との關聯から生れたのである．‥‥

これより多くの例を加へることは，もはや無用であらう．

思へば物理學は，解析學の單なる枝葉ではなく，實にその根幹となるものを，產んで吳れたのだつた．"人間の想像がどんなに多樣であつても，自然は更にその千倍も豐富なのである"（Poincaré）．

幾　何　學

物理學と幾何學との間の交渉も，それが如何に緊密の狀態にあるかは，相對性理論と Riemann 幾何學の關聯といふ，ただの一例によつてさへ，明かに認めることが出來るだらう．

歷史は私達に告げてゐる．

射影幾何學はその源を，繪畫に於ける透視畫法に發した．（Leonardo da Vinci, Albrecht Dürer, Ubaldo del Monte）．透視畫法は，土木建築に於ける石切りの術と相俟つて，射影幾何學の基本的構成（射影と截斷）を供給して吳れた（Desargues）．そして畫法幾何學 Monge が築城術の要求から生れるに及んで，射影幾何學は學問的體系として，畫法幾何學の中から，誕生を遂げたのである（Poncelet）．

繪畫といひ，建築土木といひ，自然の模寫であり技術である點に於て，廣義の物理的なものに屬すると，見做してよいだらう．何と云つても射影幾何學は，自然を母としてゐる．かう云ふ見方からすれば，射影幾何學に於け

る相反圖形が，Maxwell の手によつて，圖式力學に適用されたのも，意味が深いと思ふ．(序に附記しておく．球を球に變ずる反轉の理論を，早くもポテンシャル論に適用して，反轉の理論の重要性を數學者に敎へたのは，實に Lord Kelvin その人であつた)．

直線幾何學卽ち直線群の系統的研究は，先づ幾何光學 (Malus) と剛體力學 (Poinsot, Möbius) から導かれた．直線を (點や平面の代りに) 空間の原素として採り得ること，そして直線空間は四次元であることを敎へた Plücker ——直線幾何學の建設者——こそは，その發見以前に，長い間實驗物理學に沒頭してゐた人だつたのである．

直線幾何學は，再び剛體力學と關聯して，力の幾何學 (Ball, Study) となり，更に微分幾何學と結んで，幾何光學を豐富にした (Kummer).

思へば幾何光學に關する Hamilton の研究こそは，驚異的のものであつた．彼の直觀は，幾何光學と力學との間に，緊密な類似性を認め，彼の名を負へる特徵函數から，力學に於ける變換の理論を導き，數學的には，後の發達にかかる，Lie の接觸變換を與へたのである．(接觸變換が Bohr の理論に利用されたのも，丁度この力學に於ける變換の點にかかつてゐる)．

もしも力學や電磁氣學がなかつたならば，どうしてヴェクトル及びテンソル解析が，——更に一般的な複素數論が——誕生し，發展し得たであらうか．四元法の創始者 Hamilton については，言ふまでもない．抽象的な "廣義量論" の著者 Grassmann その人さへも，一方では哲學的でありながら，他方では電氣學から結晶學に至るまで，理論及び實驗物理の研究者だつた．マトリックス論の父 Cayley も，明確に四元法との關係を考慮しながら，マトリックス論を建設したのである．更に n 次元幾何學の最初の觀念は，Lagrange の一般座標として，力學の中から産み出されたのであつた．

テンソル解析と共に，現代物理學の一武器となつてゐる微分幾何學は，これも自然の兒であつた．それは先づ地圖の理論 (Lagrange, Gauss)，種々の曲面の自然觀察から導かれた生成法 (Monge)，更に測地學研究の結果として，Gauss によつて見出された曲面の曲率と其の (展開的變形に對する) 不變性，並びに測地線の問題——かやうな自然の諸問題から，出發したのであつた．熱傳導の研究は，Lamé をして等溫面の理論に導き，ここに微分パラメーターが現はれた．(これこそ後に Beltrami によつて一般化され，更に Ricci 及び Levi-Civita のテンソル解析に至る先驅の第一歩であつた)．私達はまた Plateau の實驗が，極小曲面の麗はしい理論を導いたことを，忘れてはならないだらう．

非 Euclid 幾何學の成立も，その先驅として，Legendre や Gauss の測地學的研究と，必らずしも無關係ではあるまい．そして只今述べた Beltrami との交渉こそ，Riemann をして，彼の劃期的業蹟に導いたのである．"Riemann は直觀的物理的に考へる" (Klein) 人であつた．

位相幾何學が，自然を繞る諸問題から出發したことは，Euler の橋の問題や，地圖彩色の問題などが，何よりもよく示してゐる．

そ の 他

數學と物理學との交渉史は，もうこの邊で事足るかと思はれるが，念のため，なほ一二の點について附加しておかう．

群論はどうか．群の概念は，數學の日常語なので，到るところに現はれて來る．私はここにただ不連續群が，正多面體の廻轉や結晶學と，相互的に密接な關係にあること，また連續群については，既に Helmholtz が (不完全ながらも)，運動群の概念を用ひて，空間の研究を行つたことを，擧げる程度に

止めよう.（"群論の應用"については,本講座中の講述に讓りたい).

數論でさへも,格子點の幾何學的表現によつて,結晶學と關聯してゐる.

確率論や統計法は自然界といふよりも,寧ろ社會方面の問題から誕生したものではあつたが,その發達の過程に於て,しばしば自然或は廣義の物理學と,接觸して來たのである.例へば,測地學から生れた誤差論としては,最小自乘法が作られた.統計法の利用は,生物學から天文學,地球物理學にまで及んでゐる.確率論が氣體論に採用されて,遂に統計力學を産むに至つたのも,云はば當然の地位に置かれたのだとも,見られよう.

最後に,計算法の如きは,大部分は天文,物理,工業技術（及び保險）方面の要求から,多くはその方面の人々によつて,研究されたのであつた.私達は,この方面に於ける工業技術者——例へば,圖的積分法に於ける Massau, 計算圖表に於ける Lalanne, d'Ocagne——の役割を忘れてはならない.まして,計算器械の作製に關する,技術者の地位については,云ふまでもないことである.

逆に,（物理學は勿論のこと）,數學もまた技術の上に,大なる影響を及ぼす.今ここに具體的實例を述べる餘裕を持たないが,ただ一つ私は,近代的意義に於ける工業力學の建設者の一人として,射影幾何學の父 Poncelet その人の名を,擧げておきたいと思ふ.

ギリシャ時代の數學

これまで考へて來た,數學と物理學との相互關係は,實はただ,近世物理學の成立以來についてのみ,眺めてゐたのであつた.私達の課題に對する答として,それだけでは不十分だと思はれる.

私達は近世物理學の成立以前,或は近世物理學と無關係な諸國の狀態についても,一應,考へて見る必要があるだらう.

さて,數學の發達しなかつた時代には,物理學もまた發達し得なかつたのであるが,それでは逆に,物理學（及び技術）の發達しなかつた時代の數學は,如何なる形態を取つたであらうか.私達はその典型的な例として,先づアテネ時代の數學を考へよう.

アテネ時代には,哲學と論理とが,未發達な物理學と技術の代りに,數學と深い交渉を持つたのである.そこでは先づ,"行動に無關係な,眞の科學である"數論から,分離された計算術は,輕視もされ,進歩もしなかつた.また幾何學についても,"それは永遠無窮の思想の幻影として向上"させるべきものであつて,測量術に墮落してはならぬ.（直線と圓以外の曲線の助けをかりる作圖などは,"感覺の世界に引き戾すものであつて,幾何學の美を破壞するもの"(Platon) とされ,幾何學の方法としては,計算さへも嫌はれたのである.

實に度量的事項の缺如こそ,アテネ幾何學の特色であつた.（後の時代の Euclid に於てさへ,圓の面積についての定量的定理を缺いてゐる.圓周率の如きは,記載さへもないのである).自然と數學との,何といふ隔離であつたらう.

"機械學の建設に,最初苦心したのは, Eudoxus と Archytas の二數學者であつた.彼等は‥‥抽象的原理のみによつては,到底一般人に理解し得ないやうな問題を,若干の機械によつて實驗的に示したのであつた.しかるに Platon は起つて,この種の實驗機械を攻擊して述べた.それは抽象的で精神的な幾何學の原理に,粗俗な形體を與へるものであり,多大な手工を要して,下劣な商品と墮落させるものであると.それから後,機械學は幾何學と分離し,久しく哲學者に侮蔑され,遂に兵學の一部門と

なつた" (Plutarch).

かやうに物理や技術から遊離した數學は,榮養不良となつた.論理性に於て高度の優越を誇るアテネの數學も,その內容實質に於て,貧困に陷らざるを得なかつた.當時の數學者は,事實を認識はしたが,事實を創造はしなかつたのである.

ところが,ヘレニズムの時代に入ると,アレクサンドリアの商業を基礎として,工業技術は漸く進展し,科學は單なる思索から,實證的研究へと推移して來る.數學もまた,Platon 的な純粹性抽象性の代りに,實用性具體性を帶びるやうになつて來た.

勿論この時代にも,Euclid のやうな,傳統的アテネ數學の完成者が立つてはゐるが,しかし Archimedes (數學,力學,技術), Hipparchus (天文學,三角法), Heron (測量,技術), Ptolemy (天文學,三角法)等の存在は,よく時代の數學狀態を語つてゐる.今や天文學,力學,技術との關聯のもとに,新しい數學——三角法及び求積法(積分學の先驅とも見做すべき Archimedes の方法)——が,誕生したのであつた.數學は內容に於て豐富になつて來た.彼等の間から,Apollonius (圓錐曲線論)や Diophantus (算術,代數の先驅)の出現を見るのも,怪しむに足らないと思ふ.

支那の數學

第二の典型として,私達は支那の數學を採上げよう.(支那の數學は,典型的な他のアジア的諸國の數學と,ある程度まで,共通の面を持つてゐる).

支那の數學は,論理性の缺如を,その一つの特色とする.ところで一方,支那では大規模な灌漑經濟を必要とするので,治水の側から季節の天文學的決定が,農耕のために曆の決定が,國家的に必須の要件であつた.それで天文曆術が重視され,天文學者,曆算家が卽ち數學者だつたのである.

その結果として,支那では,天文曆術上の問題から,數學の問題が提供され,數學の方法の創意されたものが甚だ多い.

例へば,天文觀測と關聯した直角三角形の硏究(勾股弦)や,測量術の著しい進步,例へば劉徽の重差術(263)などを見よ.曆の計算は,階差による內挿法の發達を促がし,遂に郭守敬の授時曆(1280)となつた.ヨーロッパでは,內挿法は Wallis や Newton あたりに始まると,普通云はれてゐるのに較べて,何といふ早い時代の發達であつたらう.

數論に於ける一次不定方程式が,曆術との關聯の下に進んだのも,興味が深い.秦九韶の大衍求一術(1247)は,互除法による Gauss の一方法(1801)と全く同樣のものであり,そこに秦九韶はこれを曆術の問題に,適用したのであつた.

一口で言へば,17,18 世紀のヨーロッパ數學が,新興の力學,物理學,技術との關聯に於て進んだのを,支那の數學では,もつと舊式な天文曆術との交涉の下に,發達したのだと見るべきである.

ところで,舊式な天文曆術は,云はば靜的な不變的なものであつた.ここにも,他の事情と相俟つて,支那數學の遂に停滯的に終つた,一つの原因があると思はれる.

和算

日本の和算はどうであつたか.

德川時代に於ては,その後期に至るまで,自然科學は十分に發達し得なかつた.それで支那の數學から生長を遂げた和算は,自然科學から孤立し,遊離して進まざるを得なかつた.

一方，日本の天文暦術は，支那のものを其のまま受入れ，後にはヨーロッパのものを，そのまま移植したのである．日本では，大規模な灌漑經濟を必要としなかつた關係上，天文暦術については，和算に於けるやうな獨創的研究が行はれる地盤を缺いてゐた，と見るべきであらう．從つて，和算と天文暦術との交渉も，さほど深くはなかつたのである．

さればと云つて，日本には（アテネ時代のギリシャと異なり），論理も十分に育たなかつたし，哲學思想も和算家とは多くの交渉を持たなかつた．この事情の下に，和算は勢ひ“無用の用”として，“藝に遊ぶ”ものとして，生長したのである．

和算家は自然界にある形體を愛し，具體的な圖形を多く採用した．また計算技術の錬達は，鋭い直觀的見透しと，逞ましい歸納の力と相俟つて，和算をして，兎に角あれだけの進展を遂げさせ得たのであつた．

けれども，物理學の缺如のために，圓理のやうな解析學が，あれだけの進歩を見せながら，遂に，云はば單なる求積術として終り果てたのも，當然のことと云はねばならない．蘭學の普及した幕末に及んでさへも，和算と物理學との交渉は，大體に於て，曲線や曲面の求積と，重心の問題の程度に，止まつたのである．

以上の歴史的素描から，私達は物理學と數學との相互的關聯，特にその一面たる，數學の發達が如何に物理學に負ふところあるかを，學び得たと思はれる．

私達は，物理學との協力の下に進まない限り，數學がたとへ，どんなに論理的に優れてゐても，またどんなに藝としての發達を遂げても，それは要するに極めて偏狹であり，また内容に於ても貧困のものたるを免れ得ないことを，見たのである．

それと同時に，私達はまた，たとへ（支那數學のやうに），物理學（天文暦術）との間に緊密な交渉を持つたとしても，それが固定した物理學であつては，數學もまた遂に停滯に終ることを，學んだのであつた．

數學が，健康な，そして高度の進展を遂げるためには，最新最高の物理學との緊密な協力を，絶對に必須とする．

第二章　物理學に使用される數學

原始的數學

さて物理學が,如何に數學に負ふところあるかは,本講座の諸項目が,具體的に,何よりも雄辯に語るところである.

私は,何故に,またどんな意味で,數學が物理學に使用されるかについて反省する前に,先づここに最も平凡な事實について,注意を拂ひたい.

客觀的に眺めると,物理學者は巧に數學を使用してゐる.よくもあれだけ巧妙に數學を驅使し得た——といふよりも,寧ろ多くの數學的方法の中から,よくもあれだけ誤りないやうに,問題に應じて適當の方法を選擇し得たものだと,實は奇蹟的にも感じられる位である.

なぜ斯やうな選擇が可能であつたか.それは,數學と物理學とが,學問としての誕生以前から,原始時代からの乳兄弟であつて,本能的にお互ひに理解し合つてゐるからだと,私には思はれるのである.

試みに原始的な數學,或はその一種の模型としての兒童數學を調べて見るがよい.それは,單なる數の計算と,物々の交換や金錢や賣買のやうな,社會的な諸問題を除くと,殘りの大部分は全く,廣義の物理的な——自然的または自然科學的な,諸問題に歸着するものである.

數學的思惟の唯一の自然な對象は整數である,と云はれてゐるが,實は,實物の數を數へるといふ,物理實驗とも數學的操作とも,云ひ切れないやうな作業の中で,既に物理學と數學とは抱き合つてゐるのである.

また自然物の形狀や位置の觀察.特に剛體の平行移動や廻轉,相似などの日常經驗.容物の體積や土地の面積や物體の重さの測定.月や太陽の運

行の觀察.かやうな物理とも數學ともつかない作業の裡に,物理は數學の言葉を用ひ,數學の方法を學んで,——否,數學と區別されないで,育て上げられて來た.(だから原始時代の數學は,自ら技術的でもあつたのである).

かやうにして,例へば幾何學的素材が蒐積されたとき,遂に Euclid 幾何學が構成されても,その中に物理は潜んでゐた.現に人間は,自然の空間が即ち Euclid 空間であると,近頃まで,本能的に信じてゐたのである.

物理學と數學との間の最も基本的な相互關係,相互の理解と利用の祕密を,彼等は乳兄弟として搖籃時代に,互に本能的に學び合つた.ここに數學が物理學に使用される,原始的な——しかしながら,最も根本的な理由があると思ふ.

言葉としての數學

今日の物理學では,その概念を多くは數量化して取扱つてゐる.事實,物理學上の概念や關係を表はすのに,日常の言葉では,あまりに貧弱であり曖昧なので,どうしても特殊の言葉を必要とするのである.

ところで數學は,その學問の本質上,質的方面を捨象するので,それは物理學者の語り得る,唯一の言葉ではないかも知れぬが,それにしても,その簡單にして正確の點に於て,また主觀的な無用の夾雜物を除き去る點に於て,最も優れた言葉たる資格を,十分に持つてゐる.

實際,數學が物理學者に與へた,便利な言葉がなかつたならば,物理學上の緊密な諸關係は,發見もされなかつたであらうし,私達は自然法則の意味をさへも,明確に知ることが,出來なかつたかも知れない.

ところで或る人達は,しばしば語つて云ふ.“多くの解析的結果は,物理的直觀の單なる飜譯に過ぎないではないか.數學記號や微分方程式によら

なくとも,——例へば Faraday のやうに——何らかの物理的類推の形式で,立派に表現することが出來るだらう”と．しかし,この非難は,數學が言葉として適當に使用されたとき,それは幾分漠然として非定量的な,物理的直觀的概念の代りに[1],高度の科學性を持つ有力な武器となることを,忘れたものである．若しもこの武器をさへ持つてゐたなら,彼 Faraday は Maxwell を待たないで,電磁波の存在を認め得たかも知れぬ．

數學は決して,關係の單なる飜譯ではないのである．數學は生きてゐる．彼は,關係の數學的表現から,彼自身の途を歩み出す．圓錐屈折の現象を發見したのは,實驗ではなくて,却つて Hamilton の數學だつた．それなればこそ,同じ經驗的事實から出發しても,その數學の言葉の如何によつて,物理學の上には,種々の違つた影響を與へるのである．

Poincaré は,言葉の變更によつて,これまで推測されなかつた普遍化を果した,古典的な實例を擧げてゐる．

“Newton の法則が, Kepler の法則の代りに現はれた當時は,人はただ楕圓運動のみを知つてゐたのであつた．そしてこの運動については, Kepler と Newton の法則は,ただ形式上區別されるに過ぎない．一方から他方に達するには,單に微分すればよいのである．

ところが Newton の法則からは,直接の概括によつて,すべての攝動作用及び天體力學の全體が,演繹し得られる．これに反して,もし Kepler の言ひ表はし方を固守したならば,攪亂された遊星の軌道は,發見されなかつたであらう．そして,これ等の今まで誰れも其の方程式を書き得ない複雜な曲線が,楕圓の自然的な一般化であるとは,認められなかつたであらう．觀測の進歩は,却つて人をして混沌無秩序を信じさせたに相違ない”．

それなればこそ,數學の言葉は,最適のものが選ばれなければならないのである．“運動のエネルギー”が確定を見るまでの,歴史を回想せよ．不適當に使用された數學は,單なる言葉の遊戯に過ぎない．

ところで言葉は生き物である．それは自ら發展するものではあるが,しかし普通の言葉では,傳統に囚はれて容易に發展進化し得ない憾みがある．現に,例へば“波動”と云つた言葉になると,舊式な,常識的な觀念が,こびりついて,中々に放れにくいのである．(かう云ふ意味からだけでは,“エネルギー”とか,“エントロピー”などといふ,日常的でない言葉の方が,物理學の言葉として却つて適當なのだとも,言へるだらう)．

ところが數學の言葉になると,かやうな進化發展を平氣に行つてゐる．私達は,掛算といふ同じ言葉を,整數の掛算にも,複素數の掛算にも,テンソルの掛算にも,またマトリックスの掛算にも用ひるし,また同じ空間といふ言葉を, Euclid 空間にも, Riemann 空間にも, Hilbert 空間にも,用ひてゐる．内容に於て非常の相違あるものでも,或る特徴的な共通性を把へて,自由に,同じ言葉で呼ぶところに,數學の言葉の特色がある．

新しい物理學は,當然新しい概念と新しい武器とを要する．從つて新しい物理學は,必然的に,新しい數學の言葉を必要とするのである．

普遍化及び類推としての數學

只今私達は,法則の普遍化の一例に觸れたが,かやうな普遍化のために,數學は實に有效に働くのである．數學こそは,實質に拘束されない,純粹に形式的な,普遍の言葉であつたから．

[1] 誤解を避けるために一言しておく．私は決して物理的直觀を輕視するのではない．それどころか,物理的直觀から遊離した數學の使用であつては,物理的價値が低いと思ふのである．後述“物理學に於ける數學の三つの面”の項を見よ．

はじめ力學の中に導入された Lagrange の一般座標と，彼の名を負へる方程式が，力學の範圍を遙かに越えて，物理學の諸分野に適用されるを見よ．

遊星の運行と類似のものを，原子の內部に再現して見せるのも，數學の助けあればこそである．

互に全く異なつた思考と，それに應ずる方法とで作られた，二つの量子力學的敍述，Heisenberg のマトリックス力學と Schrödinger の波動力學とが，互に矛盾するものでないことを示したのも，また數學であつた．

實質に囚はれない形式の言葉たる數學は，また類推のためには，何よりも鋭い武器となる．

先づ二つの現象の間に數學的類似が存在するとき，これによつて，一方の現象法則から，他方の法則を推定する助けとなる．

同じ Laplace の方程式は，Newton の引力論にも，流體力學にも，電氣ポテンシャルにも，また熱の傳導にも現はれるが，これ等は互に辭書のやうに，その言葉を說明し合ふのである．Maxwell が電磁波を，實驗に先だつこと20年前に認め得たのも，電磁氣の基本方程式から，波動の式を導き得たからである．

ところで Maxwell がその研究をはじめた當時は，すべての既知の事實は，從來の電氣力學の假說によつて，說明し盡されてゐたのであつた．しかし彼はこれ等の理論を，新しい見地から眺めて，一つの項——それもこれまでの實驗方法で示される結果を生ずるにはあまりに小さい一項——を加へると，方程式が一層對稱的になることを知つた．Maxwell が“ヴェクトル風に物を考へ，‥‥數學的對稱の感情に深く透徹”(Poincaré) してゐたからこそ，彼の劃期的業績は成つたのである．

實際，對稱化とか擴張とか云ふことは，數學では寧ろ常識に屬するのである．しかも斯やうな數學の方法は，往々にして，數學がなくては到底思ひつき得ない結果を，物理學者に供給すること，丁度物理學者が，物理學なくしては思ひつき得ない問題を，數學者に提供すると，同樣である．Riemann 幾何學なしに，一般相對性理論は建設されたであらうか．

このやうに，物理學者をして，事物の間に成立つ隱れた調和を認めさせ，それを新見地から觀察させる點にこそ，數學の大なる役割がある．數學は決して物理學者のために，ただ或る常數を計算したり，また或る微分方程式の解を與へると云ふやうな，そんな輕い任務ばかりを負ふものではない筈である．

云ふまでもなく，物理學は蒐積された事實から出發し，一度び簡單な法則によつて，これ等の事實を纏めた後，更に一般的法則によつて，これ等の諸法則を綜合して進展する．そして今日，そこに用ひられる最も有力な統一の原則は，Hamilton の原理であるだらう．力學の領域にはじまつた，この變分原理は，すべての古典物理學に對して成功を見せ，それは更に相對性理論に於て，また量子力學の波動函數に於てさへも利用されてゐる．

思へば，物理學に於ける思惟の經濟と結果の集約を，最高の標準に於て實現化したものは，實に極小原理であつた．この數學の武器は，神學的並びに形而上學的要請を，物理學の中から一掃したのである．

思考の型としての數學

さて，かやうに物理學理論統一の目的のために，極小原理が採用されるとき，そこには數學的思考の或る一定の型が生れて來る．

かやうな見地からすれば，“物理學に於ける數學は，ただ自然界の關係を

表はすための言葉であり，道具に過ぎない”とか，“目的は要するに物理問題の解決にある．結局の結果が正しく得られさへすれば，どんな數學でもよいのだ”と，云ふやうな見解が，許るさるべきであらうか．かやうな通俗的見解は，少くとも，一面的な見方に過ぎないと，云はねばならない．

たとへ道具として選ばれたとしても，數學はそれ自身の途を步んで進む．道具と內容とを，簡單に分離することは，正に富山小太郎さんが述べられた通り[1]，事實容易ではあるまい．數學の考へ方も，或る意味で一種の模型である以上，使用された數學の形式は，逆に理論の性格を，或る程度まで規定するやうになるだらう[2]．

それなればこそ，新しい物理學は，何よりも先づそれに應はしい，新しい形式の數學を必要とするのである．“物理學の革命には，數學の革命が對應されなければならない”(Borel).

かやうにして，統一場理論にあつては，幾何學の一高案が，同時に物理學の一高案となつた．量子力學の中には，Hilbert 空間論や，實變數の函數論が，登場しなければならなかつたのである．

けれども，この事實から，理論物理學を數學の中に解消するかのやうな主張は，あまりにも主觀的な誇張ではあるまいかと，考へられる．

いかにも，數學を產み出す精神と，物理學理論を產み出す精神とは，同じ

---

(1) “數學·言葉·モデル”(本講座月報，第 11 號).

(2) 私はここに，數學の歷史の中から，計算の形式から理論の性格が規定された，ごく見易い一つの例を引かう．

聯立一次方程式は，ヨーロッパでは，先づ代入法によつて解かれた．加減法によつて順々に未知數を消去することは，Euler の代數にも見出し得ない．加減法がそんなにも遲れたのに，なぜ代入法が早く見出されたのか．それは筆算だからである．これに反して，古代支那では算木の計算であつたから，代入法が見出されなかつたのに，加減法は非常に早く發見された．(それは既に 263 年の書物に，完全に表現されてゐる).

ものであるだらう．時には，物理學理論としての最大なる勝利は，實に數學としての成功に懸るとも云へる．それで研究者が，數學のつもりで理論物理學を追究する態度は，主觀的には，勿論許るされる．それどころか，場合によつては，それが唯一の途でもあるのである．

だからと云つて，理論物理學が數學であるとは，客觀的には，決して云ひ得ないであらう．もし假りに，かやうな意味で，理論物理學が數學であるとしても，それでは理論物理學は，廣大なる數學の分野の，一部分に過ぎないことになる．自然こそは，限りもなく豐富なものなのに‥‥．

事實，物理學では，統一場理論がどんなに重要だからと云つて，そこに現はれた幾何學のみが，眞正な唯一の幾何學であるなどと云つた結論は，數學では決して許るし得まい．數學にあつては，Euclid 幾何學も，射影幾何學も，Riemann 幾何學も，非 Riemann 幾何學も，その他——普通の意味での測定を許るさないやうな非 Archimedes 幾何學でさへも——皆，幾何學としての存在價値を，主張し得るのである．

今日，物理學理論の轉換期に際し，新しい物理學が新しい數學を要求することは，正に Newton-Fourier 時代を想はせるものがある．Fourier は，數學者の思索の主要目的が，自然現象の探求にあると述べた．なるほど Fourier の言葉は，彼の時代にあつては，或る程度まで正當な意味を持つてゐた．けれども，幾程もない年月の後に，數學そのものは，Fourier の言葉とは寧ろ反對の方向に，進展を始めたのではなかつたか．

物理學に於ける數學の三つの面

既に述べたやうに，物理學は一般的法則によつて，多くの法則を綜合統一して進展する．從つて包括力の大きい理論が，理論としての價値高いこと

は云ふまでもないことである．しかしながら，人もし徒らに基礎理論のみを尊重して，他を輕視するなら，それは非常な偏見だと，云はなければならない．

一般的理論がどんなに進歩しても，それと並んで，特殊理論が立派に存在する權利を持つ．電磁光學が成立しても，一定の領域内で，幾何光學の占める地位は，不動なのである．

特殊理論は一般論と對立するものではない．それ等は互に提携しなければならぬ．特殊理論は，經驗範圍の擴大や，技術の進歩と相俟つて，將來それはますます數多くもなるであらうし，深化もされて行くだらう．

物理學に於ける數學も，またそれに照應して，三つの面を考へることが出來る．

第一に，問題を正しく取り上げて，その基本方程式を構成すること．

これは物理學に於ける最も本質的な課題であつて，ここには最高最新の物理理論が，最高最新の數學と協力するを要する．

第二に，基本方程式を解き，或は變形し演繹して，法則の一般的歸結を明瞭に而も見透しのつく形にまで導くこと．

古典物理學にあつては，この點で相當に成功してゐるのであらうが，しかし望ましいのは，徒らに解ける型の問題を解く——つまり飜譯する——ことではなく，從來解き得なかつた型の問題を探求し，これに對して攻擊を開始することでなければならない．かういふ意味で，まだ取殘された問題が，多々あるかと思はれる．例へば，Hooke 法則の適用出來ない彈性論に於ける，Volterra の積微分方程式 (integro-differential equation) は，應用物理學者を滿足させる形式にまで，解かれたのであらうか．

ところで，問題の性質の如何によつては，またたとへ基礎的な理論であつ

ても，鋭い物理的直觀的考察は，簡單平易な數學の助けのみで，十分に(或は近似的に)問題を解決するに足ることが，しばしばある．大切なのは，自然を理解し記述することであつて，そのためにこそ數學も必要なのである．徒らに教科書的な微分方程式を解くことが，決して‘物理する’所以ではない．物理的直觀を伴はない數學は，牛刀であり，武器として最劣等のものである[(1)]．

實際，テンソル解析を使用することなどは，誰れにも出來るのである．しかし，萬有引力の場を記述するのに，どうしてもテンソル解析を要求しなければならなかつた程の，Einstein の深刻鋭利な物理的直觀こそ，眞に偉大なのだと思ふ．

第三に，理論から數値的結果を引き出す手續としての，なるだけ簡便迅速な數學が，是非とも必要である．

それは一方，物理學で實際に檢證されるものは，主として數値關係であることを，顧みると同時に，他方，技術と關聯して，現實の世界，現實の社會と接觸するのも，多くはこの面なることを，思はなければならぬ．

ところで，この方面の數學が，今日どんなに遲れてゐるかは，云ふまでもないことであり，實に恥かしい位なのである．しかし，かやうな面を輕視することは，決して全物理學の健康な發展を，促がす所以ではないと思はれる．

---

(1) 私はここに Lord Kelvin の教授振りを回想する．或る日 Kelvin は講堂で，突然學生達に

“$\dfrac{dx}{dt}$ とはどういふ意味か”

と質問した．學生の答へは，どれもこれも，考へ得られる限り嚴密な論理的のものだつた．すると Kelvin は

“あー諸君，そんなことは Todhunter に任せたまへ．$\dfrac{dx}{dt}$ は速度ですよ”．

結　び

以上の考察から,物理學は——その物理學としての本質上——一方では數學と,他方では技術と關聯し,その綜合統一を目指して,進まねばならないと,私は考へる. これは,單なる個人的な空想ではなく,私達は既に輝ける先驅的史實を持つてゐるのである.

例へば,フランス革命時代に創設された,エコール・ポリテクニクの初期を見よ. その當時は勿論 物理學と化學とが,まだ十分に發達を遂げてゐなかつた時代であつた. ところで,この學校では,

解析學,力學,幾何學,物理學,化學

を,理論と技術とが密接な關聯にあるやうに,教授したのである(1).

それは Monge と Fourcroy の,情熱的指導の下におかれ,比較的初期の教授の中には,Lagrange, Fourier, Lacroix, Monge, Ampère などがゐた.

その結果,この學校は,一方

“異常な要求の時機に於て,軍事に關する一切の科學的技術者を供給した. すべての土木工事,城堡,造兵工廠,都市,道路,造船,鑛山の改良——一口で云へば,Napoleon の大改善の大部分は,この學校の出身者の手によつて,遂行されたのである. Napoleon はこの學校の價値を,よく知つてゐた. ——彼れは,この學校を‘黄金の卵を生む牝鷄’と呼んだ....”

と云はれるほど,技術的に成功したと同時に,他面,初期の出身者の中から,數學及び物理學の世界に,Biot, Malus, Poinsot, Poisson, Navier, Dupin,

(1) 例へば,解析學の中には,機械效果の計算なども含み,畫法幾何學の中には,土木や築城術を含んでゐた. 當時の學生 Dupin は,Monge の講義(畫法幾何學)について語つてゐる. “彼の講義は,現在まで外國産業に依頼して來たフランス國民を,獨立へと引き出さうとするための,一手段とも思はれた”.

Fresnel, Poncelet, Cauchy, Gay-Lussac, Dulong, Arago, Sadi Carnot 等を送り出した. 實に

“19 世紀の初めに於ける,すべての科學の光りは,エコール・ポリテクニクから發し,そしてヨーロッパに於ける科學的思考の進展を照したのであつた” (Klein).

第二の例として,私は Klein と Riecke による,ゲッチンゲン大學の改造を擧げたいと思ふ.

それは 1893 年頃からであり,ドイツに於ける近代的工業の勃興時代であつた. “一方,抽象的な科學的研究を高めると同時に,他方,特に新興ドイツの産業の線に沿うての發展を重視するために”, Klein の掲げた原則は,“數學,物理學,應用物理學の統一” であつた.

この目的のために,ゲッチンゲンでは,從來の

理論物理 (Voigt), 物理化學 (Nernst), 實驗物理 (Riecke), 理論天文學 (Schering, 後に Schwarzschild), 天文觀測 (W. Schur, 後に Ambronn), 數學 (Hilbert), 數學 (Klein)

に加へて,

數學 (Minkowski), 保險數學 (Bohlmann), 應用數學 (Runge), 地球物理 (Wiechert), 工業物理 (Prandtl), 應用電氣 (H. Th. Simon)

を新設したのである.

それのみでは無かつた. Klein 自身はこの根本精神を,云はば身を以て體得し,更に進んで,一切の教育機關に於ける,數學教育の改造を,精力的に企圖したのであつた.

Klein の殘した,かやうな意味での綜合統一の精神が,ひとりドイツばかりでなく,如何に廣く世界的に影響したかについては,ここに述べるまでも

ないだらう.

云ふまでもなく，現代に於ける數學，物理學，技術の進歩は，Monge の時代や，Klein の時代の比ではないのである．それは，一方に於て，ますます專門的に深化されると同時に，他方に於て，その綜合統一が一層强化される必要がある．その一方を輕視したり，互に遊離させてはならぬ．私達は旣に，アテネ時代や德川時代に於て，その悲しむべき實例を見て來たのであつた．

數學，物理學，技術の統一へ． ——これこそ今日，日本の科學が高く揭ぐべき炬火ではないのか．