二次方程式ノ幾何學的理論ニ就テ

理學博士　小倉金之助

○二次方程式ノ幾何學的理論ニ就テ

理學博士　小倉金之助

一元二次方程式（又ハ二元二次ノ同次方程式）ノ理論ヲ幾何學上ヨリ解釋スル方法ハ、其ノ種類甚ダ多クシテ、一々玆ニ列擧シ得ベカラズ。本篇ニ於テ予ハ其ノ理論ノ一端ヲ、定マレル圓又ハ球ニ關スル幾何學ニヨリテ、系統的ニ且ツ平易ニ敍述センコトヲ試ミタルニ過ギズ。

本篇ノ根本思想ハへっせ Hesse ノ論文

Zur Involution. (Crelle's Journal 第63巻1864年、又ハ全集、第515頁。以下コレヲへっせノ第一論文トシテ引用ス。)

Ein Uebertragungsprincip. (Crell's Journal 第66巻1866年、又ハ全集、第531頁。之ヲへっせノ第二論文トシテ引用ス。)

特ニくらいん Klein 教授ノ有名ナル論文

Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen (1872年。コレヲくらいんノ第一論文トシテ引用ス。)

ニ創マルモノニシテ、必ズシモ新ラシキモノニアラズ、其後

Klein, Eine Uebertragung des Pascal'schen Satzes auf Raumgeometrie Sitzungsberichte d. phys.-medicinischen Societät zur Erlangen, 1873年、又ハ Mathematische Annalen, 第22巻。コレヲくらいんノ第二論文トシテ引用ス。)

Wedekind Beiträge zur geometrischen Interpretatiou binärer Formen (Diss. Erlangen, 1875年。コレヲうぇできんどノ論文トシテ引用ス。)等ノ論文アリ、更ニ Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, Bd II, Teil I, (1891年、特ニ第606頁以下。)ニ於テ其ノ一班的記載ヲ見ル。予モ亦拙論 Some theorems concerning binary quadratic f rms and their applications to the differential geometry. (東北帝國大學理科報告、第1輯、第5卷、1916年。コレヲ小倉ノ論文トシテ引用ス。)外一篇ニ於テ此方面ノ定理ト其ノ應用トヲ與ヘタリ。

然ルニ此等ノ諸論文ノ敍述ノ方法ハ稍〻高尚ナルヲ以テ、予ハ本篇ニ於テ其ノ主ナル定理ニ新ナル初等的證明ヲ與ヘ、最モ了解シ易キ簡明ナル説明ヲ加ヘ、更ニ前掲諸論文ニ見當ラザル二三ノ性質ヲ附加セントス。而シテ初等代數學ノ一般ニ通ゼル人々ニ取リテハ、拙譯るーしぇーこんぶるーす、初等幾何學(コレヲるーしぇーこんぶるーずトシテ引用ス)及ビさーもん、圓錐曲線解析幾何學(コレヲさーもんトシテ引用ス)ノミヲ參考シテ理會シ得ラルヽ樣ニ努メタリ。從テ不變式論、函數論、射影幾何學等ニ亙ル事項アリトスルモ、努メテ斯クノ如キ知識ヲ豫想スルコトヲ避ケタリ。猶ホ單ニ本篇ノ要領ノミヲ會得セント欲スル讀者ハ、第3、7、8、12、13、19ノ諸款ヲ省略スルモ可ナリ。

第一章　定圓ヲ用フル方法

第一節　一ツノ二次方程式

1. **實數係數ヲ有スル一元二次方程式**

$$az^2+2bz+c=0$$

ヲ考ヘン。之ヲ同次式ニ化スル爲メニ、$z=\frac{x}{y}$トオケバ

$$ax^2+2bxy+cy^2=0$$

トナル。コノ左邊ノ二次三項式(二元二次式)ヲfニテ表ハス、卽チ

東京物理學校雜誌第參百號別刷
○二次方程式ノ幾何學的理論ニ就テ

$$f\equiv ax^2+2bxy+cy^2.$$

マタ與ヘラレタル二次方程式ノ根ヲz'、z''トセン。

吾人ハコヽニ極メテ普通ナル二次方程式ノ解釋ヲ述ベテ、今後ノ豫備トナサント欲ス。

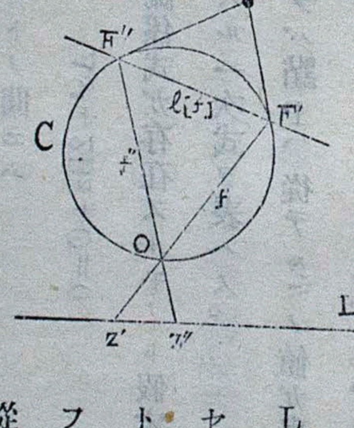
(i) 今一ツノ直線Lヲ取リ、ソノ上ノ任意ノ定マレル原點ヨリ其ノ直線上ニ於テz'、z''、ノ距離ヲ測リテ得タル點ヲz'、z''、自身ニテ表ハサン。然ルトキハ二次方程式ガ與ヘラルヽトキハ二點z'、z''ハ定マル。逆ニ、二點z'、z''ガ與ヘラルヽトキハ、二次方程式ハ定マル。由テ一ツノ定マレル直線上ノ二點ヲ以テ一ツノ二次方程式ヲ代表スルモノト見做スコトヲ得ベシ。

(ii) 或ハ直線Lヲ含ム一ツノ定マレル平面上ニ於テLノ上ニアラザル一定點Oヲ取ル。z'、z''ヲ定點Oニ結ブ一雙ノ直線ヲf'、f''トセン。然ルトキハ此二直線ヲ以テ二次方程式ヲ代表セシムルコトヲ得ベシ。

2. **直線又ハ點ニヨル表示**

次ニ定點Oヲ過ル一ツノ圓周Cヲ考ヘン、(コノ圓周ノ代リニ、Oヲ過ギル一ツノ圓錐曲線ヲ考フルモ可ナリ)。コノ圓周Cト一雙ノ直線f'、f''トノ交點F'、F''ヲ結ブ直線ヲ$l[f]$ニテ表ハシ、又コノ直線$l[f]$ノ圓Cニ關スル極ヲ$P[f]$ニテ表ハサン。

第一圖



此平面上ニ於テ直線L、點O及ビ圓Cガ固定セルモノト見做ス。然ルトキ二次方程式$f=0$ヲ與フレバ、一ツノ直線$l[f]$、從テ一ツノ點$P[f]$ガ定マル(第一圖)。逆ニ、點$P[f]$ガ與ヘラレタルトキ、コノ點ノ圓Cニ關スル極線$l[f]$ヲ作リ、コノ極線ト圓周Cトノ交點ヲOニ結ベバ一雙ノ直線f'、f''ヲ得ベク、從テ二次方程式ガ定マル。

斯クノ如ク二次方程式$f=0$ト點$P[f]$トハ一々對應ヲナスヲ以テ、點$P[f]$ヲ以テ二次方程式$f=0$ヲ代表セシムルコトヲ得。以下便利ノ爲メ、之ヲ**點ニヨル表示**ト呼バン。

又直線 $l[f]$ ヲ以テ二次方程式 $f=0$ ヲ代表セシムルモ可ナリ。之ヲ**直線ニヨル表示**ト呼フベシ。コノ思想ハくらいんノ第一論文ニ負ヘル所ナリ。

サテ $f=0$ ガ二ツノ異ル實根ヲ有スルカ、等根ヲ有スルカ又ハ虚根ヲ有スルカニ從テ、直線 f', f'' ハ實ニシテ異ルカ、一致スルカ又ハ虚トナル。從テ直線 $l[f]$ ハ二ツノ實點ニ於テ定圓Cト交ルカ、定圓Cニ切スルカ、又ハ二ツノ虚點ニ於テ定圓Cト交ル。從テ又點 $P[f]$ ハ定圓Cノ外ニアルカ、周上ニアルカ又ハ内部ニアリ。

3. へっせノ變形法

平面上ニ點 $P[f]$ ヲ與フレバ、第2款ニヨリテ二次方程式ガ定マル、從テ第1款ニヨリテ直線Lノ上ニ二點 z', z'' ガ定マル。逆ニ、直線Lノ上ニ二點 z', z'' ヲ與フレバ、平面上ニ一點 $P[f]$ ガ定マル。

即チ平面上ノ一點ト一定直線上ノ一雙ノ點トガ對應ス而カモ直線Lハ上ニ於テ相重ナル二點ハ平面上ニ於ケル對應點ハ定圓Cノ周上ニアリ。

斯クノ如ク平面上ノ一點ト直線上ノ一雙ノ點トガ對應シ得ベキコトヲ初メテ認メタルハへっせ（第二論文）ナリ。へっせ自身ノ方法ハ上述ノ方法ヨリモ複雜ナレドモ、興味ナキニアラザルヲ以テ次ニ其ノ概要ヲ示サン。

一ツノ直線Lヲ取リ、ソノ上ノ任意ノ定點ヨリ其ノ直線上ニ於テ z ノ距離ヲ測リテ得タル點ヲ z 自身ニテ表ハス。次ニ一ツノ平面Eノ上ニ直角座標軸ヲ取リ、コノ平面上ノ一點Pノ座標ヲ (x, y) ニテ表ハス。而シテコノ z ト x,y トノ間ニハ

$$Az^2+2Bz+C=0$$

ナル關係式ガ存在スルモノト假定ス、但シ A,B,C ハ x,y ニ關スル一次式ヲ表ハス。

然ラバ點P、從テ x,y ノ値ガ與ヘラル、トキハ、上ノ關係式ヨリ z ノ二ツノ値ヲ得、即チ平面E上ノ一點ハ直線L上ノ二點ニ對應ス。逆ニ、直線Lノ上ニ二點 z_1, z_2 ガ與ヘラル、トキハ

$$Az_1^2+2Bz_1+C=0,\quad Az_2^2+2Bz_2+C=0.$$

コノ二ツノ關係式ヲ x,y ニ關スル一次ノ聯立方程式ト

見做セバ、x,y ニ就テ一組ノ値ヲ得、即チ直線L上ノ二點ハ平面E上ノ一點ニ對應ス。而シテ直線L上ノ二點ガ相重ナルトキハ、ソレニ對應スル平面上ノ點ノ座標ハ

$$B^2-AC=0$$

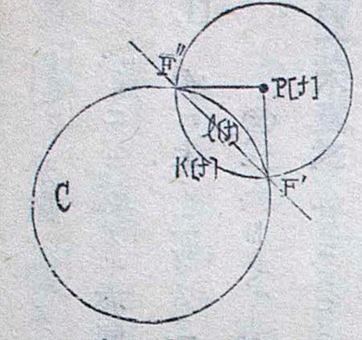
ヲ滿足ス、即チ一ツノ圓錐曲線上ニアリ。

之ニ由テ觀レバ吾人ノ方法ハへっせノ方法ノ特段ノ場
外ナラザルヲ知ル。
合コレヨリ再ビ吾人ノ方法ニ歸ラン。

4. 圓ニヨル表示

コレヨリ第2款ノ方法ヲ變化シテ次ノ如ク考ヘン。

點 $P[f]$ ヲ中心トシ定圓Cニ直交スル圓ヲ $K[f]$ ニテ表ハス。然ルトキハ二次方程式 $f=0$ ヲ與フレバ圓 $K[f]$ ガ定マリ、逆ニ圓 $K[f]$ ヲ與フレバ二次方程式ヲ式 $f=0$ ガ定マル。故ニ圓 $K[f]$ ヲ以テ二次方程式ヲ代表セシムルコトヲ得。之ヲ**圓ニヨル表示**ト呼バン。



第二圖

サテ定圓Cノ直交圓 $K[f]$ ハ二點 F', F'' ヲ過ル。由テ二次方程式 $f=0$ ガ二ツノ異ル實根ヲ有スルカ、等根ヲ有スルカ又ハ虚根ヲ有スルカニ從テ、圓 $K[f]$ ハ實在スルカ、點ニ歸スルカ又ハ實在セズ。

第二節　二ツノ二次方程式

5. 二ツノ二次方程式ノ判別式、聯立不變式、終結式

二ツノ二次方程式

$$a_1z^2+2b_1z+c_1=0,\quad a_2z^2+2b_2z+c_2=0$$

アルトキ、$z=\frac{x}{y}$ トオキテ二ツノ二元二次式

$$f_1\equiv a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2,\quad f_2\equiv a_2x^2+2b_2xy+c_2y^2$$

ヲ作ル

I. コノ二ツノ二次式ノ**判別式** discriminant ヲ夫々 $\triangle(f_1)$, $\triangle(f_2)$ トスレバ

$$\triangle(f_1)\equiv a_1c_1-b_1^2,\quad \triangle(f_2)\equiv a_2c_2-b_2^2.$$

サテ判別式 $\triangle(f_1)$ ガ零トナルコトハ、二次方程式 $f_1=0$ ガ等根ヲ有スルコトヲ意味ス。從テ直線ニヨル表示ニ從バヘハ、直コ線 $l[f_1]$ ガ定圓Cニ切スルコトヲ意味ス。

又點ニヨル表示ニ從ヘバ、コハ點 $P[f_1]$ ガ定圓Cノ周上ニアルコトヲ意味ス。更ニ圓ニヨル表示ニ從ヘバ、コハ圓 $K[f_1]$ ガ點ニ歸スルコトヲ意味ス。

$\triangle(f_2)=0$ ニ就テモ亦同樣ニシテ解釋スルコトヲ得。

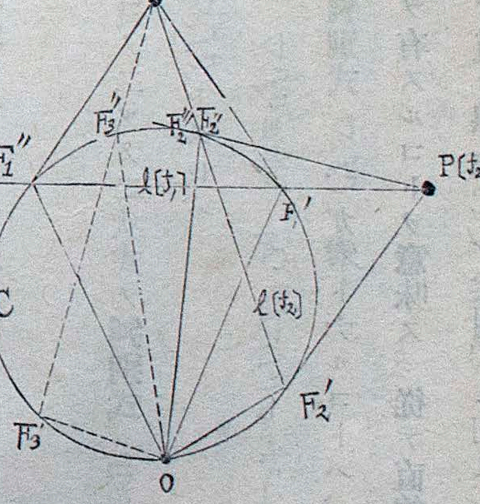
II. 次ニ上ノ二ツノ二次式ノ係數ニテ作レル式

$$Ⓗ(f_1,f_2)\equiv a_1c_2-2b_1b_2+c_1a_2$$

ヲ**聯立不變式** simultaneous invariant (**又ハ調和不變式** harmonic invariant) トイフ。コノ聯立不變式 Ⓗ(f_1,f_2) ガ零トナルコトハ、第1款ニ於ケル直線Lノ上ノ二雙ノ點 $z_1', z_1''; z_2', z_2''$ ガ調和共軛ヲナス爲メノ條件ナルコト、ヨク知ラレタル所ナリ(さーもん、第332款)。或ハ點Oヲ過ル二雙ノ直線 $f_1', f_1''; f_2', f_2''$ ガ調和束線ヲナス爲メノ條件トスルモ可ナリ。

(i) 今直線 $F_2'P[f_1]$ ガ再ビ定圓Cト交ル點ヲ F_2''' トシ、$P[f_1]$ ヲ造ル任意ノ直線ガ定圓Cト交ル點ヲ F_3', F_3'' トス。然ルトキハヨク知ラレタル定理(るーしぇーてん ぶるーす第二卷第467頁)ニヨリテ、束線 $OF_2', OF_2'''; OF_3', OF_3''$ ガ定ムル對合 involution ノ複線ハ OF_1', OF_1'' ナルヲ知ル。由テ $OF_1', OF_1'', OF_2', OF_2'''$ ハ調和束線ヲナス。然ルニ假定ニヨレバ $OF_1', OF_1'', OF_2', OF_2''$ ハ調和束線ナル故、F_2'' ト F_2''' トハ一致セザルヲ得ズ。即チ $P[f_2]$ ノ極線 $F_2'F_2''$ 或ハ $l[f_2]$ ハ $P[f_1]$ ヲ過ル、同樣ニ $P[f_1]$ ノ極線 $l[f_1]$ ハ $P[f_2]$ ヲ過ル。

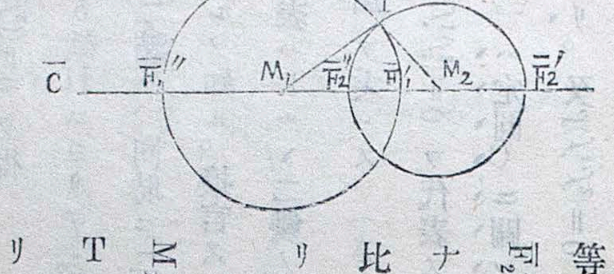
第三圖



由テ點ニヨル表示ニヨレバ、Ⓗ$(f_1,f_2)=0$ ナルトキハ $P[f_1], P[f_2]$ ハ定圓Cニ關シテ互ニ共軛ナリ、而シテ此逆モ亦眞ナリ。又直線ニヨル表示ニヨレバ、Ⓗ$(f_1,f_2)=0$ ハ $l[f_1], l[f_2]$ ガ定圓Cニ關シテ互ニ共軛ナル爲メニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ナリ。

(ii) 次ニ圓ニヨル表示ニ從ヘル解釋ヲ求ムルニハ、點Oニ關シテ全圖形ヲ反轉 invert スルヲ便トス。然ルトキハ定圓Cハ一ツノ直線 $\overline{C}$ トナリ、二圓 $K[f_1]$、$K[f_2]$ ハ $\overline{C}$ ニ直交スル二ツノ圓 $\overline{K}[f_1], \overline{K}[f_2]$ トナル、而シテ此等ノ圓ト $\overline{C}$ トノ交點 $\overline{F}_1', \overline{F}_1'', \overline{F}_2', \overline{F}_2''$ ハ調和列點ヲナス。何トナレバ圓周上ニ於ケル四點ノ複比ハ反轉ニヨリテ不變ナレバナリ。

第四圖



今二圓 $\overline{K}[f_1], \overline{K}[f_2]$ ノ中心ヲ M_1, M_2 トシ、其ノ交點ノ一ツヲTトスレバ、調和列點ノ性質ヨリ

$$\overline{M_1T}^2=\overline{M_1\overline{F}_2''}^2=M_1\overline{F}_1'\cdot M_1\overline{F}_1''$$

ナルヲ以テ、M_2T ハTニ於テ圓 $\overline{K}[f_1]$ ニ切ス、同樣ニ M_1T ハTニ於テ圓 $\overline{K}[f_2]$ ニ切ス。由テ二ツノ圓 $\overline{K}[f_1], \overline{K}[f_2]$ ハ直交ス、然ルニ角ノ大サハ反轉ニヨリテ不變ナル故、二圓 $K[f_1], K[f_2]$ モ亦直交ス。

故ニ Ⓗ$(f_1,f_2)=0$ ハ二圓 $K[f_1], K[f_2]$ ガ直交スル爲メニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ナリ。

III. 最後ニ二ツノ二次式 f_1, f_2 ノ**終結式** Resultant

$$R(f_1,f_2)\equiv4(a_1b_2-b_1a_2)(b_1c_2-c_1b_2)-(a_1c_2-c_1a_2)^2$$
$$=4\triangle(f_1)\triangle(f_2)-Ⓗ^2(f_1,f_2)$$

ガ零ナル場合ヲ考ヘン。

コノ場合ニハ直線Lノ上ニ於ケル一雙ノ點 z_1', z_1'' ノ一ツト他ノ一雙ノ點 z_2', z_2'' ノ一ツトガ一致ス。從テ直線ニヨル表示ニ於テハ、二直線 $l[f_1], l[f_2]$ ハ定圓Cノ周上ニ於テ交ル。又點ニヨル表示ニ於テハ、二點 $P[f_1], P[f_2]$ ヲ結ブ直線ハ定圓Cニ切ス。更ニ圓ニヨル表示ニ於テハ、二圓 $K[f_1], K[f_2]$ ハ定圓Cノ周上ノ一點ニ於テ相切ス。

6. やこび式

二ツノ二次式 f_1, f_2 ノ**やこび式** Jacobian トハ

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f_2}{\partial x} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix}$$

即チ

$$(a_1b_2-b_1a_2)x^2+(a_1c_2-c_1a_2)xy+(b_1c_2-c_1b_2)y^2$$

ヲ謂ヒ、之ヲ $J(f_1,f_2)$ ニテ表ハス。

サテ

$$J(f_1,f_2)=0$$

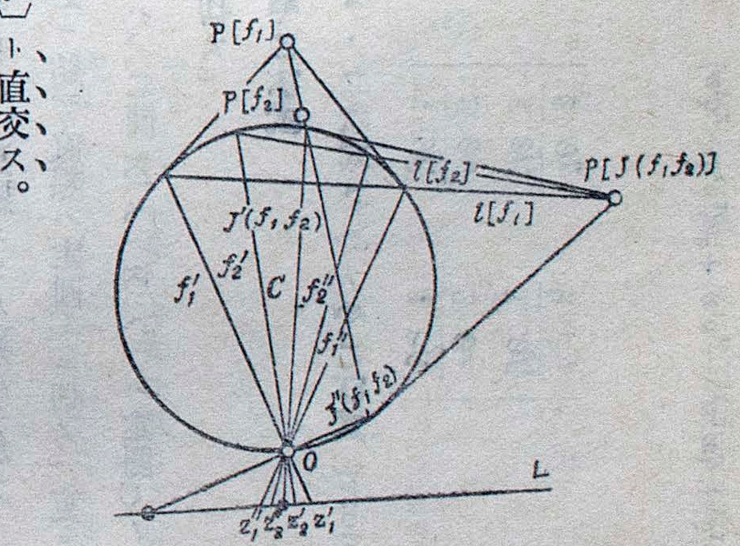
ハマタ一ツノ二次方程式ナル故、其ノ幾何學的意義ヲ解釋セントス。其レガ爲メニ f_1 ト $J(f_1,f_2)$ トノ聯立不變式 $(\mathrm{II})(f_1,J(f_1,f_2))$ ヲ作レバ、コノ聯立不變式ガ恆等的ニ零ナルコト直ニ驗證セラルベシ。同樣ニ吾人ハ恆等式

$(\mathrm{II})(f_2,J(f_1,f_2))=0$ ヲ得。

故ニ第5款IIニヨリテ $J(f_1,f_2)=0$ ガ直線Lノ上ニ於テ表ス所ノ二點ハ、同時ニ二雙ノ點 z_1', z_1'' 及ビ z_2', z_2'' ト調和共軛ナルヲ知ル。換言スレバ、$J(f_1,f_2)=0$ ハ $f_1=0, f_2=0$ ニヨリテ表ハサルヽ二雙ノ點ニヨリテ定メラルヽ對合ノ複點(焦點)ヲ表ハス。(さーもん、第342款。)

由テ $J(f_1,f_2)=0$ ヲ代表スル點ヲ $P[J(f_1,f_2)]$ トスレバ、$P[J(f_1,f_2)]$ ハ定圓Cニ關シテ同時ニ二點 $P[f_1], P[f_2]$ ノ共軛點ナリ。又 $J(f_1,f_2)=0$ ノ表ス直線ヲ $l[J(f_1,f_2)]$ トスレバ、コノ直線ハ同時ニ二直線 $l[f_1], l[f_2]$ ニ共軛ナリ。從テ $P[J(f_1,f_2)]$ ハ $P[f_1]$ ト $P[f_2]$ トヲ結ブ直線ノ極ニシテ、又二點 $P[f_1]$ ト $P[f_2]$ トヲ結ブ直線ハ $l[J(f_1,f_2)]$ ニ外ナラズ。

第五圖



更ニ $J(f_1,f_2)=0$ ヲ代表スル圓ヲ $K(J(f_1,f_2))$ トスレバ、此圓ハ同時ニ二圓 $K[f_1], K[f_2]$ ト直交ス。

7. 重複やこび式

吾人ハ前款ニ於テやこび式 $J(f_1,f_2)$ ヲ表ハス點 $P[J(f_1,f_2)]$ ガ $P[f_1]$ ト $P[f_2]$ トヲ結ブ直線ノ定圓Cニ關スル極ナルコトヲ見タリ。故ニ $P[f_1]$ ノ極線ハ $P[J(f_1,f_2)]$ ヲ過ギリ、$P[J(f_1,f_2)]$ ノ極線ハ $P[f_1]$ ヲ過ギル。

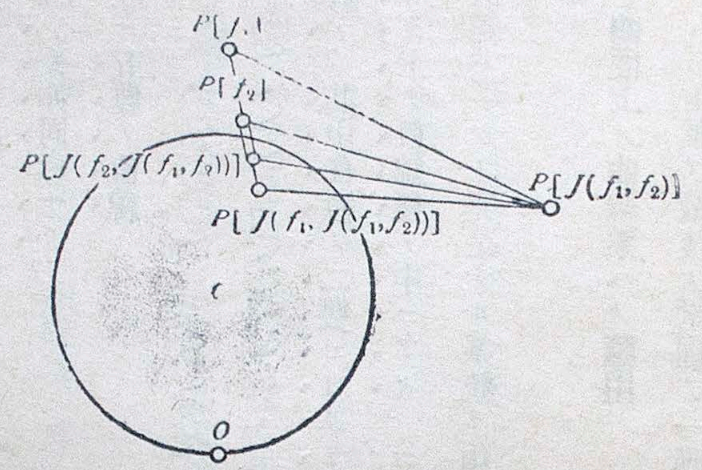
由テ更ニ f_1 ト $J(f_1,f_2)$ トノやこび式 $J(f_1,J(f_1,f_2))$ ヲ表ス

東京物理學校雜誌第參百號別刷

○二次方程式ノ幾何學的理論ニ就テ

所ノ點 $P[J(f_1,J(f_1,f_2))]$ ハ $P[f_1]$ ト $P[J(f_1,f_2)]$ トヲ結ブ直線ノ極ナリ。故ニ $P[f_1]$ ト $P[J(f_1,f_2)]$ トノ極線ハ共ニ $P[J(f_1,J(f_1,f_2))]$ ヲ過ギル。然ルニ $P[f_1]$ ノ極線ハマタ點 $P[J(f_1,f_2)]$ ヲ過ギル故、$P[f_1]$ ノ極線ハ二點 $P[J(f_1,f_2)]$ ト $P[J(f_1,J(f_1,f_2))]$ トヲ結ブ直線ニ外ナラズ。マタ $P[J(f_1,f_2)]$ ノ極線ハ $P[f_1]$ ヲモ過ギル故、$P[J(f_1,f_2)]$ ノ極線ハ $P[f_1]$ ト $P[J(f_1,J(f_1,f_2))]$ トヲ結ブ直線ニ外ナラズ。

第六圖



即チ三點 $P[f_1], P[J(f_1,f_2)], P[J(f_1,J(f_1,f_2))]$ ヲ頂點トスル三角形ハ定圓Cニ關シテ自共軛ナリ。

同樣ニ三點 $P[f_2], P[J(f_1,f_2)], P[J(f_2,J(f_1,f_2))]$ ヲ頂點トスル三角形モ定圓Cニ關シテ自共軛ナリ。

故ニ若シ更ニ $J(f_1,f_2)$ ト $J(f_1,J(f_1,f_2))$ トノやこび式 $J(J(f_1,f_2), J(f_1,J(f_1,f_2)))$ ヲ作レバ、ソレヲ表ス所ノ點 $P[J(J(f_1,f_2), J(f_1,J(f_1,f_2)))]$ ハ $P[J(f_1,f_2)]$ ト $P[J(f_1,J(f_1,f_2))]$ トヲ結ブ直線ノ極ナルヲ以テ、$P[f_1]$ ニ一致セザルヲ得ズ。以下順次斯クノ如ク、f_1, f_2 ト其ノやこび式トヲ如何樣ニ組ミ合セテ新ナルやこび式ヲ作ルトモ、ソレヲ表ハス所ノ點ハ、上ノ五點即チ

$$P[f_1],\quad P[f_2],\quad P[J(f_1,f_2)],$$
$$P[J(f_1,J(f_1,f_2))],\quad P[J(f_2,J(f_1,f_2))]$$

ノ孰レカニ一致ス。

換言スレバ、f_1, f_2 ト其ノやこび式トヲ如何樣ニ組ミ合セテ新ナルやこび式ヲ作ルトモ、ソノ結果ハ次ノ五ツノ二次式

$$f_1,\ f_2,\ J(f_1,f_2),\ J(f_1,J(f_1,f_2)),\ J(f_2,J(f_1,f_2))$$

ノ孰レカニ一致ス、(尚ホ嚴密ニ言ヘバ、ソレ等ノ二次式ニ或ル常數ヲ乘ジタルモノニ外ナラズ)。

此定理ノ代數的證明ニ就テハ小倉ノ論文ヲ見ヨ。近頃林教授ハ簡單ナル幾何學的別證明ヲ得ラレタリ。

上ノ結果ハ之ヲ次ノ如ク述ブルコトヲ得。一點Oヲ過ギル三雙ノ直線

$$f_1, f_1''; \; J'(f_1,f_2), J''(f_1,f_2); \; J'(f_1,J(f_1,f_2)), J''(f_1,J(f_1,f_2))$$

ハ任意ノ一雙ハ、他ノ二雙ニヨリテ定メラル、對合ノ複線ナリ。而シテ他ノ三雙ノ直線

$$f_2, f_2''; \; J'(f_1,f_2), J''(f_1,f_2); \; J'(f_2,J(f_1,f_2)), J''(f_2,J(f_1,f_2))$$

ニ就テモ亦同樣ナリ。

故ニ五雙ノ直線

$$f_1, f_1''; f_2', f_2''; \; J'(f_1,f_2), J''(f_1,f_2); \; J'(f_1,J(f_1,f_2)); J''(f_1,J(f_1,f_2)), J'(f_2,J(f_1,f_2)), J''(f_2,J(f_1,f_2))$$

ニ於テ、其中任意ノ二雙ニヨリテ定メラル、對合ノ複線ハマタ上ノ直線雙ノ中ニアリ。コノ意味ニ於テコノ五雙ノ直線ハ一ツノ完全ナル系統ヲ作ル。

8. 曲面上ノ曲線系ヘノ應用

コヽニ前款ノ最後ノ定理ノ一應用ヲ示サントス。

曲面ノ上ニ一ツノ曲線系アリ、其ノ曲面上ノ任意ノ一點ヲ過リ此曲線系ニ屬スル二箇ノ曲線ガ存在スルトキハ、コノ系ハ $2\infty^1$ 箇ノ曲線ヨリ成ルト稱ス。

從來微分幾何學ニ於テハ此種ノ曲線系ガ最モ多ク取扱ハレタリ。例ヘバ極小曲線 minimal lines, 漸近曲線 asymptotic lines, 曲率曲線 lines of curvature, 捩率曲線 lines of torsion, 特徴曲線 characteristic lines 等ノ如シ。

サテ曲面上ノ任意ノ一點ヲOトシ、ソノ點ニ於ケル切平面上ニ於テOヲ過ギル曲線ノ方向（卽チ切線）ヲ考ヘン。然ラバ $2\infty^1$ 箇ノ曲線ヨリ成レル一ツノ曲線系ニ就テハ、上述ノ方向ハ二ツアル故、ソノ二ツノ切線ガ二次方程式ニヨリテ表サル、コト第1款(ii)ニ於ケルガ如シ。

今若シ二次方程式

$$f_1=0, \quad f_2=0$$

ヲ以テ夫々極小曲線及ビ漸近曲線ノ方向ヲ表スモノトスレバ、

$$J(f_1,f_2)=0$$

ハ曲率曲線ノ方向ヲ表ハシ、

$$J(f_1,J(f_1,f_2))=0$$

ハ捩率曲線ノ方向ヲ表ハシ、

$$J(f_2,J(f_1,f_2))=0$$

ハ特徴曲線ノ方向ヲ表ハスコトヲ證明シ得ベシ。

故ニ前款ノ最後ノ結果ヲ適用スレバ、次ノ定理ニ到達ス。

五ツノ曲線系

極小曲線、漸近曲線、曲率曲線、
捩率曲線、特徴曲線

ニ於テ、ソノ中任意ノ二系ノ方向ニヨリテ定メラル、對合ノ複線ハ、マタ上ノ或ル一ツノ曲線系ノ方向ヲ示ス。卽チ此意味ニ於テ上ノ五ツノ曲線系ハ一ツノ完全ナル系統ヲ作ル。

コノ定理ハ曲面上ノ曲線系ヲ系統的ニ研究スル上ニ於テ注意スベキ性質ノモノナリ。猶ホ上ノ事項ノ詳細ナル證明及ビ之ヨリ得ラルベキ推論ニ就テハ、小倉ノ論文ヲ參照セラルベシ。

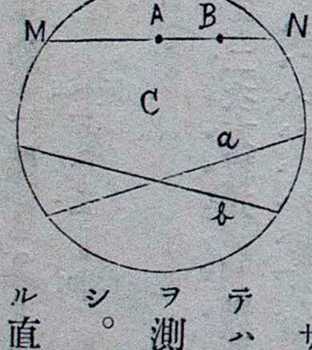
9. 直線ニヨル表示トろばちぇふすきー平面幾何學

二次方程式ノ幾何學的理論ヲ簡潔ナル形ニ述ベント欲セバ、ろばちぇふすきー幾何學 Hyperbolic geometry ハ考察ヲ導入スルヲ便トス。

先ヅ直線ニヨル表示ニ於テ、けーれー Cayley 特ニくらいんノ風ニ從ヘル非ゆーくりっど幾何學ノ思想ヲ誘導センニ、定圓Cヲ非ゆーくりっど平面ニ於ケル絕對圓錐曲線ト見做スベシ。而シテ其ノ圓ノ內部ノ圖形ノミヲ取リテ考ヘ、外部ノ圖形ヲバ全然取ラザルモノトス。（るーしぇーてんぶるーす、第二卷、第 803 頁及ビ本誌第 228 號ニ於ケル中川教授ノ論文參照）。

然ルトキハ二次方程式 $f=0$ ヲ代表スベキ直線 $l(f)$ ハ、其ノ方程式ノ根ガ實ナル場合ニ限リ實在スルコト明カナリ（第2款）。

第七圖



サテ此非ゆーくりっど平面ニ於テハ、二點間ノ距離及ビ角ノ大サヲ測ルニ射影的測定法ヲ用フベシ。換言スレバ、二點A,Bヲ過ギル直線ガ定圓Cト交ル點ヲM,Nトスレバ、四點ノ複比(ABMN)ノ對數ニ或ル常數ヲ乘ジ

タルモノ卽チ

$$\frac{k}{2}\log(ABMN)$$

ヲ**二點 A,B 間ノ距離**ト稱ス。又一點ヲ過ギル二ツノ直線 a,b ノ交點ヨリ定圓C ニ引ケル二ツノ虛切線ヲ m,n トスレバ、四直線ノ複比 $(abmn)$ ノ對數ニ $\frac{1}{2\sqrt{-1}}$ ヲ乘ジタモノ卽チ

$$\frac{1}{2i}\log(abmn)$$

ヲ**二直線 a,b ノナス角ノ大サ**ト稱ス。

斯クノ如キ測定法ニ從ヘバ、定圓Cノ內部ノ點ハ有限距離ニアル點ニシテ、定圓Cノ周上ニ於テ交ル二ツノ直線ハ互ニ平行トナル。

又二ツノ直線ガ定圓Cニ關シテ共軛ナルトキハ、コノ二ツノ直線ハ直角ニ交ル。何トナレバ、さーもん第661頁ニ於テ二直線ノ夾ム角ノ大サハ

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Pi+\sqrt{(\Pi^2-\Sigma\Sigma')}}{\Pi-\sqrt{(\Pi^2-\Sigma\Sigma')}}$$

ナルヲ知リ、又二直線ガ共軛ナル爲メノ條件（さーもん第455頁）ハ

$$\Pi=0$$

ナルヲ知ル。然ルニ $e^{\pi i}=-1$ ナル故 $\log(-1)=\pi i$. 從テ

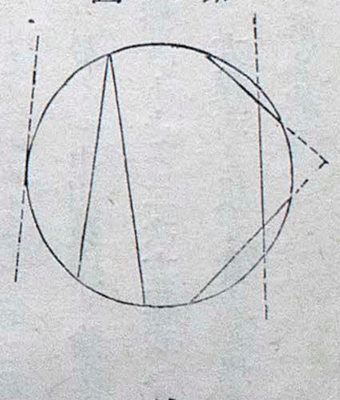
$$\frac{1}{2i}\log(-1)=\frac{\pi}{2}$$

ナレバナリ。

由テ二次方程式ノ判別式ガ零トナルコトハ、直線ガ無窮遠ニアルコトヲ意味ス、（第5款I）。

二ツノ二次方程式ノ終結式ガ零トナルコトハ、二ツノ直線ガ平行スルコトヲ意味ス、（第5款II）。

第八圖



二ツノ二次方程式ノ聯立不變式ガ零トナルコトハ、二ツノ直線ガ直交スルコトヲ意味ス。（第5款II）。

二ツノ二次方程式ノやこび式ヲ零ト置キタル二次方程式ハ二ツノ直線ノ共通垂線ヲ表ハス、（第6款）。

斯クノ如クろばちぇふすきー平面幾何學ノ思想ヲ利用スレバ、二次方程式ノ性質（二元二次式ノ不變式論的性

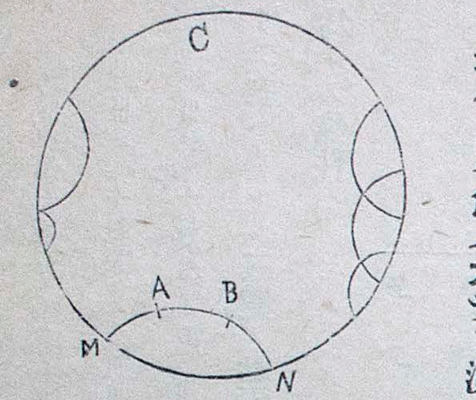
質）ガ極メテ簡明ニ表サル、ヲ見ルベシ。

10. **圓ニヨル表示トろばちぇふすきー平面幾何學**

次ニ圓ニヨル表示ニ非ゆーくりっど幾何學ヲ適用セント欲セバ、ぽあんかれ Poincaré, くらいん、うぇるすたいん Wellstein 等ノ思想ヲ導入スレバ可ナリ、（るーしぇーてんぶるーす、第二卷第794頁）。

卽チ定圓Cヲろばちぇふすきー平面ノ絕對圓ト見做シ、コレニ直交スル圓周ノ定圓Cノ內部ニアル部分ノ弧ヲ**直線**ト考フベシ。

第九圖



コノ場合ニハ**角ノ大サ**ヲ測ルニハ普通ノ意味ノモノヲ以テスベキモ、二點間ノ距離ヲ測ルニハ次ノ方法ニヨラザルベカラズ。卽チ二點 A,B ヲ過ギリテ定圓Cニ直交スル圓周C′ヲ畫キ、ソノ圓C′ト定圓Cトノ交點ヲ M,N トスレバ、圓周C′上ノ四點 A,B,M,N ノ複比ノ對數ニ或ル常數ヲ乘ジタルモノヲ以テ、**二點 A,B 間ノ距離**ト呼バン。

然ルトキハ二次方程式ガ二ツノ異レル實根ヲ有スルカ、等根ヲ有スルカニ從テ、ソノ代表タル直線（普通ノ意味ニ於ケル圓弧）ハ有限ノ距離ニアルカ、無窮遠ニアリ、而シテ其他ノ場合ニハ直線ハ虛トナル、（第4款參照）。

從テ二次方程式ノ判別式ガ零トナルコトハ、直線ガ無窮遠ニアルコトヲ意味ス。

二ツノ二次方程式ノ終結式ガ零トナルコトハ、二ツノ直線ガ平行ナルコトヲ意味ス。

二ツノ二次方程式ノ聯立不變式ガ零トナルコトハ、二ツノ直線ガ直交スルコトヲ意味ス。

二ツノ二次方程式ノやこび式ヲ零ト置キタル二次方程式ハ、二ツノ直線ノ共通垂線ナリ。

11. **對合**

第三節　三ツノ二次方程式

直線Lノ上ニ三ツノ二次方程式

$$f_1 \equiv a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2=0,$$

$$f_2 \equiv a_2x^2+2b_2xy+c_2y^2=0,$$

$$f_3 \equiv a_3x^2+2b_3xy+c_3y^2=0$$

ニヨリテ表ハサル、三雙ノ點 $z_1', z_1''; z_2', z_2''; z_3', z_3''$ ガ對合ヲナス爲メノ條件ハ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

ナリ、(さーもん、第342款脚註)。

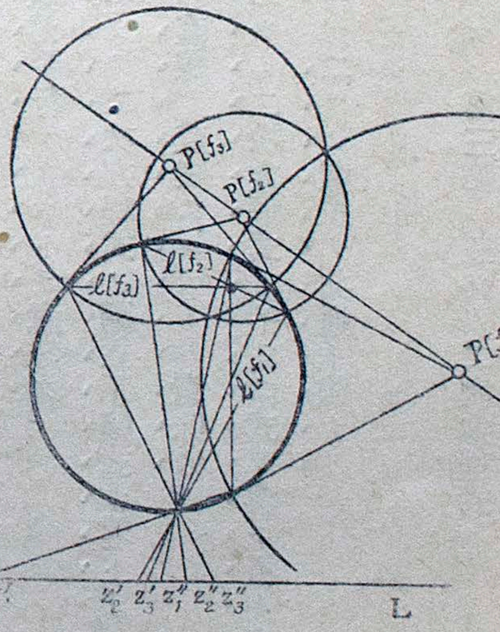
從ツテコノ場合ニハ與ヘラレタル三ツノ二次式 f_1, f_2, f_3 ハ相互ニ獨立ニハアラズシテ、其ノ間ニハ**線狀關係** linear dependence ガ存在ス、即チ

$$\lambda f_1+\mu f_2+\nu f_3=0$$

ナル關係式ガ成立セザルベカラズ、コヽニ λ, μ, ν ハ x, y ニ無關係ナル常數ヲ表ハス。而シテ此逆モ亦眞ナリ。

然ルニ此場合ニハ○ヲ過ギル三雙ノ直線 $f_1'f_1''; f_2'f_2''; f_3'f_3''$ モ亦對合ヲナスベク、從テ良ク知ラレタル一定理ニヨリテ三ツノ直線 $l[f_1], l[f_2], l[f_3]$ ハ同一ノ點ニ於テ交ル(るーしぇーてんぶるーす第二卷、第467頁)。從テ此等ノ三直線ノ各々ノ極ナル三ツノ點 $P[f_1], P[f_2], P[f_3]$ ハ同一ノ直線上ニアリ。而シテ此證明法ハ之ヲ逆ニ遂行シ得ルヲ以テ、ソノ逆モマタ眞ナリ。

第十圖



故ニ三ツノ二次式 f_1, f_2, f_3 ヲ表ハス三ツノ點 $P[f_1], P[f_2], P[f_3]$ ガ同一直線上ニアル爲メニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ、ソノ三ツノ二次式ガ線狀關係ヲ有スルコトナリ。

次ニ上ノ場合ニ於テハ三ツノ圓 $K[f_1], K[f_2], K[f_3]$

ハ同一ノ直線上ニ中心 $P[f_1], P[f_2], P[f_3]$ ヲ有シ、且ツ同一ノ圓Cニ直交スルヲ以テ、一ツノ圓束(共軸圓)ヲ作ル。コレヨリ次ノ結果ヲ得。

三ツノ二次式 f_1, f_2, f_3 ヲ表ハス三ツノ圓 $K[f_1], K[f_2], K[f_3]$ ガ共軸ナル爲メニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ、ソノ三ツノ二次式ガ線狀關係ヲ有スルコトナリ。

12　對合ニ關スルへっせノ定理

直線Lノ上ニ六ツノ點 $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$ ヲ取ル。z_1, z_2 ヲ根トスル二次方程式ヲ

$$a_1z^2+2b_1z+c_1=0$$

トシ、z_4, z_5 ヲ根トスル二次方程式ヲ

$$a_2z^2+2b_2z+c_2=0$$

トスレバ、z_1, z_2, z_4, z_5 ニヨリテ定メラルル對合ノ複點ハ

$$(a_1b_2-b_1a_2)z^2+(a_1c_2-c_1a_2)z+(b_1c_2-c_1b_2)=0$$

ニヨリテ與ヘラル。然ルニ

$$z_1+z_2=-\frac{2b_1}{a_1}, \quad z_1z_2=\frac{c_1}{a_1};$$

$$z_4+z_5=-\frac{2b_2}{a_2}, \quad z_4z_5=\frac{c_2}{a_2}$$

ナルヲ以テ、上ノ方程式ハ

$$\{(z_1+z_2)-(z_4+z_5)\}z^2-2(z_1z_2-z_4z_5)z$$
$$+z_1z_2(z_4+z_5)-z_4z_5(z_1+z_2)=0$$

トナル、コノ左邊ヲ J(36) ニテ表ハサン。

然ルトキハ同様ニシテ $z_2, z_3; z_5, z_6$ ニヨリテ定メラル對合ノ複點ハ

$$J(14)\equiv\{(z_2+z_3)-(z_5+z_6)\}z^2-2(z_2z_3-z_5z_6)z$$
$$+z_2z_3(z_5+z_6)-z_5z_6(z_2+z_3)=0$$

ニヨリテ與ヘラレ、又 $z_3, z_4; z_6, z_1$ ニヨリテ定メラルル對合ノ複點ハ

$$J(25)\equiv\{(z_3+z_4)-(z_6+z_1)\}z^2-2(z_3z_4-z_6z_1)z$$
$$+z_3z_4(z_6+z_1)-z_6z_1(z_3+z_4)=0$$

ニヨリテ與ヘラル。

コレヨリ吾人ハ

$$\lambda J(36)+\mu J(14)+\nu J(25)=0$$

ヲ滿足スル常數 λ, μ, ν ノ存在スルコトヲ證明セントス。

ソレガ爲メニハ

$$\lambda\{(z_1+z_2)-(z_4+z_5)\}+\mu\{(z_2+z_3)-(z_5+z_6)\}$$

$$+\nu\{(z_3+z_4)-(z_6+z_1)\}=0,$$

$$\lambda(z_1z_2-z_4z_5)+\mu(z_2z_3-z_5z_6)+\nu(z_3z_4-z_6z_1)=0,$$

$$\lambda\{z_1z_2(z_4+z_5)-z_4z_5(z_1+z_2)\}+\mu\{z_2z_3(z_5+z_6)-z_5z_6(z_2+z_3)\}$$
$$+\nu\{z_3z_4(z_6+z_1)-z_6z_1(z_3+z_4)\}=0$$

ナル様ナル常數λ,μ,νノ存在スルコトヲ證明スレバ可ナリ。

今

$$\phi(36)\equiv\{(z_1+z_2)-(z_4+z_5)\}\alpha\beta-(z_1z_2-z_4z_5)(\alpha+\beta)$$
$$+z_1z_2(z_4+z_5)-z_4z_5(z_1+z_2),$$

$$\phi(14)\equiv\{(z_2+z_3)-(z_5+z_6)\}\alpha\beta-(z_2z_3-z_5z_6)(\alpha+\beta)$$
$$+z_2z_3(z_5+z_6)-z_5z_6(z_2+z_3),$$

$$\phi(25)\equiv\{(z_3+z_4)-(z_6+z_1)\}\alpha\beta-(z_3z_4-z_6z_1)(\alpha+\beta)$$
$$+z_3z_4(z_6+z_1)-z_6z_1(z_3+z_4)$$

トオケバ、簡單ナル計算ニヨリテ

$$(\alpha-\beta)\phi(36)=(\alpha-z_1)(\alpha-z_2)(\beta-z_4)(\beta-z_5)$$
$$-(\alpha-z_4)(\alpha-z_5)(\beta-z_1)(\beta-z_2),$$

$$(\alpha-\beta)\phi(14)=(\alpha-z_2)(\alpha-z_3)(\beta-z_5)(\beta-z_6)$$
$$-(\alpha-z_5)(\alpha-z_6)(\beta-z_2)(\beta-z_3),$$

$$(\alpha-\beta)\phi(25)=(\alpha-z_3)(\alpha-z_4)(\beta-z_6)(\beta-z_1)$$
$$-(\alpha-z_6)(\alpha-z_1)(\beta-z_3)(\beta-z_4)$$

ナルヲ知ル。

然ルニ恆等式

$$(\alpha-z_3)(\beta-z_6)[(\alpha-z_1)(\alpha-z_2)(\beta-z_4)(\beta-z_5)$$
$$-(\alpha-z_4)(\alpha-z_5)(\beta-z_1)(\beta-z_2)]$$
$$-(\alpha-z_1)(\beta-z_4)[(\alpha-z_2)(\alpha-z_3)(\beta-z_5)(\beta-z_6)$$
$$-(\alpha-z_5)(\alpha-z_6)(\beta-z_2)(\beta-z_3)]$$
$$+(\alpha-z_5)(\beta-z_2)[(\alpha-z_3)(\alpha-z_4)(\beta-z_6)(\beta-z_1)$$
$$-(\alpha-z_6)(\alpha-z_1)(\beta-z_3)(\beta-z_4)]=0$$

ノ成立スルコトハ一見シテ明カナリ、即チ

$$(\alpha-z_3)(\beta-z_6)(\alpha-\beta)\phi(36)-(\alpha-z_1)(\beta-z_4)(\alpha-\beta)\phi(14)$$
$$+(\alpha-z_5)(\beta-z_2)(\alpha-\beta)\phi(25)=0,$$

從テ

$$(\alpha-z_3)(\beta-z_6)\phi(36)-(\alpha-z_1)(\beta-z_4)\phi(14)$$
$$+(\alpha-z_5)(\beta-z_2)\phi(25)=0$$

ヲ得。

故ニ今同時ニ

東京物理學校雜誌第參百號別刷

○二次方程式ノ幾何學的理論ニ就テ

$$\phi(36)=0,\quad \phi(14)=0$$

ヲ滿足スルα,βノ値ノ一組ヲα_0,β_0トスレバ、一般ニ$\alpha_0\neq z_5$, $\beta_0\neq z_2$ナル故、$\alpha=\alpha_0$, $\beta=\beta_0$ハ

$$\phi(25)=0$$

ヲ滿足ス。即チ$\alpha\beta$, $\alpha+\beta$ヲ未知數ト見做セバ、之ニ就テ二元一次ナル三ツノ方程式

$$\phi(36)=0,\quad \phi(14)=0,\quad \phi(25)=0$$

ガ聯立ス、從テ其ノ係數ノ間ニ線狀關係式

$$\lambda\{(z_1+z_2)-(z_4+z_5)\}+\mu\{(z_2+z_3)-(z_5+z_6)\}$$
$$+\nu\{(z_3+z_4)-(z_6+z_1)\}=0,$$

$$\lambda(z_1z_2-z_4z_5)+\mu(z_2z_3-z_5z_6)+\nu(z_3z_4-z_6z_1)=0,$$

$$\lambda\{z_1z_2(z_4+z_5)-z_4z_5(z_1+z_2)\}$$
$$+\mu\{z_2z_3(z_5+z_6)-z_5z_6(z_2+z_3)\}$$
$$+\nu\{z_3z_4(z_6+z_1)-z_6z_1(z_3+z_4)\}=0$$

ガ成立ス、コヽニλ,μ,νハα,βニ無關係ナル常數ナリ。

從テ

$$\lambda J(36)+\mu J(14)+\nu J(25)=0.$$

コノ結果ヲ第11款ニ適用スレバ次ノ**へっせノ定理**（へっせノ第一論文）ヲ得。

一直線上ニアル六ツノ點ヲ1, 2, 3, 4, 5, 6ニテ表ハス、然ルトキハ夫々

(1,2; 4,5),　(2,3; 5,6),　(3,4; 6,1)

ニヨリテ定メラルル三ツノ對合ノ三雙ノ複點ハマタ一ツノ對合ヲナス。

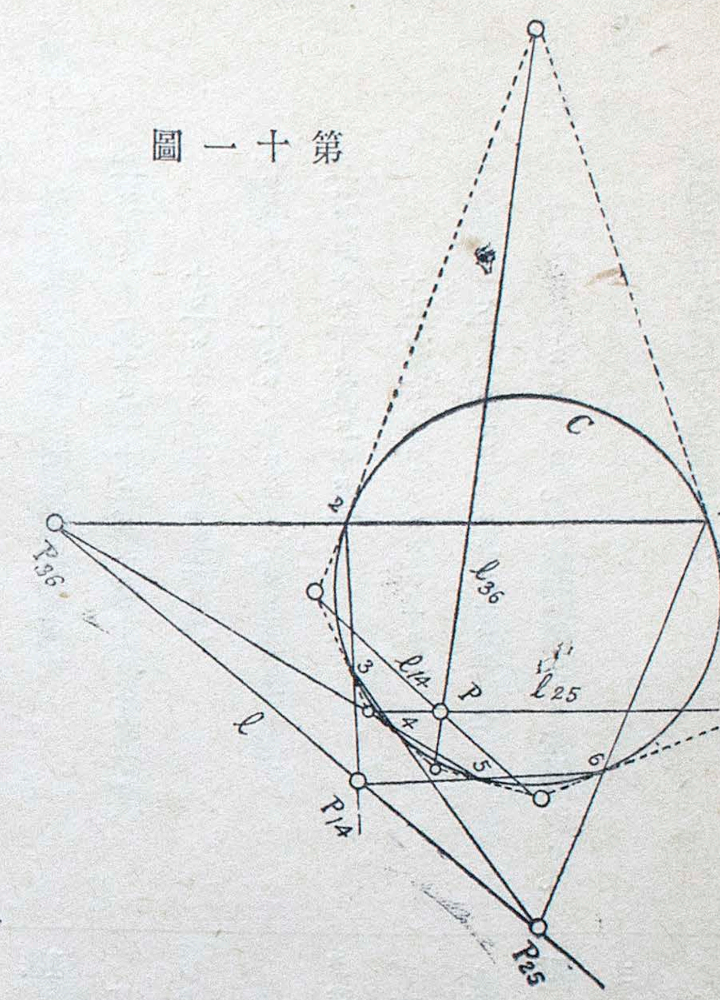
13. ぱすかるノ定理

I. サテ直線ニヨル表示ニ於テ、平面上ニ定圓Cヲ取レバ、z_1z_2ヲ根トスル二次方程式ハ、コノ圓周上ノ二點（之ヲ1, 2ニテ表ハサン）ヲ結ブ直線12ヲ表ハス。マタz_4z_5ヲ根トスル二次方程式ハ、此圓周上ノ二點4, 5ヲ結ブ直線45ヲ表ハス。而シテz_1z_2; z_4z_5ニヨリテ定メラルル對合ノ複點ヲ定ムル二次方程式ハ、二直線12, 45ノ交點（之ヲP_{36}ニテ表ハス）ノ極線（之ヲl_{36}ニテ表ハス）ニヨリテ表ハサル（第6款）。

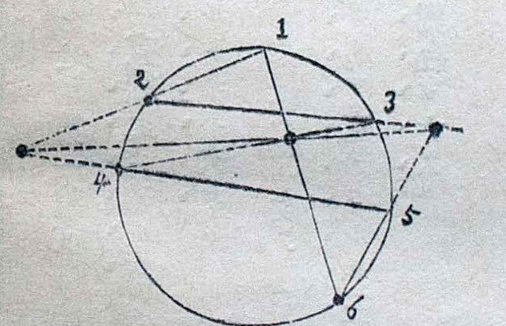
今定圓周Cノ上ニ六ツノ點1,2,3,4,5,6ヲ取リテ、上ノ如ク直線l_{36}, l_{14}, l_{25}及ビ點P_{36}, P_{14}, P_{25}ヲ作ル。然ルニ前款

ニ於ケルへっせノ定理ニヨレバ、コレ等ノ直線(又ハ點)ニ對應スル三ツノ二次式ハ線狀關係ヲ有ス。由テ第11款ニヨリテ三ツノ點 P_{36}, P_{14}, P_{25} ハ同一ノ直線(之ヲ l ニテ表ハス)ノ上ニアルコトヲ知ル。コレ即チ圓ニ內接スル六邊形 123456 ニ關スル**ぱすかる** Pascal **ノ定理**ニ外ナラズ。即チへっせノ定理ノ點ニヨル表示ニヨリテぱすかるノ定理ヲ得タリ。

第十一圖



第十二圖



II. マタ l_{36}, l_{14}, l_{25} ハ夫々 P_{36}, P_{14}, P_{25} ノ極線ナルガ故、三ツノ直線 l_{36}, l_{14}, l_{25} ハ同一點(之ヲPニテ表ハス)ニ於テ交ル。由テPハ l ノ極ナリ。マタ P_{36} ハ l_{36} ノ極ニシテ、P ハ l_{36} ノ上ニアリ、P_{36} ハ l ノ上ニアル故、l_{36} ト l トハ共軛ナリ、同様ニ l_{14}, l_{25} モ亦夫々 l ト共軛ナリ。

故ニ圓ニ內接スル六邊形123456ノ對邊ニ同時ニ共軛ナル三ツノ直線 l_{36}, l_{14}, l_{25} ハ同時ニ第四ノ直線 l ニ共軛ナリ、(くらいん第二論文)。

今コノ圓ヲ絕對圓ト見做シ、非ゆーくりっど幾何學ニ從テコノ定理ヲ解釋スレバ、次ノ定理ヲ得、

(くらいん第二論文)。

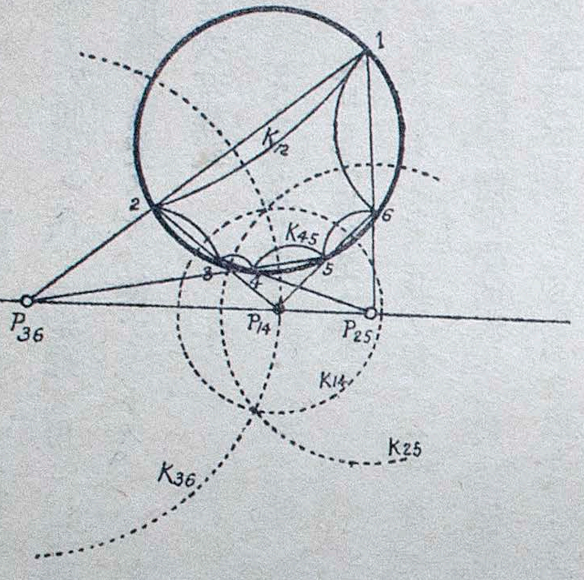
絕對圓ニ內接スル六邊形ノ對邊ノ三ツノ共通垂線ハ、一ツノ垂線ヲ共有ス。

III. 次ニ直線 12, 45 ノ極ヲ P_{12}, P_{45} トスレバ、l_{36} ハ P_{12}, P_{45} ヲ過ギル(第6款)。同様ニ l_{14} ハ P_{23}, P_{56} ヲ過ギリ、l_{25} ハ P_{34}, P_{61} ヲ過ギル。故ニ l_{36}, l_{14}, l_{25} ガ一點Pニ於テ交ルコトハ、圓Cニ外接スル六邊形 $P_{12}P_{23}P_{34}P_{45}P_{56}P_{61}$ ニ關スル**ぶりあんしょん** Brianchon **ノ定理**ニ外ナラズ。

IV. 若シ更ニへっせノ定理ニ圓ニヨル表示ヲ適用スレバ、次ノ結果ニ到達スルコト明カナリ(第11款)。

一ツノ圓Cニ直交スル六ツノ圓弧 K_{12}, K_{23}, K_{34}, K_{45}, K_{56}, K_{61} ニヨリテ內接圓弧六邊形ヲ作ル、然ルトキハ相對スル二邊ト圓Cトニ直交スル三ツノ圓 K_{36}, K_{14}, K_{25} ハ共軸圓ナリ。

第十三圖



コノ結果ハ六ツノ圓 K_{12}, …, K_{61} ガ圓Cニ直交セザル場合ニモ猶ホ成立ス。今コノ一般ノ場合ヲ直接ニ證明セント欲セバ次ノ如クスレバ可ナリ。

K_{36} ハC及ビ K_{12} ト直交スル故、K_{36} ノ中心ハC, K_{12} ノ根軸ノ上ニアリ。同様ニ K_{36} ノ中心ハC, K_{45} ノ根軸ノ上ニアリ。故ニ K_{36} ノ中心ハ P_{36} ニ外ナラズ。同様ニ K_{14}, K_{25} ノ中心ハ夫々 P_{14}, P_{25} ナリ。然ルニぱすかるノ定理ニヨリテ此等ノ三ツノ圓ノ中心ハ同一直線上ニアリ、而シテ此等ノ圓ハ同ジ圓Cト直交ス。由テ三ツノ圓 K_{36}, K_{14}, K_{25} ハ共軸圓ナリ。

コノ結果ハ拙論 On Euclidean image of non-Euclidean geometry(東京數學物理學會紀事、第二輯第六卷、1911年)ニ於テ得タル所ナリ。

第二章　定球ヲ用フル方法

第一節　一ツノ二次方程式

14. **直線又ハ圓ニヨル表示、判別式**

第1款ノ方法ニヨレバ二次方程式ガ虛係數ヲ有スル場合ニハ、之ヲ表ハスコトヲ得ザルノ不便ヲ有ス。又直線Lノ上ニ於テハ、實係數ノ二次方程式ト雖モ、虛根ヲ有

スル場合ニハ之ヲ實點ニテ表ハスヲ得ズ。コレ等ノ不便ヲ除ク爲メニハ、直線Lノ代リニ平面ヲ用フルヲ可トス。從テ定圓Cノ代リニ定球ヲ用ヒ、平面圖形ノ代リニ空間圖形ヲ論究スルヲ便ナリトス。

サテ二次方程式

$$ax^2+2bx+c=0$$

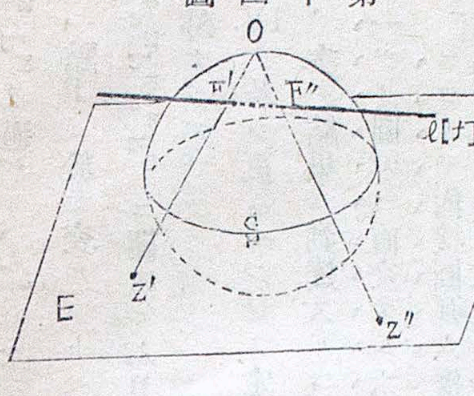
又ハ

$$f\equiv ax^2+2bxy+cy^2=0$$

ガ與ヘラレタルトキ、其ノ根ヲ x', x''、又ハ $\frac{x'}{y'}, \frac{x''}{y''}$ トス。

而シテ複素數ノ幾何學的表示ニ於テ通例用フル如ク、**がうすノ平面** Gaussian plane Eヲ取リ、ソノ上ニ根 z', z'' ヲ二ツノ點トシテ表ハシ、コノ點ヲ z', z'' 自身ニテ表ハサン。

第十四圖



次ニ一ツノ定マレル球面Sヲ取リ、ソノ上ノ一定點Oヲ中心トシテ、平面Eノ上ノ點 z', z'' ヲ球面Sノ上ニ射影スレバ、二ツノ點F′, F″ヲ得。吾人ハ最モ簡單ノ爲メニ、平面Eヲ球面Sニ**描射影** stereographical projection ヲナスモノトセン、(るーしぇーとんぶるーす、第2巻第329頁)。

(i) コノ二點F′, F″ヲ結ブ直線ヲ $l(f)$ ニテ表ハス。然ルトキハ與ヘラレタル二次方程式ノ如何ニ係ハラズ、直線 $l(f)$ ハ常ニ一ツ實在ス。逆ニ、球面Sト交ル一ツノ直線ヲ與フレバ、二次方程式ハ一定ス。故ニ直線 $l(f)$ ヲ以テ二次方程式 $f=0$ ヲ代表セシムルコトヲ得。コレヲ二次方程式ノ**直線ニヨル表示**ト呼バン、コレくらいんノ第二論文ニ負ヘル所ナリ。

(ii) 或ハ次ノ如クスルモ可ナリ。即チF′, F″ニ於テ此定球Sト直交スル圓 $K(f)$ ハ常ニ一ツ實在ス。コノ圓 $K(f)$ ヲ以テ二次方程式ヲ代表セシムルコトヲ得ベシ。コレヲ**圓ニヨル表示**ト呼バン。

然ルトキハ二次式 f ノ判別式

$$\Delta(f)\equiv ac-b^2$$

ガ零トナレバ、直線 $l(f)$ ハ定球Sニ切シ、圓 $K(f)$ ハ定球面Sノ上ノ一點ニ歸スベシ。

東京物理學校雜誌第參百號別刷

○二次方程式ノ幾何學的理論ニ就テ

第二節　二ツノ二次方程式

15. 聯立不變式　直線ニヨル表示

コレヨリ二ツノ二次式

$$f_1\equiv a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2,\qquad f_2\equiv a_2x^2+2b_2xy+c_2y^2$$

ノ聯立不變式

$$\mathrm{II}(f_1, f_2)\equiv a_1c_2-2b_1b_2+c_1a_2$$

ガ零トナル場合ヲ吟味セン。

先ヅ與ヘラレタル二ツノ二次方程式 $f_1=0, f_2=0$ ノ根ヲ夫々 $z_1', z_1''; z_2', z_2''$ トスレバ

$$z_1'+z_1''=-\frac{2b_1}{a_1},\quad z_1'z_1''=\frac{c_1}{a_1},$$

$$z_2'+z_2''=-\frac{2b_2}{a_2},\quad z_2'z_2''=\frac{c_2}{a_2}$$

ナルヲ以テ、$\mathrm{II}(f_1, f_2)=0$ ハ次ノ如ク書クコトヲ得。

$$(z_1'+z_1'')(z_2'+z_2'')=2(z_1'z_1''+z_2'z_2'').$$

コレヨリ

$$\frac{z_2'-z_1'}{z_2''-z_1'}=-\frac{z_2'-z_1''}{z_2''-z_1''},$$

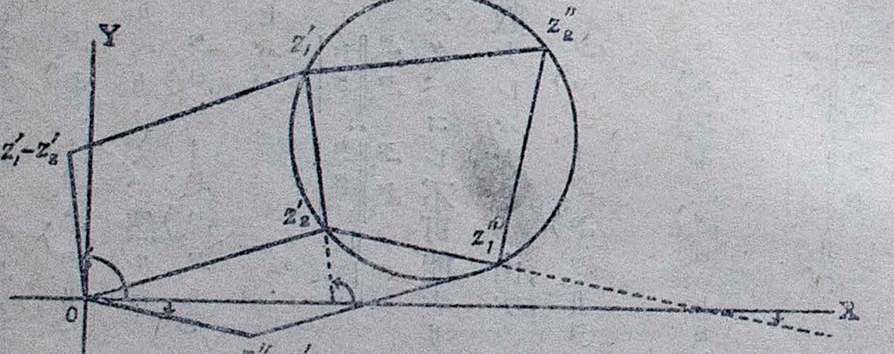
即チ

$$\frac{z_1'-z_2'}{z_1'-z_2''}:\frac{z_1''-z_2'}{z_1''-z_2''}=-1.$$

コノ左邊ノ式ヲがうすノ平面Eノ上ニ於ケル**四點** z_1', z_1'', z_2', z_2'' **ノ複比**ト稱ス、(めーびうす Möbius, 1853年)。而シテ複比ガ -1 ニ等シキトキハ、ソノ四點ヲ**調和**ナリトイフ。

故ニ二ツノ方程式ノ聯立不變式ガ零トナルコトハ、ソノ方程式ニヨリテ表ハサル、がうす平面上ノ二雙ノ點ガ調和ナルコトヲ意味ス。

第十五圖



サテ平面Eノ上ニテ $z_1'-z_2'$ ヲ表ス點ハ、座標X, Yノ原點Oト z_1'、z_2' ヲ三ツノ頂點トセル平行四邊形ノ第四ノ頂點ナリ。今 z_2' ヨリ z_1' ニ至ル距離ヲ $\overline{z_1'z_2'}$ ニテ表ハシ、其ノ線分トX軸ノ正ノ方向トノナ

ス角ヲ $\widehat{z_1z_2}$、ニテ表ハストキハ

$$z_1'-z_2'=\overline{z_1'z_2'}(\cos\widehat{z_1'z_2'}+i\sin\widehat{z_1'z_2'}).$$

同樣ニ

$$z_1''-z_2'=\overline{z_1''z_2'}(\cos\widehat{z_1''z_2'}+i\sin\widehat{z_1''z_2'}).$$

由テ

$$\frac{z_1'-z_2'}{z_1''-z_2'}=\frac{\overline{z_1'z_2'}}{\overline{z_1''z_2'}}\{\cos(\widehat{z_1'z_2'}-\widehat{z_1''z_2'})+i\sin(\widehat{z_1'z_2'}-\widehat{z_1''z_2'})\}$$

$$=\frac{\overline{z_1'z_2'}}{\overline{z_1''z_2'}}(\cos\widehat{z_1''z_2'z_1'}+i\sin\widehat{z_1''z_2'z_1'}).$$

同樣ニ

$$\frac{z_1'-z_2''}{z_1''-z_2''}=\frac{\overline{z_1'z_2''}}{\overline{z_1''z_2''}}(\cos\widehat{z_1''z_2''z_1'}+i\sin\widehat{z_1''z_2''z_1'}).$$

故ニ

$$\frac{z_1'-z_2'}{z_1''-z_2'}:\frac{z_1'-z_2''}{z_1''-z_2''}=\frac{\overline{z_1'z_2'}}{\overline{z_1''z_2'}}:\frac{\overline{z_1'z_2''}}{\overline{z_1''z_2''}}$$

$$\cdot\{\cos(\widehat{z_1''z_2'z_1'}-\widehat{z_1''z_2''z_1'})+i\sin(\widehat{z_1''z_2'z_1'}-\widehat{z_1''z_2''z_1'})\}.$$

然ルニ聯立不變式ガ零ナル爲メニハ

$$\frac{z_1'-z_2'}{z_1''-z_2'}:\frac{z_1'-z_2''}{z_1''-z_2''}=-1$$

ナルヲ要ス、從テ

$$\sin(\widehat{z_1''z_2'z_1'}-\widehat{z_1''z_2''z_1'})=0$$

卽チ

$$\widehat{z_1''z_2'z_1'}-\widehat{z_1''z_2''z_1'}=0 \quad 又ハ \quad =\pi$$

ナラザルベカラズ、然ルニ

$$\widehat{z_1''z_2'z_1'}-\widehat{z_1''z_2''z_1'}=0$$

ナリトセバ、

$$\frac{\overline{z_1'z_2'}}{\overline{z_1''z_2'}}:\frac{\overline{z_1'z_2''}}{\overline{z_1''z_2''}}=-1$$

トナルベク、コレ不可能ナリ。何トナレバ線分 $\overline{z_1'z_2'}$ 等ハ皆正數ナレバナリ。由テ

$$\widehat{z_1''z_2'z_1'}-\widehat{z_1''z_2''z_1'}=\pi,$$

或ハ

$$\widehat{z_1''z_2'z_1'}+\widehat{z_1'z_2''z_1''}=\pi. \qquad (I)$$

從テ

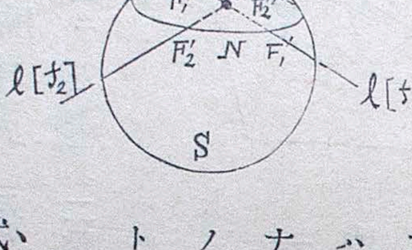
$$\frac{\overline{z_1'z_2'}}{\overline{z_1''z_2'}}:\frac{\overline{z_1'z_2''}}{\overline{z_1''z_2''}}=1. \qquad (II)$$

(I)ヨリ四ツノ點 z_1',z_1'',z_2',z_2'' ガ同一圓周Mノ上ニアルコトヲ知ル。而シテ圓周上ノ四點ノ複比ハ此等ノ點ヲ頂點トスル四邊形ノ相對スル邊ノ積ノ比ニ等シ(るーしぇ～てんぶるーす、演習問題355)。故ニ(II)ヨリ次ノ結果ヲ得。

四點 z_1',z_1'',z_2',z_2'' ハ圓周Mノ上ニ於テ調和列點ヲナス(めーびうす)。

次ニ直線ニヨル表示ニ移ラン、がうすノ平面Eヲ球面Sニ描射影スレバ、圓Mハ球面Sノ上ノ圓Nニ變ズ。然ルニ z_1',z_1'',z_2',z_2'' ハ圓周Mノ上ニ於テ調和列點ヲナス故、其等ノ點ノ射影 F_1',F_1'',F_2',F_2'' ハ圓周Nノ上ニ於テ調和列點ヲナス。故ニ第5款IIノ論法ヲ其ノ儘適用スレバ、$l[f_1]$ ト $l[f_2]$ トハ圓Nニ關シテ共軛ナリ。

第十六圖



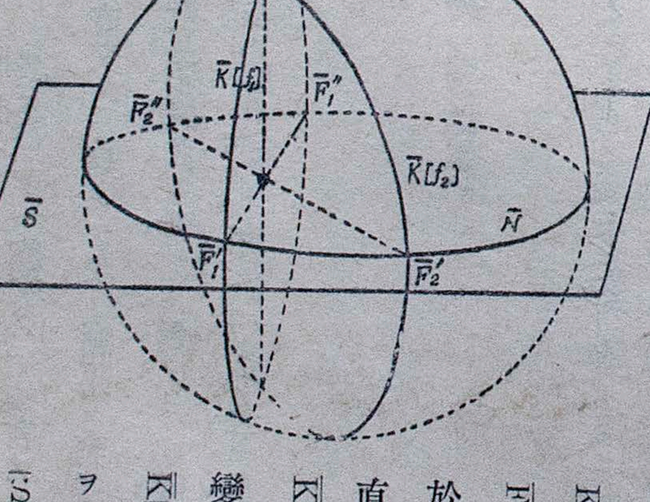
換言スレバ二次式ノ聯立不變式ガ零トナルコトハ、二直線 $l[f_1]$ ト $l[f_2]$ トガ相交リ、且ツ其ノ二直線ノ定ムル平面上ノ圓Nニ關シテ互ニ共軛ナルコトヲ意味ス。

16. 聯立不變式(圓ニヨル表示)

コレヨリ圓ニヨル表示ニヨリテ $\Pi(f_1f_2)=0$ ヲ解釋セン。

平面E上ノ圖形ヲ球面Sニ描射影スレバ、F_1',F_1'',F_2',F_2'' ハ圓周Nノ上ニ於テ調和列點ヲナス。今 F_1',F_1'' ニ於テ球面Sニ直交スル圓ヲ $K[f_1]$ トシ、F_2',F_2'' ニ於テSニ直交スル圓ヲ $K[f_2]$ トス。然ルトキ球面Sノ上ノ一點ヲ中心トシテ反轉スレバ、球面Sハ一ツノ平面 $\bar{S}$ トナリ、圓Nハ $\bar{S}$ 上ノ圓 $\bar{N}$ トナリ、F_1',F_1'',F_2',F_2'' ハ圓周 $\bar{N}$ ノ上ニ於ケル調和列點 $\bar{F}_1',\bar{F}_1'',\bar{F}_2',\bar{F}_2''$ トナル。

第十七圖

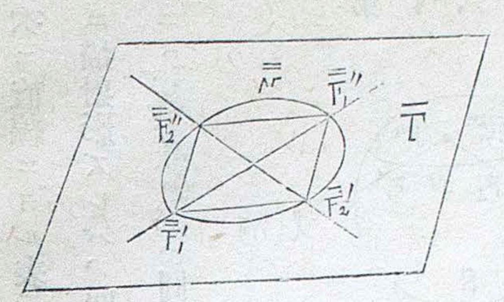


然ルニ $K[f_1]$, $K[f_2]$ ハ夫々 $\bar{F}_1',\bar{F}_1'',\bar{F}_2',\bar{F}_2''$ ニ於テ平面 $\bar{S}$ ニ直交スル圓 $\bar{K}[f_1]$, $\bar{K}[f_2]$ ニ變ズルヲ以テ、$\bar{K}[f_1]$ ハ $\bar{F}_1',\bar{F}_1''$ ヲ直徑トシ平面 $\bar{S}$ ニ垂直ナル平面 $\bar{S}_1$ ト圓 $\bar{S}$ ヲ大圓トシテ其ノ上ニ立ツ球面Tトノ交リナリ。同樣ニ

$\bar{K}(f_2)$ハ$\bar{\bar{F}}_2'\bar{\bar{F}}_2''$ヲ直徑トシ平面$\bar{S}$ニ垂直ナル平面$\bar{S}_2$ト球面$\bar{T}$トノ交リナリ。シカルニ直線$\bar{\bar{F}}_1'\bar{\bar{F}}_1''$ト$\bar{\bar{F}}_2'\bar{\bar{F}}_2''$トハ相交ル故、$\bar{S}_1$ト$\bar{S}_2$、從テ$\bar{K}(f_1)$ト$\bar{K}(f_2)$トハ相交ル。コノ二圓ノ交點ヲ$\bar{T}$トセン。

次ニ$\bar{T}$ヲ中心トシテ此圖形ヲ反轉スレバ、球面$\bar{T}$ハ一ツノ平面$\bar{T}$トナリ、$\bar{N}$ハ$\bar{T}$ノ上ノ一圓周$\bar{\bar{N}}$トナル。又$\bar{K}(f_1)$ハ$\bar{\bar{F}}_1'\bar{\bar{F}}_2''$ニ於テ$\bar{N}$ト直交シ且ツ$\bar{T}$ヲ過ギル故、$\bar{K}(f_1)$ハ二點$\bar{\bar{F}}_1', \bar{\bar{F}}_1''$ニ於テ$\bar{\bar{N}}$ト直交スル直線$\bar{\bar{K}}(f_1)$トナル。同樣ニ$\bar{K}(f_2)$ハ二點$\bar{\bar{F}}_2', \bar{\bar{F}}_2''$ニ於テ$\bar{\bar{N}}$ト直交スル直線$\bar{\bar{K}}(f_2)$トナル。

(第十八圖)



サテ$\bar{\bar{F}}_1', \bar{\bar{F}}_1'', \bar{\bar{F}}_2', \bar{\bar{F}}_2''$ハ圓周$\bar{\bar{N}}$ノ上ニ於テ調和ナル故、$\bar{\bar{F}}_1', \bar{\bar{F}}_1'', \bar{\bar{F}}_2', \bar{\bar{F}}_2''$ハ圓周$\bar{\bar{N}}$ノ上ニ於テ調和ナリ、由テ

$$\frac{\bar{\bar{F}}_1'\bar{\bar{F}}_2'}{\bar{\bar{F}}_1''\bar{\bar{F}}_2'}:\frac{\bar{\bar{F}}_1'\bar{\bar{F}}_2''}{\bar{\bar{F}}_1''\bar{\bar{F}}_2''}=1.$$

シカルニ$\bar{\bar{F}}_1'\bar{\bar{F}}_1'', \bar{\bar{F}}_2'\bar{\bar{F}}_2''$ハ圓$\bar{\bar{N}}$ノ直徑ナル故

故ニ

$$\bar{\bar{F}}_1'\bar{\bar{F}}_2'=\bar{\bar{F}}_1''\bar{\bar{F}}_2'', \quad \bar{\bar{F}}_1'\bar{\bar{F}}_2''=\bar{\bar{F}}_2'\bar{\bar{F}}_1''.$$

由テ$\bar{\bar{F}}_1'\bar{\bar{F}}_1''$ト$\bar{\bar{F}}_2'\bar{\bar{F}}_2''$トハ直交ス。換言スレバ$\bar{\bar{K}}(f_1)$ト$\bar{\bar{K}}(f_2)$トハ直交ス。斯クテ次ノ結果ニ到達ス。

f_1, f_2ノ聯立不變式ガ零ナル爲メニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ、$K(f_1)$ト$K(f_2)$トガ互ニ直角ニ交ルコトナリ。

17. 終結式、やこび式

終結式

$$R(f_1, f_2)\equiv 4\triangle(f_1)\triangle(f_2)-\textcircled{H}^2(f_1, f_2)$$

ガ零トナレバ、二直線$l(f_1), l(f_2)$ハ定球面Sノ上ノ一點ニ於テ交リ、又二圓$K(f_1), K(f_2)$ハ定球面Sノ上ノ一點ニ於テ相切ス。マタ

$$\textcircled{H}(f_1, J(f_1, f_2))=0, \quad \textcircled{H}(f_2, J(f_1, f_2))=0$$

ナル故、やこび式$J(f_1, f_2)=0$ニヨリテ表サルル直線ヲ$l[J(f_1, f_2)]$トスレバ、$l[J(f_1, f_2)]$ハ$l(f_1)$ト相交リ且ツ共軛ナリ。又$l[J(f_1, f_2)]$ハ$l(f_2)$ト相交リ且ツ共軛ナリ

(第15款)。

又$J(f_1, f_2)=0$ニヨリテ表サルル圓ヲ$K[J(f_1, f_2)]$トスレバ、$K[J(f_1, f_2)]$ハ同時ニ$K(f_1)$及ビ$K(f_2)$ト直交ス(第16款)。

18. ろばちぇふすきー空間幾何學

I. 吾人ハ第9款ト同樣ニ、直線ニヨル表示ニ於テろばちぇふすきー幾何學ノ考察ヲ導入セン。(るーしぇーてんぶるーす、第二卷第803頁)。

定球Sヲ**絕對球**ト見做シ、ソノ内部ノ圖形ノミヲ考ヘン。而シテ距離及ビ角ノ大サヲ測ルニハ射影的測定法ヲ用フベシ。即チ二點A, Bヲ過ギル直線ガ定球Sト交ル點ヲM, Nトスレバ、四點ノ複比(ABMN)ノ對數ニ或ル常數ヲ乘ジタルモノヲ**二點A, B間ノ距離**トイフ。

又相交ル二平面ノナス角ノ大サハ、其ノ平面ノ交リヲ過ギリテ定球Sニ二ツノ(虛ナル)切平面ヲ引キ、コノ四平面ノナス複比ノ對數ニ$\frac{1}{2\sqrt{-1}}$ヲ乘ジタルモノヲ云フ。

又相交ル二直線ノナス角ノ大サハ、ソノ二直線ニヨリテ定メラルル平面ト定球Sトノ交リナル圓ニ、二直線ノ交點ヲ過ギル二ツノ虛切線ヲ引キ、ソノ二直線ト切線トガナス複比ニ$\frac{1}{2\sqrt{-1}}$ヲ乘ジタルモノヲ云フ。

然ルトキハ第9款ト同樣ニシテ次ノ結果ヲ得。

二次方程式ノ判別式ガ零トナルコトハ、直線ガ無窮遠ニアルコトヲ意味ス。

二ツノ二次方程式ノ終結式ガ零トナルコトハ、二ツノ直線ガ平行ナルコトヲ意味ス。

二ツノ二次方程式ノ聯立不變式ガ零トナルコトハ、二ツノ直線ガ直角ニ相交ルコトヲ意味ス。

二ツノ二次式ノやこび式ヲ零ト置キタル二次方程式ハ、二ツノ直線ヲ同樣ニ直角ニ截ル直線ヲ表ハス。

II. 次ニ第10款ト同樣ニ、圓ニヨル表示ニ於テろばちぇふすきー幾何學ノ考察ヲ導入セン。(るーしぇーてんぶるーす、第二卷第794頁)。

定球Sヲ**絕對球**ト見做シ、其ノ球ニ直交スル圓周ノ球Sノ内部ニアル部分ノ弧ヲ**直線**ト見做スベシ。

コノ場合ニ**角ノ大サ**ヲ測ルニハ普通ノ意味ノモノヲ以

テスベキモ、二點間ノ距離ヲ測ルニハ次ノ方法ニヨラザルベカラズ。卽チ二點 A, B ヲ過ギリテ定球 S ニ直交スル圓周ヲ畫キ、ソノ圓周ト定球 S トノ交點ヲ M, N トスレバ、ソノ圓周上ノ四點 A, B, M, N ノ複比ノ對數ニ或ル常數ヲ乘ジタルモノヲ以テ、**二點 A, B 間ノ距離**トバン。

然ルトキハ二次方程式ノ性質ニ關シテ、I ノ場合ト全ク同一ノ結果ヲ得ベシ。

第三節　三ツノ二次方程式

19. **ぱすかるノ定理ノ擴張**

二ツノ二次式ノ聯立不變式ガ零トナルコトハ、ろばちぇふすきー平面幾何學ニ於テハ二直線ガ直角ニ交ルコトヲ意味シ、ろばちぇふすきー空間幾何學ニ於テモ亦二直線ガ直角ニ交ルコトヲ意味ス。

然ルニ第13款 II ニヨレバ、ろばちぇふすきー平面ニ於テハ、絕對圓ニ內接スル六邊形ノ對邊ノ三ツノ共通垂線ハ、一ツノ垂線ヲ共有ス。コノ定理ハ全ク之ヲ數個ノ二次方程式ト其等ノ中ノ或ルニツヅヽノ間ノ聯立不變式ヲ零トオケル關係式トニヨリテ、解析的ニ表ハシ得ベキ性質ノモノナリ。由テ若シ此等ノ二次方程式ト關係式トヲろばちぇふすきー空間幾何學ノ語ニテ說述スレバ、次ノ結果ヲ得ルコト明カナリ。

絕對球ニ內接スル六邊形ノ對邊ノ共通垂線ハ、一ツノ垂線ヲ共有ス。（くらいん第二論文）。

コノ定理ハ普通ノゆーくりっど空間幾何學ニ於ケル、直線ニヨル表示又ハ圓ニヨル表示ヲ用ヒテ述ブルコトヲ得ベシ。コハ讀者ノ演習ニ讓ラン。

最後ノ注意

I.　第3款ノ思想ヲ發展セシメ、又ハ他ノ方面ヨリ觀察シ且ツ之ヲ擴張セルモノニ就テハ、へっせノ第二論文ノ外

Burnside and Panton, Theory of equations, 第二版 (1899年)、第411頁以下。(其ノ大要ハさーもん、卷末ノ注意第三ノ終ニアリ)。

Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, Bd. I, Teil I, (2. Lieferung, 1910年)、第534頁以下。

Fr. Meyer, Apolarität und rationale Curven (1888年) ヲ見ヨ。

II.　第2款及ビ第4款ニ於テ、點 $P[f]$ ト直線 $l[f]$ トハ圓 C ニ關シテ互ニ相反ナリ。直線 $l[f]$ ト圓 $K[f]$ トノ關係ニ就テハ、

Wellstein, Archiv. d. Mathematik u. Physik, 第三輯第十七卷 (1910年)

及ビ第13款ノ最後ニ引用セル拙論ヲ見ヨ。

III.　第7款ノ結果ヲ直線群ノ微分幾何學ニ應用セルモノニ就テハ、拙論

On the differential geometry of a line congruence (東北帝國大學理科報告、第一輯第五卷、1916年)

ヲ見ヨ。

IV.　第13款ぱすかるノ定理ノ不變式論的計算ニヨル證明ニ就テハ、I ニ揭ゲタルくれぶっしゅーりんでまんノ書第539頁ヲ見ヨ。

V.　第15款ニ於ケル球面上ノ四點 F_1、F_1''、F_2、F_2'' ハ一平面上ニアリテ其ノ複比ハ -1 ニ等シ。一般ニ球面上ノ四點ノ複比ニ就テハ、うぇでぃきんどノ論文ヲ見ヨ。更ニ一般ニ二次曲面上ノ四點ノ複比ニ就テハ

Study, Betrachtungen über Doppelverhältnisse (Leipziger Berichte, 第四十八卷、1896年)

ヲ見ヨ。

VI.　三ツノ二次式 f_1, f_2, f_3 ト其ノ間ノやこび式 $J(f_1, f_2)$, $J(f_2, f_3)$, $J(f_3, f_1)$ トノ判別式、聯立不變式、終結式ヲ用ヒテ、球面三角法ヲ簡潔ニスルコトヲ得。之ニ就テハ

Stephanos, Sur la relation qui existe entre le problème de la trigonométrie sphérique et la théorie du système de trois formes quadratiques binaires (Bulletin de la Soc. math. de France, 第十卷、1882年)

Klein, Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion (1894年)

Schilling, Beiträge zur geometrischen Theorie der Schwarzschen s-Funktion (Dissert, Leipzig, 1894年 又ハ Math. Ann., 第四十四卷、1894年)

ヲ參照セヨ。（完）