TRU Mathematics 14-1 (1978)

SUR UNE MÉTHODE DE CALCUL DU DÉNUMÉRANT

Shinji KURIKI

(Received May 19, 1978)

1. Introduction.

Soit n un entier $\geqq 1$. Une partition de n est une représentation de n en une somme d'entiers $\geqq 1$, l'ordre des termes de la somme n'étant pas pris en considération. Ces termes s'appellent sommants de la partition. Considérons les partitions de n dont les sommants sont pris (avec répétition libre) dans une suite d'entiers $(a):=(a_1,a_2,..,a_k),1\leqq a_1<a_2<..<a_k$. La donnée d'une telle partition équivaut à la donnée d'une solution de

(1) $\quad a_1x_1+a_2x_2+..+a_kx_k=n,\qquad$ les x_i entiers $\geqq 0$.

Soit $D(n;a_1,a_2,..,a_k)$ le nombre de solutions de (1), appelé dénumérant de n par rapport à la suite (a).

Soit A le plus petit commun multiple des entiers $(a_1,a_2,..,a_k)$. Pour tout entier B tel que $0 \leqq B \leqq A-1$, et tout entier $m \geqq k$, on a [1]

$$(2)\qquad \delta(m)=\binom{m}{k}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{k-j-1}\binom{k}{j+1}\frac{j+1}{m-j}\,\delta(j),$$

où $\delta(m):=D(Am+B;a_1,a_2,..,a_k)$.

2. Une méthode de calcul du dénumérant.

Dans [2] on voit

$$(3)\qquad \delta(m)=\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{l=j}^{k-1}(-1)^{l-j}\binom{m+k-l-1}{k-1}\binom{k}{l-j}\delta(j).$$

S'il existe un entier p $(0 < p < k)$ tel que

$$(4)\qquad Ap+B > Ak-\sum_{i=1}^{k}a_i\ ,$$

on a

$$(5)\qquad \sum_{j=0}^{l}(-1)^{l-j}\binom{k}{l-j}\delta(j)=0,\qquad l=p,p+1,..,k-1.$$

Facilement, on peut vérifier l'existence du tel entier p. Notons que l'on prendrait p, ici le plus petit entier satisfaisant (4). Alors, avec (2), on a

(6) $$\delta(m)=\binom{m+k-p}{k}\sum_{j=0}^{p-1}(-1)^{p-j-1}\binom{k}{p-j-1}\frac{k+j-p+1}{m-j}\,\delta(j),$$

pour tout entier B tel que $\sum_{i=1}^{k} a_i > A(k-p)-B$, et tout entier $m \geqq p$.

Par exemple, pour calculer $D(n;1,2,4):=D(n)$ à l'aide de (6), on utilise les premières valeurs de $D(n)$ (calculées au moyen de $D(n;1,2)$)

n	0	1	2	3	4	5
$D(n)$	1	1	2	2	4	4

ce qui donne $D(4m)=D(4m+1)=(m+1)^2$, $D(4m+2)=D(4m+3)=(m+1)(m+2)$.
Évidemment, en calculant

n	6	7	8	9	10	11
$D(n)$	6	6	9	9	12	12

avec (5), on peut utiliser (2) pour acquérir les égalités précédentes. Nous insistons qu'on peut faire décroître ainsi le nombre des premières valeurs nécessaires au commencement.

Et puis, on a une identité qu'on voit dans [2], c'est ce qui suit

(7) $$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{z-k}{r-1}\binom{r}{k}=\binom{z-n}{r}\binom{r}{n}\frac{r-n}{z-r+1},$$

pour tout entier $r \geqq 1$, tout entier $n \geqq 0$, et tout nombre complexe z.

RÉFÉRENCES

[1] E.T.Bell (1943): Interpolated denumerants and Lambert series, A.M.J., 65, pp.382-386.
[2] S.Kuriki (1977): Une Identité Introduite par le Dénumérant, TRU M., 13-1, pp.53-54.