

氏 名（本籍）	藤 井 知 輝（神奈川県）
学 位 の 種 類	博士（理学）
学 位 記 番 号	甲第 1308 号
学位授与の日付	2024 年 3 月 18 日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当
学 位 論 文 題 目	Shapes of translators for the mean curvature flow and the inverse mean curvature flow (平均曲率流と逆平均曲率流のトランスレイターの形状)

論文審査委員	(主査) 教授 小池 直之
	教授 加藤 圭一 教授 太田 雅人
	教授 横田 智巳 教授 田中真紀子

論文内容の要旨

平均曲率流と逆平均曲率流は、リーマン多様体内の超曲面の幾何学的フローの一種である。これらのフローにおいて、超曲面が形を変えずに等速で平行移動する場合、その超曲面をトランスレイターと呼ぶ。本論文では、リーマン多様体上のある不変性を持った関数のグラフで表されるトランスレイターの形状について考える。

第 1 章では、等径超曲面上一定な値を持つ関数のグラフで表される平均曲率流のトランスレイターの形状について考察する。 $u: M \rightarrow \mathbb{R}$ を n 次元 C^∞ 級リーマン多様体 N 内の領域 M 上の関数とし、 Γ をそのグラフとする。 M から $(n+1)$ 次元積リーマン多様体 $N \times \mathbb{R}$ への C^∞ 級はめ込み $f = f(x) = (x, u(x))$, $x \in M$ で定める。 M から $N \times \mathbb{R}$ への C^∞ 級はめ込みの C^∞ 級族 $\{f_t\}_{t \in I}$ (I は 0 を含む開区間) が

$$\left(\frac{\partial f_t}{\partial t}\right)^{\perp f_t} = H_t, \quad f_0 = f$$

を満たすとき、 $M_t := f_t(M)$ として、 $\{M_t\}_{t \in I}$ を Γ を発する平均曲率流という。ここで、 H_t は f_t に関する平均曲率ベクトル場、 $(\cdot)^{\perp f_t}$ は f_t に関する (\cdot) の法成分とする。また、 $X = (0, 1) \in T(N \times \mathbb{R}) = TN \oplus T\mathbb{R}$ を $N \times \mathbb{R}$ 上のキリングベクトル場、 $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ を X に関する 1-パラメータ変換群とする。このとき、 $\{f_t\}_{t \in I}$ が

$$\left(\frac{\partial(\phi_t^{-1} \circ f_t)}{\partial t}\right)^{\perp(\phi_t^{-1} \circ f_t)} = 0$$

を満たすとき, Γ を平均曲率流のトランスレイターと呼ぶ.

N が n 次元単位球面 $\mathbb{S}^n (n \geq 2)$ であり, u が \mathbb{S}^n 上の等径関数 $r: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ とある関数 $V: J \rightarrow \mathbb{R}$ (J は $r(\mathbb{S}^n)$ 内の区間)の合成関数である場合について考察する. \mathbb{S}^n 上の等径超曲面のレベルセット族は, \mathbb{S}^n のコンパクトな等径超曲面族を与えるため, u は \mathbb{S}^n の各等径超曲面上一定な値を持つ関数となっている. r のレベルセット族の法方向に関する u のグラフ Γ の形状は V のグラフの形状から得ることができる. V のグラフに関して次の結果を得る.

定理 1.1.1 . $u = (V \circ r)|_{r^{-1}(J)}$ のグラフ Γ が平均曲率流のトランスレイターであるとき, V のグラフの形状は以下の図のいずれかになる. ただし, $R \in (-1, 1)$ は以下で定める定数とする.

$$R := \begin{cases} 0 & (k = 1, 3, 6) \\ -1 + \frac{km}{n-1} & (k = 2, 4) \end{cases}$$

ここで, k は r のレベルセットとして与えられる等径超曲面の相異なる主曲率の個数 (k は $1, 2, 3, 4, 6$ のいずれかになる) とし, m は最小の主曲率の重複度とする.

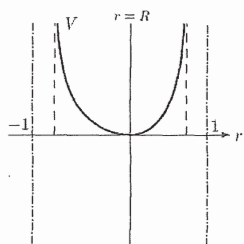


Figure 1.1.3: The graph of V (Type I)

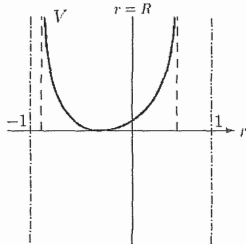


Figure 1.1.4: The graph of V (Type II)

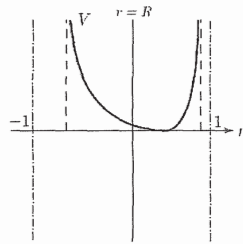


Figure 1.1.5: The graph of V (Type III)

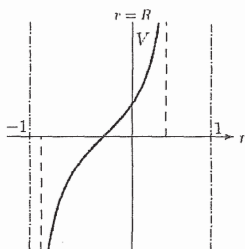


Figure 1.1.6: The graph of V (Type IV)

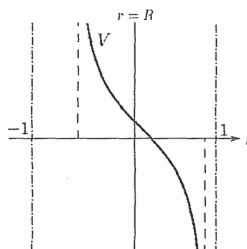


Figure 1.1.7: The graph of V (Type V)

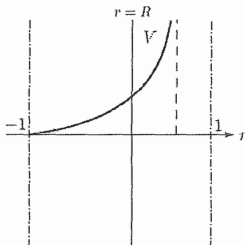


Figure 1.1.8: The graph of V (Type VI)

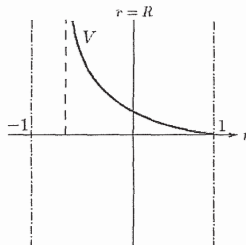


Figure 1.1.9: The graph of V (Type VII)

第2章では, 等径超曲面上一定な値を持つ関数のグラフで表される逆平均曲率流のトランスレイターの形状について考察する. 第1章と同様に, N, M, u, Γ, f を定義する. このとき, M から $N \times \mathbb{R}$ へのはめ込み C^∞ 級はめ込みの C^∞ 級族 $\{f_t\}_{t \in I}$ (I は0を含む開区間)が

$$\left(\frac{\partial f_t}{\partial t}\right)^{\perp_{f_t}} = -\frac{1}{\|H_t\|^2} H_t, \quad f_0 = f$$

を満たすとき, $M_t := f_t(M)$ として, $\{M_t\}_{t \in I}$ を Γ を発する逆平均曲率流という. また, 平均曲率流のときと同様に, $X = (0, 1) \in T(N \times \mathbb{R}) = TN \oplus T\mathbb{R}$ を $N \times \mathbb{R}$ 上のキリングベクトル場, $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ を X に関する 1-パラメータ変換群とし, $\{f_t\}_{t \in I}$ が

$$\left(\frac{\partial(\phi_t^{-1} \circ f_t)}{\partial t}\right)^{\perp_{(\phi_t^{-1} \circ f_t)}} = 0$$

を満たすとき, Γ を逆平均曲率流のトランスレイターと呼ぶ.

N が n 次元単位球面 \mathbb{S}^n であり, u が \mathbb{S}^n 上の等径関数 r とある関数 $V: J \rightarrow \mathbb{R}$ (J は $r(\mathbb{S}^n)$ 内の区間) の合成関数である場合, u のグラフ Γ の形状について考察する. すなわち, 第 1 章のときと同様に V のグラフの形状を分類する. V のグラフに関して次の結果を得る.

定理 2.1.1. $u = (V \circ r)|_{r^{-1}(J)}$ のグラフ Γ が逆平均曲率流のトランスレイターであるとき, V のグラフの形状は以下の図のいずれかになる.

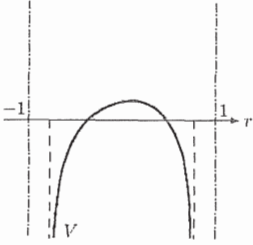


Figure 2.1.1: The graph of V (Type I)

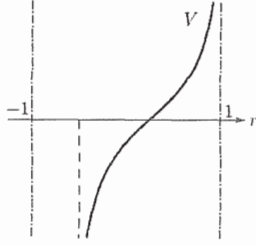


Figure 2.1.2: The graph of V (Type II)

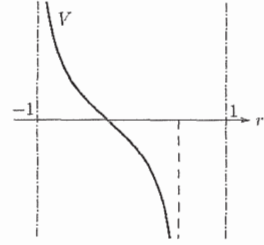


Figure 2.1.3: The graph of V (Type III)

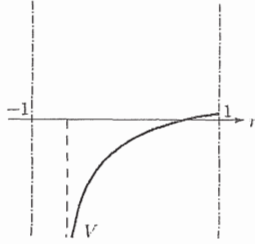


Figure 2.1.4: The graph of V (Type IV)

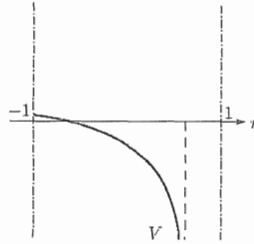


Figure 2.1.5: The graph of V (Type V)

論文審査の結果の要旨

界面の代表的な形状支配型の時間発展(流れ)の代表的な流れとして, 平均曲率流と逆平均曲率流がある. 平均曲率流は, 界面の各点とその点における平均曲率ベクトル方向にその長さの速さで進んでいく流れであるのに比べ, 逆平均曲率流は, 界面の各点とその点における平均曲率ベクトルとは逆の方向にその長さの逆数の速さで進んでいく流れであり, 本質的に異なる流れである. 平均曲率流は, 界面がコンパ

クトの場合、体積汎関数の(-1)倍の勾配流として捉えることができ、それゆえ、この汎関数の臨界点である(コンパクト)極小超曲面の研究において、強力な解析的道具となる。また、逆平均曲率流は、一般相対性理論におけるペンローズ予想(ブラックホールからみて十分遠く離れた点における時空の平坦性に関する予想)に用いられた。このように、これらの曲率流は、幾何学、及び、理論物理学において、強力な道具となる。これらの曲率流の特別なソリトン解として、トランスレイティングソリトン(略して、トランスレイター)が定義される。以下、簡単のため、トランスレイターという用語を用いることにする。本論文では、球面上のある種の不変性をもつ関数のグラフとして与えられる平均曲率流と逆平均曲率流のトランスレイターの形状について、考察されている。

本論文は、以下の2つの章で構成されている。

第1章 平均曲率流のグラフトランスレイターと等径関数

第2章 逆平均曲率流のグラフトランスレイターと等径関数

以下、各章の内容について説明する。球面上の関数で、その正則値に対する等位集合の族が球面内の興味深い超曲面の族を与えるものとして、等径関数とよばれる関数が、1930年代、Elie Cartanによって導入された。また、それらの超曲面は、等径超曲面とよばれる。等径関数の等位集合の全体は、等径超曲面族とそれらの焦部分多様体からなる特異リーマン葉層構造とよばれる球面上の興味深い特異点付きストライプ模様(この模様は、一般次元ユークリッド空間上の同心超球面の族とそれらの共通の中心の与える特異点付きストライプ模様の一般次元球面上版と解釈される)を与える。ここで、等径超曲面族は、一定の平均曲率をもつ超曲面族になることを注意しておく。

第1章では、球面上の等径関数の与える特異リーマン葉層構造の各葉に沿って一定値をとる(球面のある開集合上で定義される)滑らかな関数のグラフとして与えられる平均曲率流のトランスレイターの形状について考察されている。ほとんどの場合、そのような特異リーマン葉層構造は、球面上の超極作用とよばれるリー群作用の軌道族として与えられ、その場合、関数が特異リーマン葉層構造の各葉に沿って一定値をとることは、その関数とその超極作用に関して不変であることを意味する。

第2章では、上述の特異リーマン葉層構造の各葉に沿って一定値をとる(球面のある開集合上で定義される)滑らかな関数のグラフとして与えられる逆平均曲率流のトランスレイターの形状について考察されている。

考察方針は、以下の通りである。上述の不変性をもつ滑らかな関数のグラフが平均曲率流と逆平均曲率流のトランスレイターになるための同値条件をその不変性をもつ滑らかな関数に付随して定義されるある1変数関数に関する2階常微分方程式として与え、その常微分方程式の解の形状を調べることにより、目的のグラフによって与えられるトランスレイターの形状を導出するという方針で考察されている。

ここで、上述の2階の常微分方程式は解をもつが、その解を具体的に数式で表示することができないことを注意しておく。また、前述のように、平均曲率流と逆平均曲率流は、本質的に異なる流れなので、上述の不変性をもつ球面(のある開集合上の)関数のグラフとして与えられる平均曲率流と逆平均曲率流のトランスレイターの形状は、かなり異なることが予想されるが、第1章と第2章の結果から、このことが実証される。

平均曲率流と逆平均曲率流の上述のような不変性をもつ関数のグラフとして与えられるトランスレイターの形状の研究結果について、審査を行った。その結果、本論文は、リー群作用に関する不変性をもつ平均曲率流と逆平均曲率流のトランスレイターの研究分野における重要な研究成果を含んでおり、本論文が博士(理学)の学位論文として十分に価値あるものと認められる。