氏名（本籍）	**鹿俣尚志**（かのまたなおゆき）（宮城県）
学位の種類	博士（理学）
学位記番号	甲第 1318 号
学位授与の日付	2024 年 3 月 18 日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当
学位論文題目	**Φ^3Matrix Model and Φ^3-Φ^4Hybrid Matrix Model as Grosse-Steinacker-Wulkenhaar Type Noncommutative Scalar Field Theories** **(Grosse-Steinacker-Wulkenhaar 型非可換スカラー場の理論としての Φ^3 行列模型と Φ^3-Φ^4 混合行列模型)**
論文審査委員	（主査）教授　佐古　彰史 教授　伊藤　弘道　　教授　興治　文子 教授　渡辺　雄貴　　教授　堺　　和光

論文内容の要旨

Grosse-Steinacker-Wulkenhaar Φ^3 行列模型（Kontsevich 模型と呼ぶ場合もある．以下では単に Φ^3 行列模型と呼ぶ．）とポテンシャルを変形し Φ^3-Φ^4 混合型にした模型を研究した．始めに Φ^3 行列模型について述べる．ここで Φ^3 行列模型とは以下のように定義される．Φ を $N\times N$ のエルミート行列とし，また $E=(E_{m-1}\delta_{mn})$ は正定値エルミート行列とする．$\kappa\in\mathbb{R}$ は繰りこみ定数，$\lambda\in\mathbb{R}$ は結合定数，$V\in\mathbb{R}$ とする．このとき Φ^3 行列模型の作用 $S[\Phi]$ は $S[\Phi]:=iV\mathrm{tr}\left(E\Phi^2+\kappa\Phi+\frac{\lambda}{3}\Phi^3\right)$ と定義する．外場 $J=(J_{mn})$ を $m,n=1,2,\ldots,N$ のエルミート行列とし，測度は $\mathcal{D}\Phi:=\prod_{m=1}^{N}d\Phi_{mm}\prod_{1\leq m<n\leq N}d\mathrm{Re}\Phi_{mn}d\mathrm{Im}\Phi_{mn}$ としたとき多点相関関数の生成汎関数 $\mathcal{Z}[J]$ を $\mathcal{Z}[J]:=\int\mathcal{D}\Phi\exp\left(-S[\Phi]+iV\mathrm{tr}(J\Phi)\right)$ とする模型をここでは Φ^3 行列模型と定義する．この理論は，非可換空間であるモヤル空間上の繰り込み可能なスカラー Φ^3 理論として導出することが可能である．先行研究では，多点相関関数の Schwinger-Dyson 方程式を導出し，Schwinger-Dyson 方程式のヒエラルキーを用いてラージ N,V 極限における Φ^3 行列模型の多点相関関数の厳密解が求められている．本研

究では，Φ^3 有限行列模型における多点相関関数の厳密解を求めた．任意の多点相関関数を $G_{|a_1^1\ldots a_{N_1}^1|\ldots|a_1^B\ldots a_{N_B}^B|}$ と表す．この記号は，行列模型をファインマン図で表した時に現れる二次元曲面の境界が B 個の時，i 番目の境界から出る外線を $a_1^i, \cdots, a_{N_i}^i$ とした，$\sum_{j=1}^{B} N_j$ 点関数を意味するものである．この一般の多点相関関数は，$G_{|a^1|\ldots|a^B|}$，すなわち B 個の境界から各一本の外線が出る B 点関数を使って計算できるということが知られている．したがって本論文では $G_{|a^1|\ldots|a^B|}$ を厳密に計算した．それは Itzykson-Zuber 積分を使って変形した生成汎関数 $\mathcal{Z}[J]$ を適用することによって達成され，実際の積分の結果は，

$$\mathcal{Z}[J] = C' \frac{e^{\frac{-iV}{\lambda}\mathrm{tr}(JE)} A_N(y_1, \cdots, y_N)}{\prod_{1\leq t<u\leq N}(s_u - s_t)}$$

となる．但し $C' = \exp\left(-\frac{iV}{\lambda^2}\mathrm{tr}\left(\frac{2}{3}E^3 - \lambda\kappa E\right)\right)\left(\prod_{p=1}^{N} p!\right)\frac{(-2)^N \pi^{\frac{N(N+1)}{2}}}{\lambda^{\frac{N(N+1)}{6}} V^{\frac{N(2N-1)}{3}} \kappa^{\frac{N(N-1)}{2}}}$ であり，$s_t\ (t = 1, 2, \cdots, N)$ は行列 $\frac{E^2}{\lambda\kappa} - I + \frac{J}{\kappa}$ の固有値とする．(I は単位行列とする．) また $y_j = -\frac{V\kappa s_j}{(\lambda V)^{\frac{1}{3}}}\ (j = 1, 2, \cdots, N)$ とし，$A_N(y_1, \cdots, y_N) = \left(\prod_{1\leq i<j\leq N}(\partial_{y_i} - \partial_{y_j})\right) Ai(y_1)\cdots Ai(y_N)$ と定義する．$Ai(y_j)$ はエアリー関数である．

上で得られた生成汎関数 $\mathcal{Z}[J]$ を $G_{|a^1|\ldots|a^B|}$ を計算するために使う．$G_{|a^1|\ldots|a^B|}$ の厳密解は，外場 J を対角行列とした $\log\mathcal{Z}[J]$ における $\partial^B/\partial J_{a^1a^1}\cdots\partial J_{a^Ba^B}$ の B 回微分を計算することによって得ることができる．求めた $G_{|a^1|a^2|\cdots|a^B|}$ の厳密解を適用すると Φ^3 行列模型の任意の多点相関関数の厳密解を求めることができる．

次に同様に厳密解が得られると期待される，複数のポテンシャルが混ざった行列模型として，Φ^3 の 3 点相互作用と Φ^4 の 4 点相互作用を合わせ持った行列模型を考える．但し，Φ^3 の 3 点相互作用には，ある対角行列 $M = (\sqrt{E_{k-1}}\delta_{kl})$ が乗ぜられている (Φ^3-Φ^4 混合行列模型)．この模型は作用 $S[\Phi] = V\mathrm{tr}\left(E\Phi^2 + \frac{1}{2}M\Phi M\Phi + \sqrt{\lambda}M\Phi^3 + \frac{\lambda}{4}\Phi^4\right)$ で定義され，ある条件下で一般化された Kontsevich 模型となり高階 KdV 階層と対応する．本研究では，まずこの模型のファインマン則を構築した．Φ^3 相互作用が $\mathrm{tr}M\Phi^3$ であり，M が挿入されている為，従来にないファインマン則となる．これを用い摂動論的にこの模型の多点相関関数を計算した．一方で Φ^3 行列模型の厳密解を導出したときと同様の方法でそれらの厳密解を与えることも行った．Φ^3-Φ^4 混合行列模型の多点相関関数の生成汎関数 $\mathcal{Z}[J]$ を $\mathcal{Z}[J] := \int \mathcal{D}\Phi \exp(-S[\Phi] + V\mathrm{tr}(J\Phi))$ と定義すると Φ^3 行列模型同様の計算から

$$\mathcal{Z}[J] = C' \frac{e^{\frac{-V}{\sqrt{\lambda}}\mathrm{tr}(JM)} P_N(s_1, \cdots, s_N)}{\prod_{1\leq t<u\leq N}(s_u - s_t)}$$

となる．但し $C' = \exp\left(-V\mathrm{tr}\left(\frac{3}{4\lambda}M^4\right)\right)\left(\prod_{p=1}^{N} p!\right)\frac{\pi^{\frac{N(N-1)}{2}}}{V^{N(N-1)}}$ であり，$s_t\ (t = 1, \cdots, N)$ は

行列 $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}M^3+J$ における固有値とする．また，$P_N(s_1,\cdots,s_N)=\left(\prod_{1\le i<j\le N}(\partial_{s_i}-\partial_{s_j})\right)$

$P(s_1)\cdots P(s_N)$ と定義する．$P(s_i)=\int_{-\infty}^{\infty}dx\exp\left(-\frac{\lambda V}{4}x^4+Vxs_i\right)$ である．これを用いて連結多点相関関数が求まる．実際 Φ^3-Φ^4 混合行列模型の $G_{|a|}, G_{|ab|}, G_{|a|b|}, G_{|a^1|\ldots|a^B|}$ $(3\le B)$ の厳密解を求めた．この相関関数を鞍点法で評価することで上述のファインマン則の計算との整合性を確認することができる．

論文審査の結果の要旨

鹿俣氏の博士論文審査は，審査員による博士論文の判定と，対面での３回の質疑応答を含む口頭発表による審査により実施された．

２０２３年１２月２０日に行われた第１回の審査会では，鹿俣氏による４０分の口頭発表の後，２０分間の質疑応答が行われた．鹿俣氏の博士論文の内容を理解する上で必要となる研究背景，予備知識（博士論文の１，２章に対応）についての発表が２０分ほど行われた後で，後半の２０分で博士論文の３章に該当する内容を発表した．この３章の内容が鹿俣氏の業績に対応する，Grosse-Steinacker-Wulkenhaar 型Φ^3模型を有限行列の場合に完全に厳密な解を与えたという内容である．より詳細には，エルミート行列の行列模型であり 3 点相互作用がある Grosse-Steinacker-Wulkenhaar 型Φ^3模型(Kontsevich 模型とも呼ばれるこの模型は非可換空間であるモヤル空間のスカラーϕ^3理論に，あるポテンシャルを入れた場の理論に対応する）に対して，極限操作を行わず，有限自由度の行列模型に対して外場 J が対角行列の場合の多点相関関数の厳密解を求めたという内容である．任意の多点相関関数は，外場 J が対角行列の場合の多点相関関数を使って計算できるということは先行研究において知られていた．したがって任意の多点相関関数を厳密に計算したことになっている．従来知られていたものはある極限操作を行うことで離散的な方程式を積分方程式として扱える場合についてのみであったことから，今回の結果のように極限操作を行わず，分配関数の直接計算によって厳密解を求めているという内容には新規性があり，質疑応答後に行われた審査委員による審議により価値ある内容と認められた．

第２回目の博士論文審査会は２０２４年１月９日に実施された．
２回目の審査会でも，鹿俣氏による４０分の口頭発表の後に２０分程度の質疑応答が行われた．博士論文の４，５章に対応する内容についての審査となる．内容的にはΦ^3-Φ^4ハイブリッド行列模型という模型を定式化し，その摂動論を構築し，摂動論的に連結多点相関関数を計算した．さらに，それらの厳密解を与えたことについて説明された．こ

の模型はそもそも鹿俣氏等によって新規に作られた模型であることから，そのファイマン則の構築や分配関数を厳密に計算するなどの内容すべてが新規性を持つ．またその模型は，Kontsevich 模型が持つ KdV 階層の構造を高次に拡張した可解性を持ち，さらに，まだ未解明な点が多く残っている Grosse-Steinacker-Wulkenhaar 型Φ^4模型とのつながりを解明するヒントを与えうることから，有用な性質を持つことが期待され，今後もさらに発展が見込まる．このことから，本論文での計算結果に対する価値が確認された．質疑応答後に行われた審査委員による審議においてこのことが承認された．

第３回目の審査会は２０２４年１月２３日に実施された．
公聴会として，４０分の口頭発表のあと，２０分間の質疑応答を行われ，博士論文全体の内容を，研究背景や予備知識の紹介を含めた形で行われた．発表ではまず，自然界の基本的な物理理論を統一的に量子論的に記述することから議論を出発し，非可換空間上のスカラー場の理論である Grosse-Steinacker-Wulkenhaar 型Φ^3模型等が動機付けられた．その後，本論文の内容である，Grosse-Steinacker-Wulkenhaar 型Φ^3模型の多点関数の計算および，Φ^3-Φ^4ハイブリッド行列模型の摂動論を構築し多点関数の厳密解も計算する内容を，可積分性などと関連付けられながら，図などを多く用いて解説がなされた．質疑応答に関しても概ねうまく対応しており，博士論文の内容や鹿俣氏本人の研究に対する資質に関しても，公聴会終了後の審査委員による審議でも全委員一致で確認された．

以上のように，３回の審査を通じて，論文の内容の新規性や普遍性などの価値，および鹿俣氏自身の研究能力が確認された．従って，本論文が博士（理学）の学位論文として十分に価値あるものと認められる．