

氏名（本籍） しま くら まさ みつ 島 倉 雅 光（新潟県）  
 学位の種類 博士（理学）  
 学位記番号 甲第 1148 号  
 学位授与の日付 2018 年 3 月 19 日  
 学位授与の要件 学位規則第 4 条第 1 項該当  
 学位論文題目 **Studies on the Hochschild cohomology ring  
 of integral cyclic algebras and on the Galois  
 extensions arising from algebraic tori**  
 （整係数巡回多元環のホッホシルトコホモロ  
 ジーと代数的トーラスによって引き起こされ  
 るガロア拡大の研究）

論文審査委員 （主査）教授 木田 雅成  
 教授 眞田 克典 教授 関川 浩  
 教授 江川 嘉美 准教授 功刀 直子

## 論文内容の要旨

本論文では、ホッホシルトコホモロジー、およびガロア拡大に関する研究を行い、主に 2 つの結果を得た。

第 1 の結果は整係数巡回多元環のホッホシルトコホモロジーに関するものである。多元環のホッホシルトコホモロジーは Hochschild (1945) により定義された。特にホッホシルトコホモロジー環は森田同値や導来同値の不変量として多元環の表現論において重要であり、様々な多元環に対して計算されている。

本論文で扱う記号を以下のように定義する。  $\mathbb{Z}$  を有理整数環とし、素数  $p$  に対し  $\zeta$  を 1 の原始  $p$  乗根、 $\omega = 1 - \zeta$  とおく。  $R = \mathbb{Z}[\zeta]$  と定め、 $a, b$  を 0 でない有理整数とし、 $d$  を  $a$  と  $b$  の最大公約数とする。

巡回  $R$ -多元環  $\Gamma$  を次のように定める：

$$\Gamma = \bigoplus_{0 \leq k, l \leq p-1} Ri^k j^l \quad \text{ただし} \quad i^p = a, \quad j^p = b, \quad ji = \zeta ij.$$

特に  $p = 2$  の場合,  $\Gamma$  は有理整数環  $\mathbb{Z}$  上の一般四元数環に一致する:  $\Gamma = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i \oplus \mathbb{Z}j \oplus \mathbb{Z}ij$  ( $i^2 = a, j^2 = b, ji = -ij$ ).

$\Gamma$  の  $m$  次ホッホシルトコホモロジー群  $HH^m(\Gamma)$  及びホッホシルトコホモロジー環  $HH^*(\Gamma)$  は次のように定義される:

$$HH^m(\Gamma) = \text{Ext}_{\Gamma^e}^m(\Gamma, \Gamma) \quad (m \geq 0), \quad HH^*(\Gamma) = \bigoplus_{m \geq 0} HH^m(\Gamma).$$

ここで  $\Gamma^e$  は包絡多元環  $\Gamma \otimes_R \Gamma^{op}$  である. また,  $HH^*(\Gamma)$  は次数付き環である.

$HH^m(\Gamma)$  及び  $HH^*(\Gamma)$  の構造に関しては, 任意の素数  $p$  かつ  $b = -1$  で定まる巡回多元環  $\Gamma$  の場合や,  $p = 2$ , つまり  $\Gamma$  が一般の四元数環の場合について先行研究がある (Hayami (2013), Sanada (1993), Ushiki (2012)). 本論文ではこれらの結果を, 任意の素数  $p$  かつ任意の  $0$  でない有理整数  $a, b$  の場合に一般化した.

まず,  $m$  次ホッホシルトコホモロジー群  $HH^m(\Gamma)$  の  $R$ -加群の構造について, 以下の結果を得た.

定理 1 上で定めた巡回多元環  $\Gamma$  の  $m$  次ホッホシルトコホモロジー群  $HH^m(\Gamma)$  について次の同型が成り立つ.

$$HH^m(\Gamma) \cong \begin{cases} R & \text{for } m = 0, \\ (R/dpR)^{(m-1)/2} \oplus (R/d\omega R)^{(m+1)/2} \oplus (R/\omega R)^{(p^2-2)(m+1)/2} & \text{for } m \text{ odd,} \\ (R/dpR)^{(m-2)/2} \oplus (R/d\omega R)^{m/2} \oplus (R/\omega R)^{(p^2-2)m/2} \oplus (R/apR) & \\ \oplus (R/bpR) & \text{for } m (\neq 0) \text{ even.} \end{cases}$$

そして  $HH^*(\Gamma)$  上のカップ積を計算することで, 主結果として  $HH^*(\Gamma)$  の環構造を次のように決定した (生成元の間関係式も得られているが, ここでは省略する).

定理 2 (1)  $p$  が奇素数,  $a, b$  が  $0$  でない有理整数の場合,  $HH^*(\Gamma)$  は,  $HH^1(\Gamma)$ ,  $HH^2(\Gamma)$ ,  $HH^3(\Gamma)$  の高々  $p^2 + 4p - 3$  個の元により生成される. 特に,  $p$  が奇素数,  $|a| = |b| = 1$  の場合,  $HH^*(\Gamma)$  は,  $HH^1(\Gamma)$  の  $p^2 - 1$  個の元,  $HH^2(\Gamma)$  の 2 個の元,  $HH^3(\Gamma)$  の 1 個の元, 合計  $p^2 + 2$  個の元により生成される.

(2)  $p = 2$  かつ  $a, b$  が  $0$  でない有理整数の場合,  $HH^*(\Gamma)$  は,  $HH^1(\Gamma)$ ,  $HH^2(\Gamma)$  の高々 8 個の元により生成される. 特に,  $p = 2$  かつ  $|a| = |b| = 1$  の場合,  $HH^1(\Gamma)$  の 3 個の元で生成され, 次の環同型が成り立つ:

$$HH^*(\Gamma) \cong \mathbb{Z}[x, y, z]/(2x, 2y, 2z, x^2 + y^2 + z^2), \quad \deg x = \deg y = \deg z = 1.$$

第 2 の結果は代数的トーラスから得られるクンマー拡大の分岐に関する結果である.

代数体のガロア拡大の構成やその数論的性質の研究は代数的整数論における基本的な課題である。古典的なクンマー理論により、1の $n$ 乗根が含まれる体 $K$ 上の巡回拡大は $a \in K^\times$ を用いて $K(\sqrt[n]{a})$ の形で得られる。 $n$ が素数の時に、Hecke (1923)はこの拡大での素数の分岐に関する結果を得ている。

一方、クンマー理論は、1のべき根を含まない体に対しても、代数的トーラスを使って拡張されている (Kida 2010)。 $T$ を体 $K$ 上定義された代数的トーラスで、ある条件をみたす自己同種写像 $\lambda$ があるとき、

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(\overline{K}/K), \mathrm{Ker}\lambda(\overline{K})) \xrightarrow{\sim} T(K)/\lambda T(K)$$

が成り立ち、 $K$ 上の巡回拡大は $T$ の $K$ 有理点 $P$ の $\lambda$ に関する逆像を添加して $K(\lambda^{-1}(P))$ の形で得られるというのがその一般化である。

第2の結果は、この拡大 $K(\lambda^{-1}(P))/K$ の分岐を与えるものである。主定理はこの拡大の分岐の激しさを表す量である導手を記述するものであり、古典的なクンマー拡大の分岐に関するHeckeの理論の一般化になっている。

主定理を述べるために次の記号を定義する。 $p$ を奇素数とし、 $\mathbb{Q}_p$ を $p$ 進体、 $\overline{\mathbb{Q}_p}$ を $\mathbb{Q}_p$ の代数閉包とする。ここで $\mathbb{Q}_p$ の代数拡大はすべて $\overline{\mathbb{Q}_p}$ に含まれることを仮定する。 $\zeta_p$ を1の原始 $p$ 乗根とする( $\zeta_p \in \overline{\mathbb{Q}_p}$ )。  $k$ を $\mathbb{Q}_p$ 上 $n$ 次不分岐拡大とおき、 $k_z = k(\zeta_p)$ と定め、 $K$ を $k_z/k$ の中間体とする。

$v_{k_z}$ を $k_z$ 上の正規化された離散付値とし、 $k_z$ の単数群 $U(k_z)$ 及び $i$ 次主単数群 $U^{(i)}(k_z)$ をそれぞれ次で定義する：

$$U(k_z) = \{u \in k_z \mid v_{k_z}(u) = 0\},$$

$$U^{(i)}(k_z) = \{u \in k_z \mid v_{k_z}(u - 1) \geq i\} \quad i \in \mathbb{N}.$$

$K$ 上定義された乗法群 $\mathbb{G}_m$ のヴェイユ制限 $R_{k_z/K}\mathbb{G}_m$ を $T$ とおく。今、 $K$ 上定義された次数 $p$ の自己同種写像

$$\lambda : T \longrightarrow T$$

であって、 $\mathrm{Ker}\lambda(\overline{K}) \subset T(K)$ を満たすものの存在を仮定する。このとき、先に述べたクンマー同型が成立し、次の定理が成り立つ。

定理3  $p$ を奇素数とする。 $K/k$ の拡大次数を $m$ とする。 $\widehat{T} = \mathrm{Hom}(T, \mathbb{G}_{m, k_z})$ を $T$ の指標群とし、各 $i \geq 1$ に対し

$$T^{(i)}(K) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(k_z/K)}(\widehat{T}, U^{(i)}(k_z))$$

を定める. また,  $d = (l-1)/m$  とする.

もし, ある  $0 \leq j \leq m$  に関して  $P \in T^{(jd+1)}(K)$  かつ  $P \notin T^{(jd+2)}(K)$  が成り立つならば,  $K(\lambda^{-1}(P))/K$  の導手  $f$  は次で与えられる:

$$v_K(f) = \begin{cases} m-j+1 & 0 \leq j < m, \\ 0 & j = m. \end{cases}$$

特に  $K(\lambda^{-1}(P))/K$  が不分岐拡大であるための必要十分条件は  $P \in T^{(p)}(K)$  であることである.

この結果を用いることで, 与えられた導手  $f$  をもつ  $K$  上  $p$  次巡回拡大の同型類の個数を以下のように決定できる.

定理 4  $p$  を奇素数とする. 各  $0 \leq j < m$  に対し,  $K$  の  $p$  次巡回拡大であって, 導手  $f$  が  $v_K(f) = m-j+1$  を満たす体の個数は同型を除いて  $p^{(m-(j+1))n+1}(p^m-1)/(p-1)$  である.

## 論文審査の結果の要旨

本学位論文で申請者は, 多元環論および代数的整数論に関連する二つの事柄に関する結果を得ている.

申請者の最初の結果は, 整係数巡回多元環の Hochschild コホモロジーに関するものであり, 学位論文の第 2 章に述べられている.

$p$  を素数とし,  $\zeta$  を 1 の原始  $p$  乗根とし,  $R = \mathbb{Z}[\zeta]$  を円の  $p$  分体の整数環とする.  $0$  でない整数  $a, b$  に対して, 巡回  $R$  多元環  $\Gamma$  は  $\Gamma = \bigoplus_{0 \leq k, l \leq p-1} Ri^k j^l$  ( $i^p = a, j^p = b, ji = \zeta ij$ ) で定義される.  $p = 2$  のときは,  $\mathbb{Z}$  上の一般四元数環に一致する.

また, Hochschild コホモロジーは森田同値や導来同値の不変量として多元環の表現論において重要なものである. この論文の主結果は  $\Gamma$  の  $m$  次 Hochschild コホモロジー群  $HH^m(\Gamma)$  の構造, および  $HH^*(\Gamma) = \bigoplus_{m \geq 0} HH^m(\Gamma)$  で定義される次数つき環である Hochschild コホモロジー環  $HH^*(\Gamma)$  の生成元およびその間の関係式を与えるものである. これは  $p = 2$  の場合や  $|a| = |b| = 1$  の場合に対する Sanada (1993), Hayami (2013) 等の先行結果を拡張する一般的な定理になっている.

この定理の証明のために, 申請者は  $\Gamma$  の両側射影分解を具体的に求め, 長大かつ精密な具体的計算の末, 結果を得ている.

申請者の二番目の結果は巡回拡大における分岐に関するものであり, 学位論文の第 3 章をなしている.

古典的な Kummer 理論により, 1 の  $n$  乗根が含まれる体  $k$  上の巡回拡大が  $k(\sqrt[n]{a})$  の形で得られる.  $n$  が素数の時に, Hecke (1923) はこの拡大での素数の分岐に関する結果を得ている.

一方, Kummer 理論は, 1 のべき根を含まない体に対しても, 代数的トーラスを使って拡張されている (Kida 2010).  $T$  を体  $k$  上で定義された代数的トーラスで, ある条件をみたす自己同種写像  $\lambda$  があるとき,  $k$  上の巡回拡大は  $T$  の  $k$  有理点の  $\lambda$  に関する逆像を添加して  $k(\lambda^{-1}(P))$  の形で得られるというのがその一般化である.

申請者の二番目の論文の主定理は, この形の拡大の分岐を与えるものである. この問題は局所的な問題なので,  $k$  は  $p$  進体の有限次拡大としてよい. 同種写像  $\lambda$  の次数が  $p$  であるときに, 拡大体  $k(\lambda^{-1}(P))/k$  は  $p$  次巡回拡大体になる. 申請者の主定理はこの拡大の分岐の激しさを表す量である導手を  $p$  の関数として与えている. より具体的に述べれば, トーラスの有理点の群  $T(k)$  には自然な部分群の列が定まり,  $P$  がその中で, どの部分群に含まれるかによって,  $k(\lambda^{-1}(P))/k$  の導手が計算できるというのが主定理の内容である. これは Hecke の定理の一般化を与える結果である. その証明には局所体の単数群の Galois 加群としての詳細な構造が用いられている.

また, この定理の応用として, 与えられた導手をもつ,  $p$  次拡大の個数を勘定することができる.

以上, 本論文で申請者が得た結果は, 多元環論および整数論に新しい知見を与えるものとして高く評価できるものである. したがって, 本論文は学位 (博士) 論文として十分に価値あるものと認められる.