氏名（本籍）	**松元久明**（栃木県）
学位の種類	博士（理学）
学位記番号	乙第 1105 号
学位授与の日付	平成 28 年 3 月 18 日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 2 項該当
学位論文題目	**Studies of a random sampling and stochastic processes on the ring of p-adic integers** **（p- 進整数環上のランダムサンプリングおよび確率過程に関する研究）**
論文審査委員	（主査）教授　金子　宏 教授　安部　直人　　教授　加藤　圭一 教授　吉岡　朗　　准教授　横田　智巳 慶應義塾大学　経済学部　教授　厚地　淳

論文内容の要旨

フラクタル上の確率分析の起源は 1980 年代であり, 福島氏, 服部氏らによって主に創始された. それに続き, 木上氏, 楠岡氏, 熊谷氏 および メッツ氏は、フラクタルの自己相似構造に着目して研究をした. それから十年の後, p-進体 $\mathbb{Q}_p$ 上の確率過程に関する研究が, アルベベリオ氏 および カルヴォフスキー氏 によって始められた. 彼らの方法は、その階層構造に依存して確立されたが, それとは別にフラクタル上の解析に一つの独立した形で, 自己相似性を伴ったハール測度が導入され, フラクタル解析の場合におけるディリクレ空間などの関数空間を構築することの中心的な役割を果たした.

本論文では, p 進体 $\mathbb{Q}_p$ の部分集合である p-進整数環 $\mathbb{Z}_p$ 上でのランダムサンプリングおよび確率過程に関する研究結果を報告する.

まず第 2 章では, p-進整数環 $\mathbb{Z}_p$ において, p-進 Van der Corput 列が 1 次元トーラス上のワイルの無理数回転と同等の役割を果たすことを示す.

Proposition 1 (Proposition 2.1) $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ とする. このとき, 集合

$$U(\alpha) = \left\{ \left[\frac{n\alpha}{p^m}\right]_p \,\middle|\, n \in \{0, 1, \dots, p^m - 1\}, m \in \{1, 2, \dots\} \right\}$$

が $\mathbb{Z}_p$ で稠密であるための必要十分条件は, $\alpha \notin \mathbb{Q}$ である.

p-進整数環において, ワイルの無理数回転と同様の役割を果たしている数列はこれまで提唱されていなかった. 対応する構築する過程において, 定義域が p-進体上に自然に拡張された加法的指標関数に基づいてサンプリング方法が挙げることになる.
その応用例として, 杉田と高信によって提案されたものと同等なランダムワイルサンプリングを p-進整数環 $\mathbb{Z}_p$ 上で提示する.

Theorem 2.4
複素数値関数 $f \in L^2(\mathbb{Z}_p, \mu)$ に対して,

$$\left\{ f(x + \alpha x_n) - \int_{\mathbb{Z}_p} f(y)\, dy \right\}_{n=0}^{\infty}$$

は $L^2(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p, \mu \times \mu)$ における直交系をなし,

$$\iint_{\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p} \left| f(x + \alpha x_n) - \int_{\mathbb{Z}_p} f(y)\, dy \right|^2 dx d\alpha = \mathrm{Var}(f).$$

特に,

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(x + \alpha x_n) = \int_{\mathbb{Z}_p} f(y)\, dy \quad \mu \times \mu\text{-a.e. } (x, \alpha),$$

であり, 任意の正整数 N に対して,

$$\iint_{\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(x + \alpha x_n) - \int_{\mathbb{Z}_p} f(y)\, dy \right|^2 dx d\alpha = \frac{1}{N} \mathrm{Var}(f).$$

Theorem 2.7
$1 < q < 2$ であるような任意の実数 q と複素数値関数 $f \in L^2(\mathbb{Z}_p, \mu)$ に対して,

$$\lim_{N \to \infty} \iint_{\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p} \left| \sqrt{N} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(x + \alpha x_n) - \int_{\mathbb{Z}_p} f(y)\, dy \right) \right|^q dx d\alpha = 0.$$

次に, 第 3 章では, p-進整数環上における確率過程の新たな構築の方法を紹介する. 従来では, p-進整数環上の確率過程の構成は, コルモゴロフの方程式に依存するものが主流であった. 本章では, p-進整数環が持つ自己相似性に注目し, 木上淳氏による自己相似性に立脚したフラクタル上の確率過程の構成の方法に工夫を施すことで, 新たな構成手法が得られた.

Theorem 3.18
$L^2(\mathbb{Z}_p; \mu)$ 上の正則ディリクレ形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は, 正整数 m に対して $a(-m) = \frac{\{(p-1)(c+p)\}^{m-1}}{p^m}$, 非負整数 m に対して $a(m) = 0$ であるような数列 $\{a(m)\}_{m=-\infty}^{\infty}$ によって特徴づけられるランダムウォークを生成する.

第 4 章では, p-進整数環上に構成されるランダムフラクタルにおけるマルコフ過程の収束について述べる. このようなランダムフラクタルに関しては, 上述の規則的な自己相似性が崩れるため, その上での上記の確率過程の構成は困難であった. そこで, モスコ収束という概念を使用することにより, ランダムフラクタルの構成過程において出現するランダムフラクタルに準じた集合列上の確率過程の列が, ランダムフラクタル上の確率過程へ収束することを示した.

Theorem 4.6

(i) Dirichlet 形式の列 $\{\mathcal{E}_k\}$ は $\mu_0(\mathbb{Z}_p) > 0$ の下で $k \to \infty$ のときに $\mathcal{E}$ に確率 1 で収束する,

(ii) 任意の $\lambda > 0$ に対して, リゾルベント作用素の列 $\{G_\lambda^{(k)}\}$ は $\mu_0(\mathbb{Z}_p) > 0$ の下で $k \to \infty$ のときに G_λ に確率 1 で KS-収束する,

(iii) for any $t > 0$, 半群作用素の列 $\{P_t^{(k)}\}$ は $\mu_0(\mathbb{Z}_p) > 0$ の下で $k \to \infty$ のときに P_t に確率 1 で KS-収束する.

Theorem 4.8 $\mu_0(\mathbb{Z}_p) > 0$ とする. このとき P^{μ_k} のもとでのハント過程 $\{X_t^{(k)}\}$ は P^{μ_0} のもとでのハント過程 $\{X_t^{(0)}\}$ に $\mathbf{D}_{\mathbb{Z}_p}([0,t])$ において, 確率 1 で弱収束する.

最後に, 第5章では, ルートをもつ木の末端集合 Σ^+ として得られる超距離空間上での確率過程について議論する. また, この確率過程に基づいて, オーリッチ空間を構成, 有用な応用として, ソボレフ-オーリッチ容量の評価についても述べる.
まず, ヤング関数 $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ に対して, $\Omega \subset \Sigma^+$ 上のオーリッチ空間 $L^\Phi(\Omega)$, およびその上で機能するルクセンブルクノルム $\|\cdot\|_{L^\Phi(\Omega)}$ を定める. Σ^+ の開部分集合 O に対して 核 V_r を用いた 2 種類のソボレフ-オーリッチ容量 $\mathcal{P}_{V_r,\Phi}(O)$, $\widetilde{\mathcal{P}}_{V_r,\Phi}$ を次のように定める:

$$\mathcal{P}_{V_r,\Phi}(O) = \inf\left\{ \|f\|_{L^\Phi} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ is non-negative and } (V_r f)(x) \geq 1 \text{ a.e.} \\ \text{with respect to } \mu \text{ on } O \end{array} \right\},$$
$$\widetilde{\mathcal{P}}_{V_r,\Phi}(O) = \inf\left\{ \|V_r f\|_{L^\Phi} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \in L^2(\Sigma^+;\mu) \text{ and } (V_r f)(x) \geq 1 \text{ a.e.} \\ \text{with respect to } \mu \text{ on } O \end{array} \right\}.$$

これを用いて, Σ^+ の任意の部分集合 E に対してソボレフ-オーリッチ容量 $\mathcal{P}_{V_r,\Phi}(E)$, $\widetilde{\mathcal{P}}_{V_r,\Phi}(E)$ を次のように定める:

$$\mathcal{P}_{V_r,\Phi}(E) = \inf\{\mathcal{P}_{V_r,\Phi}(O) \mid E \subset O, O \text{ is open}\},$$
$$\widetilde{\mathcal{P}}_{V_r,\Phi}(E) = \inf\{\widetilde{\mathcal{P}}_{V_r,\Phi}(O) \mid E \subset O, O \text{ is open}\}.$$

このとき, 次のような容量に対する評価式が得られた.

Theorem 5.24 任意の ν に対して $(\lambda_\nu + 1) \geq \frac{1}{\delta_\nu}\int_0^{\delta_\nu} \varphi(t)\,dt$ であるならば,

$$\widetilde{\mathcal{P}}_{V_1,\Phi}(\{\zeta\}) \leq C_\Phi^{1/2}\sqrt{\mathrm{C}_{1,2}(\{\zeta\})}$$

が任意の $\zeta \in \Sigma^+$ に対して成り立つ.

Theorem 5.25 $\zeta \in \Sigma^+$ がある条件をみたし, $x \in T_n$ and $\zeta \in \Sigma_x^+$ によって定まる数列

$$\theta_n = \frac{1}{C_n^p}\int_0^{\delta(x,j(\zeta))} \varphi(t)\,dt \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

が $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\theta_n^{\frac{1}{p-1}}+1} < \infty$, をみたすならば,

$$P_{V_r,\Phi}(\{\zeta\}) \geq \theta_0^{1/p} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\theta_0^{\frac{1}{p-1}}}{\theta_k^{\frac{1}{p-1}} + \theta_0^{\frac{1}{p-1}}}\right) > 0.$$

Theorem 5.26 $\frac{1+\alpha}{2\alpha(\alpha-1)} < 1$ かつ $\alpha^n \geq (\lambda_{\nu_n}+1)^{r/2}$ $(n=0,1,2,\ldots)$ をみたすような正定数 α が存在するならば,

$$\mathcal{P}_{V_r,\Phi}(\{\zeta\}) \leq \liminf_{n\to\infty}\left(\epsilon^{pn}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\alpha}{\epsilon}\right)^{p(k-1)}\mu(\Sigma^+_{\nu_{k-1}})\varphi\left(\frac{1}{\mu(\Sigma^+_{\nu_k})}\right)+A_n\right)^{1/p},$$

ここで $\epsilon = \frac{1+\alpha}{2\alpha(\alpha-1)}$, $A_n = \alpha^{pn}\int_0^{\mu(\Sigma^+_{x_n})}\varphi\left(\frac{1}{t}\right)dt$. 特に,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{\epsilon}\right)^{p(k-1)}\mu(\Sigma^+_{\nu_{k-1}})\varphi\left(\frac{1}{\mu(\Sigma^+_{\nu_k})}\right) < \infty \quad \text{かつ} \quad \liminf_{n\to\infty} A_n = 0,$$

すなわち $\mathcal{P}_{V_r,\Phi}(\{\zeta\}) = 0$.

これらの手順により, 近年研究され始めた木の末端の確率解析の枠組みの開発に基づいたスペクトル解析的な視点から, 容量の評価を導出することが可能となる。特に, 末端として与えられた１点集合に対する容量の評価に焦点を当てる.

論文審査の結果の要旨

審査は次のようなプロセスにより実施された。４０分の審査対象者によるプレゼンテーションおよび審査委員による質疑２０分と審査対象者による回答を一回の審査とし，それを２回行った。プレゼンテーションで使用したマテリアルおよび主論文の英語による作成状況から，英語力の計測を行い，プレゼンテーションにおける専門的な概念の説明の状況，結論導出の方法論の適切さ，および説明の完成度の状況により，研究遂行能力および到達度の高さを計測した。その後直ちに，審査委員会を開催し，内容に関する講評を審査委員が相互に述べ合った。

さらに公聴会における発表とその直後の聴衆からの質疑および応答を合わせる形で１回分の審査を行った。最終審査として，審査委員会を開催し，専門外の研究者からの質疑も念頭におきつつ，研究の位置付けについての見解を審査委員が相互に述べ合った。

問題設定の構成要素の中に，代数的な設定が含まれるとともに，自己相似性に論拠をおいた幾何学的な要素や，関数空間の適用なども含めた広範な内容が含まれていたため，質疑応答による総合的な学力の計測が可能であった。

総合的な評価として大変申し分ない到達度が認められ，学位授与にふさわしい学問的総合力が備わっているとの見解が審査委員全員により共有された。

主論文を構成する各章は次のような構成である。第２章では，p 進整数環上の無理数に基づく疑似乱数の体系化が示されている。具体的にはトーラス上での既存の疑似乱数の体系化の一つに，ワイルの無理数回転を基礎とするものがあるが，p 進整数環

上の無理数に基づく疑似乱数理論の展開が，ファン・デア・コルプト列によって可能となることが報告されている。

第３章では，p 進整数環の自己相似性と木上淳氏のフラクタル上の確率過程の構成理論に論拠をおいた，ディリクレ形式による p 進整数環上の確率過程の構成理論の確立もなされている。これは，非負整数全体集合の超距離に関する完備化による p 進整数環の構成と，全く同時並行的な確率過程の構成のプロセスを踏むことによってなされているという観点において，木上淳氏の理念の通用する範囲の広さを示すものとして，意味の明確さがわかる研究である。

第４章では，第３章の確率過程の構成の過程でディリクレ形式のモスコ収束列が得られることに注目したものである。実際，類似性を持つディリクレ形式の列が，ランダムフラクタルの構成の過程でも得られるが，実はそこではより一般性のある，一般化されたモスコ収束による議論が適用されるべきであることに注意が払われている。そのための理論的整備を着実に行うことにより，p 進整数環上の確率過程の収束理論の一般的枠組みが打ち立てられることが述べられている。

第５章では，木構造の末端点集合のソボレフ・オーリッチ容量のスペクトル解析に基づく評価方法を，新たに展開する事にも成功している。

審査対象者から，大変変申し分ない達成度が認められた大きな理由として，これらの研究の到達度の質的な高さに対する評価がある。