

氏 名（本籍）	なすだ ゆう た（福井県）
学 位 の 種 類	博士（理学）
学 位 記 番 号	甲第 1323 号
学位授与の日付	2024 年 3 月 18 日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当
学 位 論 文 題 目	Study on a Quantization Condition and the Solvability of Schrödinger-type Equations (可解なシュレディンガー型の微分方程式の 数理と量子化条件の研究)

論 文 審 査 委 員	(主査) 教授 澤渡 信之
	教授 鈴木 英之      教授 福元 好志
	教授 山崎多恵子      教授 寺島 千晶
	准教授 秋元 琢磨

## 論文内容の要旨

本論文は、超対称量子力学の分野でよく知られている SWKB (超対称 WKB) 量子化条件に関する一連の研究成果をまとめたものである。本論文では、種々の可解な量子力学系に対して SWKB 量子化条件を適用し、この条件の数理的・物理的解釈を試みるとともに、その解釈に基づいて新たな可解系の構成を行い、その諸性質を議論した。

数理科学の多くの問題は、微分方程式における固有値問題として記述される。さらにそれらは、しばしば変数分離によって 1 変数の問題に帰着される。例えば、Sturm–Liouville 型の境界値問題は、物理学のみならず、ひろく理工学の諸分野で重要な役割を担っている。ところで、微分方程式の固有値問題の解法には、解析的な方法や代数的な方法、数値計算などが知られている。これらに加えて、前期量子論の時代に考案された種々の量子化条件を援用する方法も考えられる。本論文では Schrödinger 型の固有値問題を取り上げ、その可解性について SWKB 量子化条件の観点から議論した。

Schrödinger 方程式の厳密解や量子化条件に関しては、膨大な先行研究が存在する。しかし、21 世紀に入ってからでも Schrödinger 方程式とそれを満たす直交多項式に関する研究において目覚ましい発展があり、また、リサージェンス理論や常微分方程式・可積分模型 (ODE/IM) 対応でみられるように、量子化条件が新たな双対性を探究する道具立てとして

注目を浴びているなど、これらには、いまなお多くの問題が未解明の状態に残されていると考えられる。

所与のポテンシャルに対して Schrödinger 方程式を厳密に解く手法の研究は、量子力学の建設当初から行われてきた。初期の研究としては、Schrödinger によって考案され、Infeld と Hull によって一般化された因子化解法がある。この解法は、Witten による超対称量子力学と密接に関連し、超対称性の知見によって Schrödinger 方程式を厳密に解く手法の研究が大きく発展した。現在では、Schrödinger 方程式の厳密解に関する分野は、「解ける量子力学」などと呼ばれ、なお活発に研究されている。ここで、「Schrödinger 方程式が解ける」あるいは「可解である」とは、固有値問題の固有値と対応する固有函数とが、既知の初等函数・特殊函数を用いて明示的に書き下せることをいう。実際の物理現象を記述する多くの問題が可解ではないものの、厳密解を得る手法や可解系の諸性質に関する研究は、近似解法の確立や模型が記述する現象の背後にある数理解造の理解において有用である、と我々は考えている。

超対称性の知見を用いて Schrödinger 方程式を厳密に解く手法の研究のなかで、Comtet, Bandrauk, Campbell は、現在では SWKB 量子化条件と呼ばれる量子化条件を提案した。この条件は、Bohr-Sommerfeld の量子化条件に類似した、ある積分量（「SWKB 積分」と呼ぶ）が非負整数値を取る、という形で表現されている。SWKB 量子化条件の解釈をめぐることは、これまでに系の厳密可解性や形状不変性と呼ばれる可解性の十分条件との関係が議論されてきたが、いずれの解釈も成り立たない事例が数多く見つかっており、その適切な解釈は不在である。そこで我々は、まず SWKB 条件に数理的な基礎付けを与えることを目指した。その上で、SWKB 条件が実際の問題にどう応用され得るかの検証を行った。

我々はまず、SWKB 条件の物理的意味を理解する目的で、広範な事例研究を試みた。初めに、既に知られているように、古典的形状不変系と呼ばれるクラスの可解系に対してこの条件が厳密に成り立つことを、積分を直接実行することによって確かめた。次に、SWKB 量子化条件が成立しない（加法的）形状不変系の存在を示唆した Bougie らの議論を検証し、より一般の多添字系と呼ばれる形状不変系では常に、条件が厳密には成立しない（しかし近似的には成り立っている）ことを見出した。ここで我々は、条件が破れる機構を数学的に解明するため、多添字系の構成法に着目し、多添字系と同様に古典的形状不変系の Darboux 変換によって得られる Krein-Adler 系に対しても、条件が成立しているかを調べた。その結果、Krein-Adler 系では常に条件は不成立であった。さらに、条件の破れの大きさが、系の準位構造と Darboux 変換前の古典的形状不変系の準位構造との差異に関する指標となっている、という示唆が得られた。

SWKB 条件と系の準位構造との間に見出した上述の關係に定量的な評価を与えるため、我々は Jucker と Roy による条件付き可解系に対する解析を行った。この可解系は古典的形状不変系と Krein-Adler 系との間を連続パラメータで繋いでおり、パラメータの変化によって系の準位構造を推移させながら、SWKB 積分の値がどのように変化するかを調べることができる。さらにこの系は古典的形状不変系の等スペクトル変形を与えるパラメータも含んでおり、SWKB 積分の値がこのパラメータに対してどのような依存性をもつかについて

ての解析も行った。以上の解析によって、確かに SWKB 積分は、系の準位構造が対応する古典的形状不変系の準位構造からどの程度ずれているかを表す指標となっており、また、SWKB 条件の近似的な成立が、系の準位構造と対応する古典的形状不変系の準位構造との類似性によって保証されていることがいえた。しかしこの解析では、SWKB 条件の解釈、あるいは条件の（不）成立について、数学的に厳密な議論を与えることが困難であることも同時に明らかとなった。

そこで我々は、SWKB 条件の（不）成立に関する数学的な理解を得るために、SWKB 条件が厳密に成立している古典的形状不変系について、条件式の成立を統一的に理解することを試みた。古典的形状不変系はいずれも可解で、その可解性は古典直交多項式の存在によって保証されている。我々はこの点に着目し、古典的形状不変系に対する SWKB 条件の条件式が 3 つの積分公式に帰着できることを示した。さらに、古典直交多項式によって解かれる別の量子力学系に対しても、条件式の適切な拡張を考えることで、同じ 3 つの積分公式に帰着させることに成功した。これらの量子力学系に対して、拡張された SWKB 条件は厳密に成立している。

本研究の第一の結論は、SWKB 条件が (Bochner の定理の仮定を満たし、重み関数が正定値となる 3 つの) 古典直交多項式による可解性を意味しているということである。

SWKB 条件と準位構造、また SWKB 条件と古典直交多項式による可解性との関連が明らかとなったことから、我々は「SWKB」に単なる量子化条件以上の意味を付与できる可能性があるという着想を得た。これまで SWKB は、所与のポテンシャル（厳密には、超ポテンシャル）からエネルギー固有値のスペクトルを得るための道具立てに過ぎなかった。我々は、逆にエネルギースペクトルの表式を与えることで、それを満たしかつ古典直交多項式による可解性をもつようなポテンシャルを構成することが可能だと考え、この定式化を行った。これは積分方程式に基づく一種の逆問題である。解の一意性を保証し、良設定問題にするために、我々はポテンシャルの形状に関する条件を追加で与えている。この方法で、我々はまず、所与のエネルギースペクトルから、全ての古典的形状不変系を再構成することに成功した。

この SWKB の逆問題は、古典力学における次の問題のアナロジーとみることができる。古典力学における 1 自由度の周期運動（振動）の問題では、振動周期の表式からポテンシャルエネルギーを決定する問題が古くから考えられてきた。さらに、振動周期が系の力学的エネルギーに依存しないような、等時性をもつポテンシャルの系統的構成法が議論されてきた。なお、我々の定式化では、等時性はエネルギースペクトルの等間隔性に言い換えられることになる。

ここで我々は、「ポテンシャルの形状に関する条件」に着目し、それに変更を加えることで、特に調和振動子ポテンシャルを変形し、Hermite 多項式による可解性をもつような新たな可解ポテンシャルの構築を試みた。通常の調和振動子の場合、全ての離散固有状態に対してその固有関数が古典直交多項式で書け、エネルギースペクトルは全て等間隔である。他方、我々が新たに構築したポテンシャルでは、一部のしかし無限個の固有関数が古典直交多項式で書け、エネルギースペクトルは幾つかおきに等間隔となっている。本論文では、

Hermite 多項式による可解性が現れる条件やスペクトルの等間隔性などについての詳細な議論を行った。

以上の SWKB の逆問題、特に調和振動子の変形は、我々に、区分的に解析関数で与えられるポテンシャルの下での、多項式による可解性をもつ量子力学系、という新たな視点を与えてくれた。この種のポテンシャルは、SWKB 法の文脈以外でも、例えば、古くは原子核や核子を記述するモデルとして、最近では量子力学系における多項式以外での可解性の文脈でも注目されている。本論文では、SWKB 法で構成したポテンシャル及びそれに着想を得た、原点で解析的でない振動子ポテンシャルについて、Hermite 多項式による可解性はもちろん、その準位構造についても議論を与えた。

本研究の第二の結論は、SWKB の逆問題の定式化に成功したことと、そこに発想を得た新奇なポテンシャルに対して Schrödinger 方程式の厳密解を得たことである。さらに我々はこのなかで、調和振動子と完全に等スペクトルなポテンシャルを無限個構成する系統的方法を確立した。

本研究で得られた SWKB 量子化条件の解釈やそれに関する知見は、例えばリサージェンス理論との関連で非摂動的な量子現象に対する新たな理解を与えるなど、新たな双対性や一般化を探究する強力な道具立てとなることが期待される。また、本研究で得られた Schrödinger 方程式の可解性に関する知見は、量子力学に限らず、微分方程式の固有値問題が現れるさまざまな分野、例えばソリトン理論や光学、非平衡統計力学、理論生物学、情報科学、経済学、金融工学などに応用され、その数理の解明に大きく貢献すると考えている。

## 論文審査の結果の要旨

量子力学の Schrödinger 固有値方程式の解法には、解析的・代数的な方法や数値解析等さまざまなものがある。その中でも、ハミルトニアン因子化に起源を持つ超対称性に基づいた、いわゆる解ける量子力学は、多くの問題に対して厳密解を系統的に得る手法として長年にわたり研究が続けられてきた。本学位論文は、解ける量子力学とその周辺の新規な問題に関する解析と、解ける量子力学に固有の量子化条件として知られている SWKB 条件に関する一連の研究成果をまとめたものである。

本学位論文では、まず SWKB 条件の理解を深める目的から、広範な事例研究がなされている。SWKB 条件が厳密に成り立つ形状不変系のポテンシャルと、条件が成立しない場合の例として、多添字系や Krein-Adler 系といったポテンシャルについて調べている。そして、SWKB 条件の破れが、古典的形状不変系に対する Darboux 変換における、変換の前後の準位構造の変動の指標となるとの新たな知見を得た。

SWKB 条件と系の準位構造との間の相関に関するより定量的な評価のために、学位申請者は Junker, Roy により提唱された条件付き可解系に着目した。この可解系は、古典的形状不変系と Krein-Adler 系のポテンシャルを包含し、両者を連続パラメータによっ



て繋ぐという特徴を持っている。学位申請者は、SWKB 条件のパラメータ依存性について詳細に調べ、SWKB 条件が近似的に成立することが、系の準位構造と対応する古典的形状不変系の準位構造の相似性によることを見出した。

さらに、SWKB 条件の成立に関する新たな知見として、古典的形状不変系に対する SWKB 条件の条件式が、常に三種類の積分公式に帰着できることを示した。さらに、古典直交多項式によって解かれる別の量子力学系に対しても、条件式に適切な変更を加えることで、同じく三種類の積分公式に帰着させることに成功した。これらの量子力学系に対して、変更された SWKB 条件は厳密に成立している。以上のことから、SWKB 条件は、Bochner の定理の仮定を満たし、重み関数が正定値となる三種類の古典直交多項式による可解性を意味しているということを明らかにした。

以上の解析の過程で、学位申請者は、SWKB 条件に単なる量子化条件である以上の意味を見出すこととなった。すなわち、エネルギー準位からポテンシャルを再構成することが可能ではないかと考え、その解析を実行した。その結果、与えられたエネルギー準位から全ての古典的形状不変系を再構成することに成功した。この手法の応用として、古典的形状不変系（特に調和振動子）の変形で、古典直交多項式の一つである Hermite 多項式による可解性をもつような新たな可解ポテンシャルの構築を試みた。このポテンシャルでは、変形に伴って多くの固有関数が古典直交多項式とならず、残ったいくつか固有関数のみが古典直交多項式で記述される。それらの固有値は通常の調和振動子の場合と等しい。調和振動子の場合、エネルギー準位は全て等間隔であったが、変形されたポテンシャルでは、準位は幾つかおきに等間隔となるという特性を示す。本学位論文では、Hermite 多項式による可解性が現れる条件やエネルギー準位の特性などに関して詳細に議論している。さらに、SWKB 条件により構成された、原点で解析性を持たない振動子ポテンシャルについても、その可解性や準位構造等について詳しく調べた。また、この手法を利用して、調和振動子と完全に等スペクトルであるような新規なポテンシャルが無限個存在することを示した。

本学位論文では、解ける量子力学の厳密解の求解の手法や、SWKB 量子化条件の成立に関する事例研究に多くのページが割かれている。また、エネルギー準位からポテンシャルに至る、いわゆる逆問題に関する新たな手法について詳細に述べられている。一方で、物理現象への応用という視点は、特に本学位審査の最初の段階においては等閑視されたきらいがあり、いささか不満の残るものであった。しかしながら、審査の過程で目立った進捗が見られ、最終的に博士（理学）の学位に値するものになったと判断するに至った。量子力学という過去の膨大な研究成果のある分野において、独自の着眼点と新規な解析手法に基づいて一定の成果を挙げたということは、学位申請者が高い研究遂行能力を持つことを示しており、評価に値するものであると考えられる。よって、本論文は博士（理学）の学位論文として十分に価値があるものと認められる。