博士号申請論文

数学普通教育の水準向上を目的とする 数学的能力に関する基礎研究

才能者を中心とした数学的能力の判別と分類

科学教育研究科　科学教育専攻

C112705　田村 篤史

論文概要

1995 年に施行された科学技術基本法は, わが国の科学技術政策の基本的な枠組みを与え,「科学技術創造立国」を目指して科学技術の振興を強力に推進していく上でのバックボーンとして位置づけられる法律である．科学技術の振興を通し，より豊かな国民生活の実現を目指すとされる［文部科学省 95]．

さらに，2006 年に内閣府の示した第 3 期科学技術基本計画は，重要政策の 1 つとして「理数好きの子どもの裾野の拡大」と「興味・関心の高い子どもの個性や能力の伸長」を挙げ，その中で

> 次代を担う人材養成に向けては，初等中等教育段階から子どもが科学技術を学び,親しむ環境が人的・物的に充実される必要がある．（中略）
>
> 理科や数学に興味・関心の高い子どもに対して，効果的な理数教育を行い，科学技術分野において卓越した人材を養成する．

としている［内閣府 06]［科学技術・学術審議会 05]．

このような状況において筆者は，数学の才能を有する子どもたちの才能伸長を目指し，その研究・実践を踏まえた上で，さらにはわが国の数学教育全体の水準向上を目指して研究を行うものである．

筆者の研究における長期的な目的は，わが国の数学教育における卓越性の放射現象の実現である．卓越性の放射現象とは，コネチカット大学教授 Renzulli の「拡充による才能教育によって教育全体の水準も上がる」とする主張である［Renzulli 88]．拡充とは才能教育の方法の 1 つであり，簡潔に言えば「より広く深い学習」である．それに対し，才能教育のもう 1 つの方法，早修は「より早い履修」と言うことができる．

筆者はまず，いろいろな学力層における数学の才能伸長のモデルを作り，その適用によって，数学教育における Excellence を浸透させたいと考えている．本論文の目的をここに

置きたい.

この目的が実現できれば，それを受け，“Math for Excellent”の教材開発，および“Math for Excellent”をもとにした“Math for All”の教材開発を行いたい．それらの開発および実践によって最終的には卓越性の放射現象の実現を目指すものである.

一般に早修は才能者を選抜し，かつ，いわゆる飛び級・飛び入学を伴う．拡充もその種類によっては生徒の選抜を行うが，筆者は生徒の選抜を行わず，通常の学校教育の一部としての指導プログラムで卓越性の放射現象の実現性を検討するものである.

本研究のおおまかな流れを述べる.

長期的な目的の基盤，すなわち本論文の目的に向けたスキームとして，まず，数学的能力の判別ができる質問紙を開発する.

次に，日本数学オリンピック予選参加者（予選合格者，不合格者)，一般的な高校生にアンケート調査を行う．一般的な高校生とは各都県の公立高校のうち，上位校，中位校，下位校から 1 校ずつ，同様に私立高校のうち，上位校，中位校，下位校から 1 校ずつ，合計 6 校の生徒たちのことを言う（Ⅲ−４)．このように，日本数学オリンピック予選合格者，不合格者，上位校，中位校，下位校の 5 つのグループを抽出した理由の 1 つは，質問紙の判別性能，信頼性・妥当性の検証のためである．もう 1 つの理由は，卓越性の放射現象を目指した「才能伸長モデル」を構築するためである.

日本数学オリンピック予選参加者全体と予選合格者, 不合格者に対して因子分析を行い，それらの 3 つのグループの数学的特性を検討する．また，予選合格者と不合格者の差異を検討し，本選合格者のプロファイリングも行う.

さらに，日本数学オリンピック予選合格者，不合格者，上位校，中位校，下位校の 5 つのグループに対してクラスタ分析を行い，それぞれのグループの数学的特性を検討する．予選合格者と不合格者に関しては，因子分析とクラスタ分析の 2 つの統計分析を行うことによって，より確かな検証ができると思われる.

日本数学オリンピック本選合格者のプロファイリングを受け, 数学的才能者を定義する．さらに上位校において高学力者を定義し，双方の相互作用を検証する．この事例研究によって，限定的ではあるが卓越性の放射現象の確認ができる.

最後に，わが国の通常の教育プログラムの一部としての才能教育の可能性を論じ，才能者との相互作用を一般化した才能伸長モデルを提示する.

本論文の構成と要旨を述べる．

第Ⅰ章では，研究の目的と背景を示した．さらに，才能教育の成り立ち・歴史的な背景を踏まえ，研究の長期的展望を示した．

第Ⅱ章では，才能教育や才能伸長に関する先行研究のレビューを行った．本研究は高い数学的才能を有する生徒の思考過程や思考法を一般の生徒に活用する視点をもって書かれている．また，卓越性の放射現象の実現にあたって，才能者を中心とした数学的能力の判別と分類を行う必要がある．そのため，第Ⅱ章では才能に関する基礎研究について俯瞰している．

第Ⅲ章では，先行研究のレビューを踏まえながら行った質問紙開発のプロセスを示した（Ⅲ－２，Ⅲ－３）．実際に日本数学オリンピック予選参加者 398 人と一般的な高校生 454 人に対してアンケート調査を行ったところ，t 検定と判別分析により，質問紙は非常に高い判別性能を有することが，また，Cronbach の α 係数，天井効果・床効果の検討により，高い信頼性を有することがそれぞれ確認できた．さらに，先行研究における他の質問紙の調査結果との比較によって妥当性も確認された．これまで，国内には数学的能力判別のための質問紙は存在せず，本研究によって初めて開発された．

第Ⅳ章では，日本数学オリンピック予選参加者全体（以下，G0），予選合格者（以下，G1），予選不合格者（以下，G2）のアンケート結果に対して因子分析を行い，それぞれの特性に関して検討した．抽出された因子を簡潔に述べると，柔軟性，表現力，知識，視覚化，興味の 5 つであった（図 1）（Ⅶ－２）．G0 と G2 の因子名は同じであり，G1 と「G0 および G2」の共通因子が知識である．

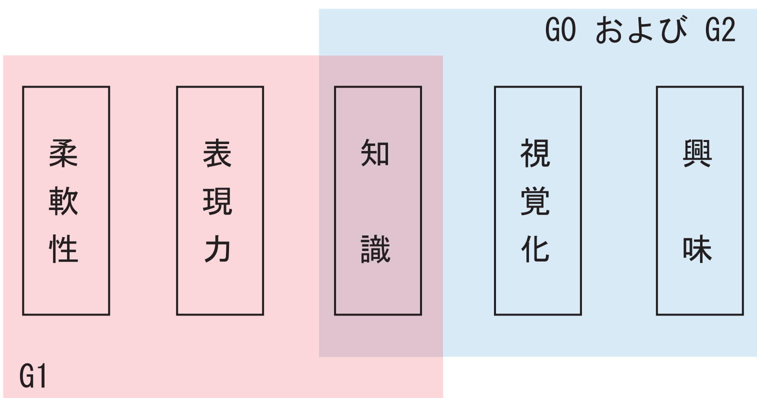


図１　G0，G1，G2 の因子

さらに, t 検定や因子間相関の分析から G1 について確認できた主な事項を以下に挙げる.

① 新しい数学の内容を思い出して簡単に使うことができる, 論理的に推論する, 何を学習したか自分の言葉で表現する, 考察と研究の結果を図や表で適切に要約する, という特性をもち, これらを修得することが予選合格の必要条件であること
② 「数学」について固定的な見方やイメージをもっていないこと
③ 持続的な思考が可能で高い集中力をもち, 修得した事柄の定着率が高いこと
④ 問題の要点と解法を理解し, 考察した結果の要点をも掴み, わかりやすく説明することができること
⑤ 視覚化以上に言語化に長けており, 直観的な理解以上に論理的な理解を求める傾向にあること
⑥ 柔軟性と知識は互いに寄与する可能性が低いこと

一方, G2 については, 能力の高さをもちつつも視覚化に依存する傾向にあることが特徴の 1 つである. G2 を特徴づける因子には互いに正の相関があり, 数学に強い興味をもつと考えられる日本数学オリンピック参加者においては妥当な結論と言える. また, G1 と G2 の差異は, 修得と適用, 論理性, 知識や「数学」に対する認識, 持続性, 視覚化への依存度 等が挙げられ, 予選の合否を分ける特性について新しく**図 2** の結果を得た. **図 2** において, 「柔軟性」や「視覚化 (直観)」が記されているくさび形や平行四辺形の図形は, 縦の幅が大きいほどその特性が強いことを表している.

また，本選合格者に関するプロファイリングから以下の考察を得た．

① 本選合格者は，［Renzulli 78］の才能の三輪概念，［Andrews 09］の才能者の基本的特性，および［Dąbrowski 77］の知性的過度激動を数多くもつこと

② 本選合格者に関しては，一般的な才能者の指導について研究されてきた方法論を，質問紙の 20 個の質問項目について転用でき，その結果，卓越性の放射現象という本研究の基本的方向が可能であると示唆されること

③ ②の 20 個の質問項目について，平均が高く分散が小さいほど，先行研究における一般的な才能者に共通する特性の上位概念に適合すると推察され，一般的な才能者の特性を表す指標としてそれらの項目が適正であることの裏付けとなっていること

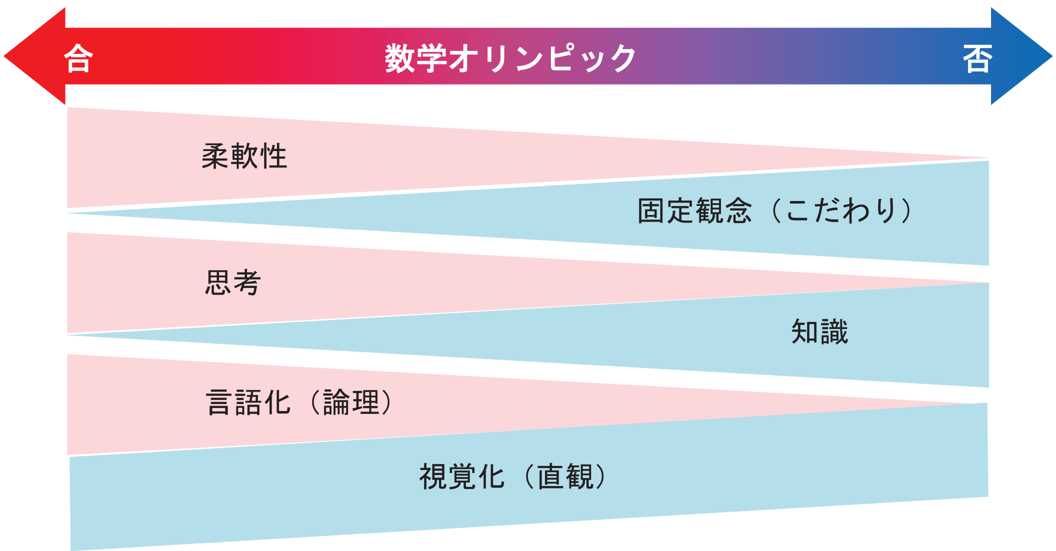


図 2　オリンピック予選の合否とそれを特徴づける能力

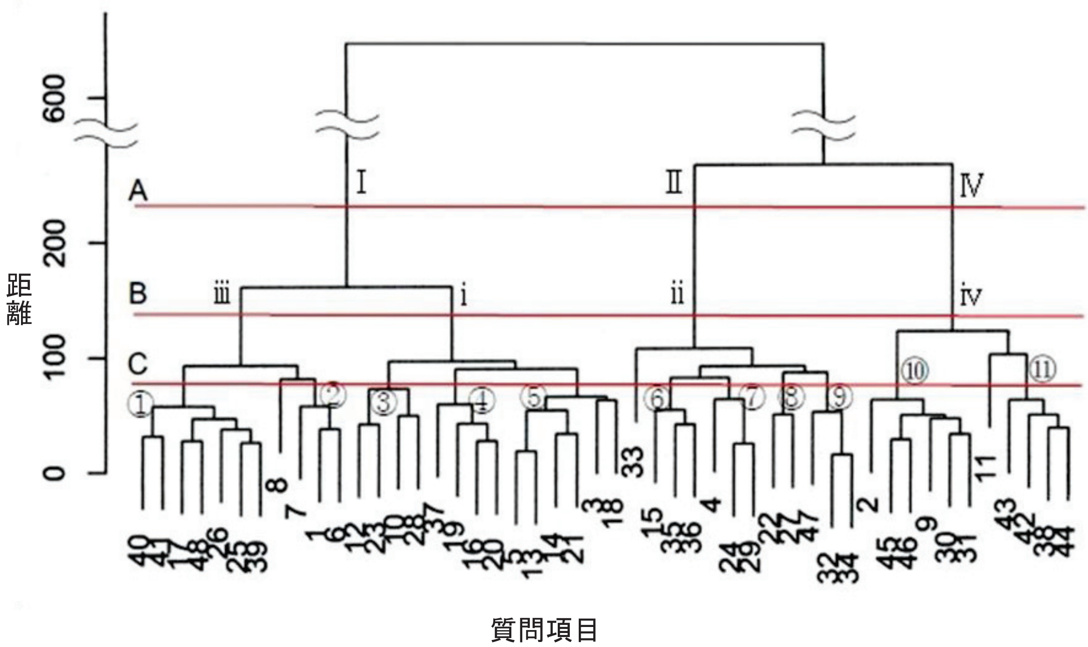


図 3　予選合格者のデンドログラム

第Ⅴ章では，G1，G2，上位校，中位校，下位校（以下，5 グループ）に対するアンケート結果に対してクラスタ分析を行い，それぞれの特性に関して検討した．質問項目同士や質問項目とクラスタ間の距離が遠い順に A，B，C クラスタと名づけた．**図 3** は G1 の例であり，下段の数値は質問項目の番号である．ここで，分析結果の一部を抜粋して掲載する．例えば，G1 は柔軟性，知識，自然な理解力などのクラスタに分割できる．**表 1**，**表 2** は，柔軟性と知識のクラスタを 5 グループのどれがもつのかを示したものである．

表 1　C クラスタによる分類（柔軟性）

<table>
<tr><th>G1</th><th>G2</th><th>上位校</th><th>中位校</th><th>下位校</th></tr>
<tr><td colspan="3">柔　軟　性</td><td colspan="2">な　し</td></tr>
</table>

表 2　C クラスタによる分類（知識）

<table>
<tr><th>G1</th><th>G2</th><th>上位校</th><th>中位校</th><th>下位校</th></tr>
<tr><td colspan="3">知　　識</td><td colspan="2">な　し</td></tr>
</table>

因子分析の結果，柔軟性はG1の因子であり，知識はG1とG2の共通因子であった．クラスタ分析の結果，柔軟性クラスタはG2と上位校ももっており，知識クラスタは上位校ももっていることがわかった．

ここで, Cクラスタの柔軟性がどのBクラスタに属するのか, について検討したところ, G1では表現力・視覚化に属し，G2，上位校では自然な理解力に属していることがわかった（**図4**）．

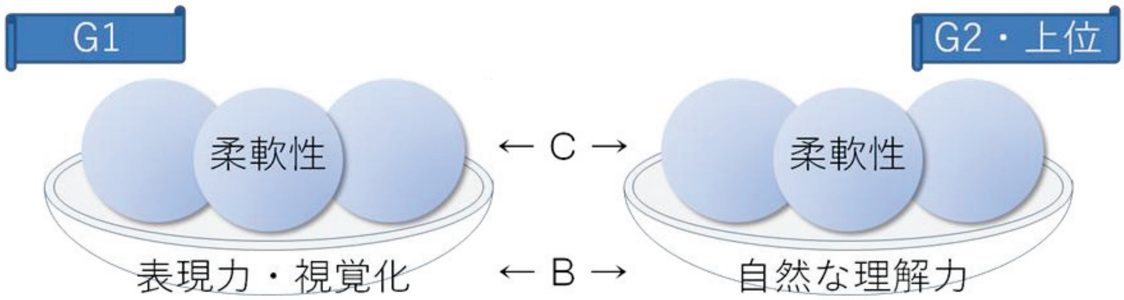


図4　Cクラスタの「柔軟性」のBクラスタにおける属性

因子分析においてG1を特徴づけるのは，柔軟性と表現力であったが（**図1**），このことがクラスタ分析でも確認された．本研究では，因子分析とクラスタ分析の2つの統計分析によって，G1においては柔軟性と表現力が高い相関を有することを示した．

第Ⅵ章では，18歳以下の日本数学オリンピック本選合格者，または数学技能検定1級の合格者を数学的才能者，東京都・神奈川県の私立中学校・高等学校のうち，上位 5.0%以内に属する学校に在籍する生徒を高学力者と定義して, 数学的才能者の思考･行動の特性, 思考過程，および高学力者との相互作用の事例について検討した．

その結果，数学的才能者は，［Renzulli 78］の才能の三輪概念のうち「普通より優れた能力」と「課題への傾倒」を，［Andrews 09］の才能者の基本的特性のうち「高度な集中力」を，［Dąbrowski 77］の知性的過度激動のうち「持続的な知的努力」と「問題解決」,「分析的思考」をもつことが確認できた．また，相互作用の1つとして数学的才能者の思考のあり方が，高学力者の学習の深化を促している点，高学力者の数学に関するイメージを変え，向上心を与えている点から，数学的才能者の思考を授業に取り入れることについては成功したと言える．数学的才能者の思考を授業に用いた先行研究はなく，その点も本

研究の独自性の１つである．

数学的才能者については，モチベーションを与える要素が大きく分けて２つあることがわかった．１つは日本数学オリンピックへの参加とそれに付随して行われた本選合格者の合宿における他者からの刺激であり，もう１つは，所属する学校における刺激であるが，事例研究においては後者の刺激のほうが強かった．

後者については,数学的才能者と高学力者の生徒らの間で,上記の相互作用の他に競争,数学以外の教科，教員・友人との関係，評価などについての作用が確認された．この事例研究の一般化，すなわち，５グループ間のそれぞれに相互作用が期待される．相互作用が確認できれば，それは本研究のねらいである卓越性の放射現象の実現に近づけることを意味している．

第Ⅶ章では，［Brandl 12］を踏まえ，わが国における才能教育の可能性を論じ，第Ⅲ章から第Ⅵ章までのまとめとして才能伸長モデルを提示した．

［Brandl 12］の言う数学的ギフテッドと高達成者については，①異常な社会的行動のない高達成者は，学習環境と内容に関して同じ方向で促進できること，②その高達成者の中に数学的ギフテッドが含まれていること，などが示されている．また，③数学的ギフテッドと高達成者の関係は，本研究の数学的才能者と高学力者の関係に類似している．これらの検討から，数学才能教育のあり方の１つとして，才能者のための学校を設立する，あるいは既存の学校に才能者クラスを設置し才能者を選抜する，という方法をとらず中高一貫校のような継続的に高学力者を教育する学校を中心とした，授業の自由度の高い既存の学校群で高学力者と共存しつつ，才能者の学習を深化・促進させることができる可能性があると言える．

本研究の成果から，［岩永 97c］の指摘する「中高一貫校群が才能教育の実践校として機能できるのか」という疑問に対しては十分機能する可能性がある，と答えることができる．この才能教育モデルは図５のように図式化できる．

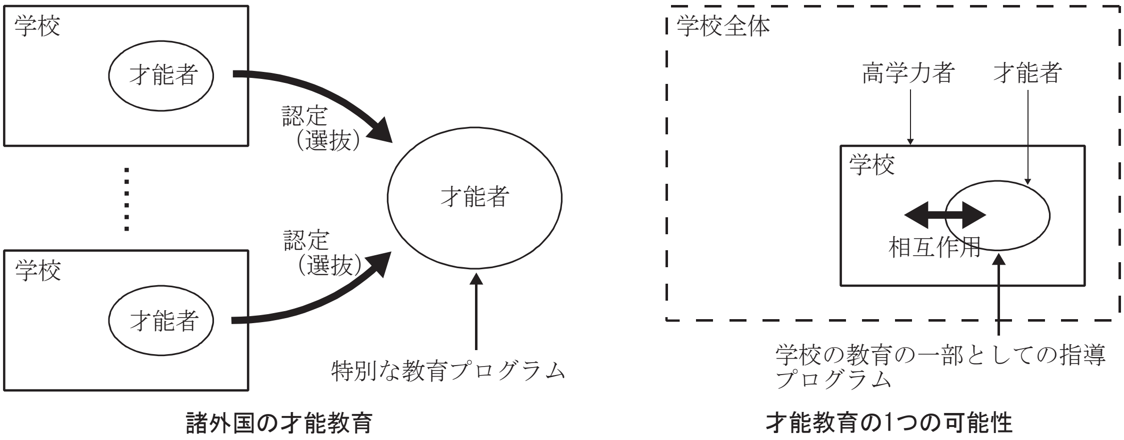


図 5　才能教育の 1 つの可能性

ところで，第Ⅳ章における表現力の要素には言語能力も入っており，また，G1 において，言語化，論理は因子として抽出されていないが，日本数学オリンピックの合否を分ける特性の 1 つであった（図 2）．以上の議論を踏まえ，次の仮説を立てた．

仮説：G1，G2 において，言語能力・論理性の伸長が柔軟性の伸長を促す

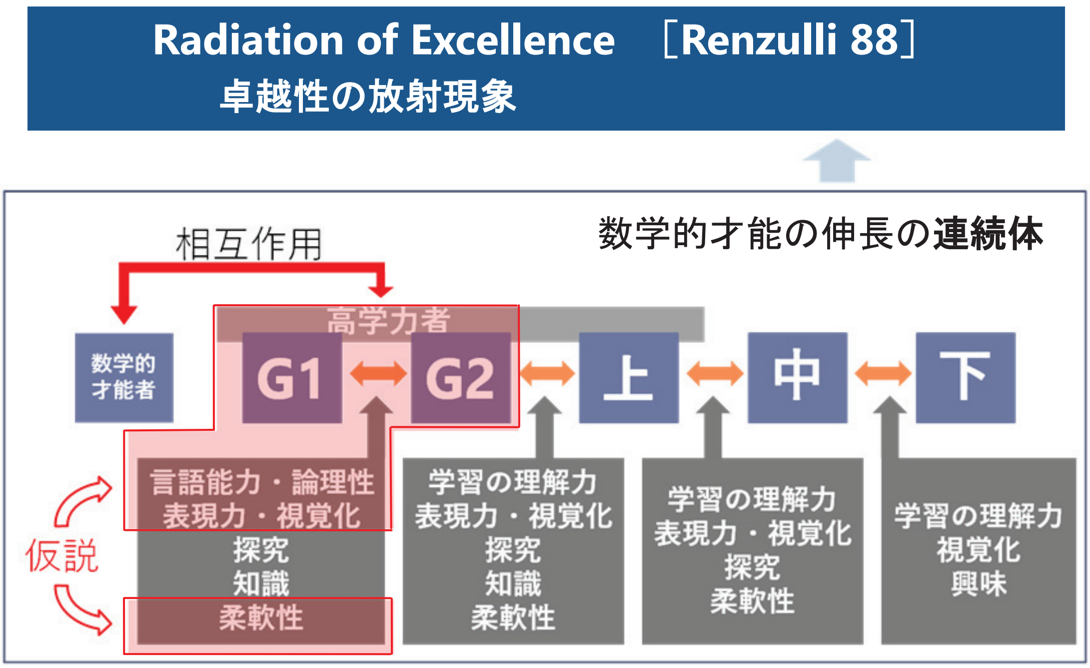


図 6　5 グループ間の相互作用を引き起こす特性

さらに，クラスタ分析の結果から，5 グループ間のそれぞれの相互作用を促すと考えられる要素を挙げることができ（図 6），これは，卓越性の放射現象実現のためのストラテジーの 1 つと考えられる．

Math for Excellent の教材開発については，G1，G2 に関する因子やクラスタの分析から，表現力，視覚化を意識した上で，さらに先ほどの仮説を加えたものが妥当であり，仮説の検証が今後の課題の 1 つである．

なお，本研究では，t 検定，因子分析，クラスタ分析等の統計分析を用い，研究結果の信頼性を高めている．特に G1，G2 の数学的能力に関する特性については，因子分析とクラスタ分析の 2 つの統計分析の両方で同様の結果を得ており，分析結果の信頼性は高いと言える．

参考文献

［Andrews 09］ Andrews, L. J : “GIFTED AND TALENTED EDUCATION: Serving the needs of high-ability students”, JST 理科教育支援センター才能教育シンポジウム資料「米国の才能教育の現状」, 2009

［Brandl 12］ Brandl, M & Barthel, C : “A Comparative Profile of High Attaining and Gifted Students in Mathematics”, 12th International Congress on Mathematical Education Pre-Proceedings, 1429–1438, 2012

［Dąbrowski 77］ Dąbrowski, K & Piechowski, M : “Theory of levels of emotional development”, Dabor Science Publications, 1977

［岩永 97c］ 岩永雅也 : “才能教育をめぐる状況”, 麻生誠, 岩永雅也 編, 創造的才能教育, 玉川大学出版部, pp.172-192, 1997

［科学技術・学術審議会 05］ 科学技術・学術審議会 基本計画特別委員会 : “基本計画特別委員会（第 3 期科学技術基本計画）の重要政策（中間とりまとめ）－2. 科学技術関係人材の養成・確保”, http://www.mext.go.jp/component/b_menu/shingi/toushin/__icsFiles/afieldfile/2013/03/29/1213540_003_1.pdf, 2014.11.3 確認

［文部科学省 95］ 文部科学省 : “科学技術基本法”, law.e-gov.go.jp/cgi-bin/idxselect.cgi?

IDX_OPT=4&H_NAME=&H_NAME_YOMI=%82%a0&H_NO_GENGO=H&H_NO_YEAR=&H_NO_TYPE=2&H_NO_NO=&H_FILE_NAME=H07HO130&H_RYAKU=1&H_CTG=28&H_YOMI_GUN=1&H_CTG_GUN=1, 2014.11.3 確認

［内閣府 06］ 内閣府：“第 3 期科学技術基本計画”, http://www8.cao.go.jp/cstp/kihonkeikaku/kihon3.html, 2014.11.3 確認

［Renzulli 78］ Renzulli, J. S：“What makes giftedness?：Re-examining a definition”, Phi Delta Kappan 60, pp.180-184, 1978

［Renzulli 88］ Renzulli, J. S：“A decade of dialogue on the three - ring conception of giftedness”, Roeper Review Volume 11 Issue 1, pp.18-25, 1988

目次

表目次

図目次

表記に関する注意

・章，節，項，および，それ以下の細目の記号は以下のように定める．

章：Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，…

節：１，２，３，…

項：(1)，(2)，(3)，…

上記以下の細目：ア，イ，ウ，…

：(a)，(b)，(c)，…

また，細目ではないが，いくつかの事項を列挙する場合や，方法の手順等を説明する場合は，

①，②，③，…

を用いる．

Ⅴ－３～Ⅴ－７のクラスタ分析において，デンドログラム中の各クラスタを表す記号として，また，デンドログラムを単純化した図表中の記号としても

①，②，③，…

を用いる．

Ⅰ－１の「研究目的と背景」において，研究目的を列挙する際は

［A］，［B］，［C］，…

を用いる．

Ⅵ-３(1)エの「数学的才能者Ｙが回避策を完成させるまでの過程」において，Ｙの思考過程を時系列で追う際は，

（ア），（イ），（ウ），…

を用いる．

・付録の目次の細目は，以下のように定める．

付録 1，付録 2，…

(1)，(2)，(3)，…

・原則として，小学生を児童，中学生と高校生を生徒と記す．児童と生徒を合わせて子ども，あるいは子どもたちと記載している場合がある．

・原則として，外国の人名や地名は原語表記とする．ただし，国名，州名等，よく知られたものはカタカナ表記とする（例：アメリカ，ドイツ，マサチューセッツ）．

・人名を冠した名詞のうち，よく知られたものについてはカタカナ表記とする（例：マーランド報告，ウェクスラー児童・生徒用知能検査）．

Ⅰ　研究の目的と背景

1　研究の目的と背景

筆者の研究における長期的な目的は，わが国の数学教育における卓越性の放射現象の実現である．卓越性の放射現象（Radiation of Excellence）とは，コネチカット大学（University of Connecticut）教授 Renzulli の「拡充による才能教育によって教育全体の水準も上がる」とする主張である［Renzulli 88］.

わが国の数学教育に関しては，その高い教育力・教師の質に一定の国際的評価を得ている．その一方，特別な教育を必要とする生徒への対応が遅れているとの指摘もある［松村 10］．ここでいう特別な教育とは，高い能力・才能に恵まれた生徒の才能伸長や精神的なサポートを含めた，いわゆる「才能教育（Gifted and Talented Education）」[i]のことを指す．実際，戦後の長い間，わが国は厳格な学年制を敷いており，飛び級などを認めてこなかった．そのような意味で，わが国は現在でも世界の国々や地域の中で特異な存在となっている[ii].

諸外国の多くは，才能教育を実施しているが[iii]，方法論としてそれは大きく 2 つに分かれる．拡充（enrichment）と早修（acceleration）である．これらの詳細はⅡ－２で述べるが，それぞれを簡潔に言えば「より広く深い学習」,「より早い履修」と表現できる.

Renzulli は拡充の理論的指導者であり，卓越性の放射現象の実践として，全校拡充モデル（Schoolwide Enrichment Model, SEM）を提唱している．才能教育で培われた良質のエッセンスを普通教育に適用しようとする試みであり,「すべての生徒の優れた点を伸長する学習・指導」を目指すものである．一人ひとりの生徒が，それぞれの課題を探求し実践的な問題解決を行うことを重視したモデルとなっている.

わが国においても個々のニーズに応える必要性が訴えられている.

筆者はまず，いろいろな学力層における数学の才能伸長モデルを作り，その適用によっ

て，数学教育における Excellence を浸透させたいと考えている．本論文の目的をここに置きたい．

この目的が実現できれば，それを受け，“Math for Excellent”の教材開発，および“Math for Excellent”をもとにした“Math for All”の教材開発を行いたい．それらの開発および実践によって最終的には卓越性の放射現象の実現を目指すものである．

長期的な目的の基盤，すなわち本論文の目的に向けたスキームとして，まず，数学的能力の判別ができる質問紙を開発する．

次に，日本数学オリンピック予選参加者（予選合格者，不合格者），一般的な高校生にアンケート調査を行う．一般的な高校生とは各都県の公立高校のうち，上位校，中位校，下位校から 1 校ずつ，同様に私立高校のうち，上位校，中位校，下位校から 1 校ずつ，合計 6 校の生徒たちのことを言う（Ⅲ−４）．このように，日本数学オリンピック予選合格者，不合格者，上位校，中位校，下位校の 5 つのグループを抽出した理由の 1 つは，質問紙の判別性能，信頼性・妥当性の検証のためである．もう 1 つの理由は，卓越性の放射現象を目指した「才能伸長モデル」を構築するためである．

日本数学オリンピック予選者全体と予選合格者，不合格者に対して因子分析を行い，それらの 3 つのグループの数学的特性を検討する．また，予選合格者と不合格者の差異を検討し，本選合格者のプロファイリングも行う．

さらに，日本数学オリンピック予選合格者，不合格者，上位校，中位校，下位校の 5 つのグループに対してクラスタ分析を行い，それぞれのグループの数学的特性を検討する．予選合格者と不合格者に関しては，因子分析とクラスタ分析の 2 つの統計分析を行うことによって，より確かな検証ができると思われる．

日本数学オリンピック本選合格者のプロファイリングを受け，数学的才能者を定義する．さらに上位校において高学力者を定義し，双方の相互作用を検証する．この事例研究によって，限定的ではあるが卓越性の放射現象の確認ができる．

最後に，わが国の通常の教育プログラムの一部としての才能教育の可能性を論じ，才能者との相互作用を一般化した才能伸長モデルを提示する．

以上をまとめ，本研究の直接的な目的は次の 5 点である．

［A］数学に対する思考・表現等の能力ならびに態度の特性に関する基準尺度測定質

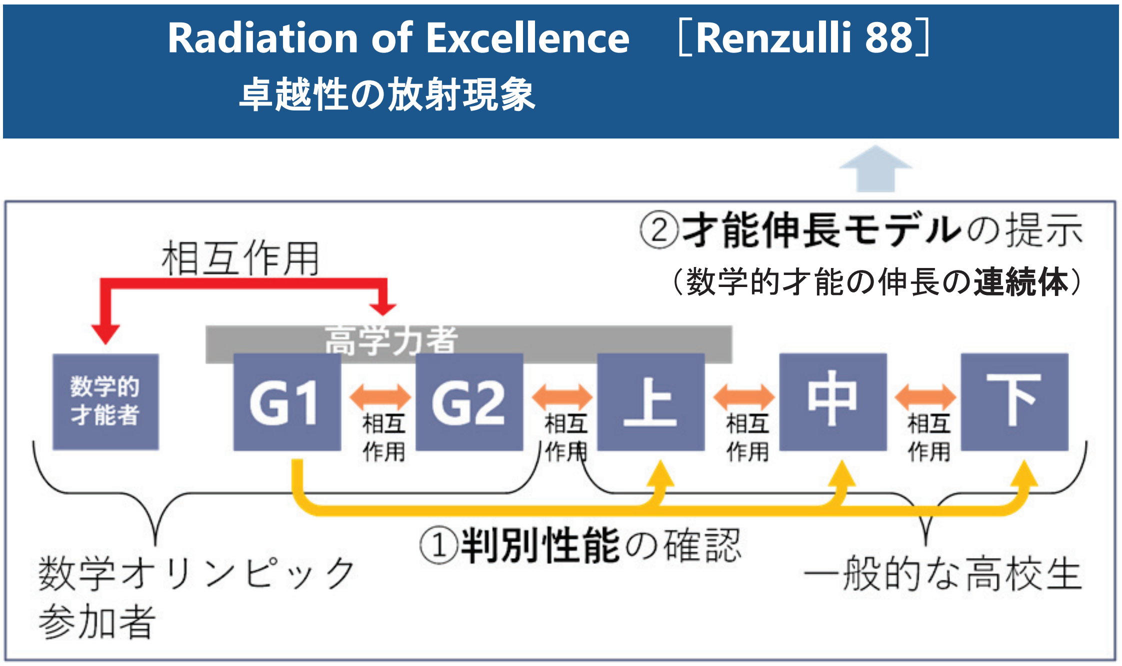
問紙の開発，およびその判別性能と信頼性・妥当性の検討（第Ⅲ章）

［B］上記の質問紙による日本数学オリンピック予選合格者と不合格者の特性，差異の分析（因子分析），および本選合格者のプロファイリング（第Ⅳ章）

［C］上記の質問紙による日本数学オリンピック予選参加者（予選合格者と不合格者）と一般的な高校生の各学力層における数学的能力の特性の分析（クラスタ分析）（第Ⅴ章）

［D］中等教育における数学的才能者の思考・行動の特性，思考過程，および高学力者との相互作用に関する事例研究（第Ⅵ章）

［E］わが国における才能教育の可能性，および才能者との相互作用を一般化した才能伸長モデルの検討－とくに“Math for Excellent”の才能伸長モデルの検討（第Ⅶ章）



図Ⅰ-1　研究のスキーム

［D］の数学的才能者，高学力者の定義はⅥ-２で行う．

上の図Ⅰ-1は，研究のスキームを示したものである．図中のG1は，日本数学オリンピック予選合格者を，G2は不合格者を表す．

なお，本研究では，t 検定，因子分析，クラスタ分析等の統計分析を用い，研究結果の信頼性を高めている．特に G1，G2 の数学的能力に関する特性については，因子分析とクラスタ分析の 2 つの統計分析の両方で同様の結果を得ており，分析結果の信頼性は高いということを付記しておく．

2 研究の長期的展望

研究の長期的展望を述べるためには，これまでの才能教育の辿った足跡を振り返る必要がある．ここでは，長年の多様な実践・研究の蓄積があるアメリカの才能教育の足跡を確認する［松村 03］．

(1) 才能教育から才能伸長へ

［松村 03］，［小倉 09］，［本多 12］等をもとに，アメリカの才能教育の歴史について概観する．

アメリカにおいて本格的に才能教育が議論されるようになったのは 20 世紀に入ってからである．1901 年，マサチューセッツ州 Worcester に才能者のための特別な学校が設立された．この時期には，才能者をどのように認定するかなどの方法はなく，教師などの主観的な判断によって認定せざるを得ず，子どもに公平な機会が与えられなかった．1920 年代には大都市の 3 分の 2 で何らかの才能教育プログラムが実施されたが，国民的な関心を集めることはなかった．その遠因として，知的エリート等が魅力的であると同時に，嫌悪の対象であったことが挙げられるようである．

ところが 1957 年，旧ソ連による人工衛星スプートニクの打ち上げ成功が，アメリカに大きな衝撃を与え，科学・数学等の基礎学力を上げることが推奨された．1970 年には連邦の初等中等教育法（the Elementary and Secondary Education Act，ESEA）において才能教育の必要性を定めている．また，1972 年の報告書「才能者教育（Education of the Gifted and Talented）」（いわゆるマーランド報告（Marland Report））では，才能教育の拡大の必要性も勧告された．

徐々に法的・行政的な基盤が整理されていったが，1983 年，Reagan 政権下において，報告書「危機に立つ国家（A National at Risk）」が発表された．この報告書は，アメリカ

の経済衰退の原因の１つとして教育の衰退を挙げ，基礎学力の底上げを示唆した．これを背景として多くの才能教育プログラムが廃止・縮小された．Renzulli らは「才能教育の静かな危機」と呼び，多くの才能教育の研究者や実践者は，一部の生徒を対象とした才能教育から，すべての生徒の才能伸長を目的とした方法論へと変換した．才能教育のエッセンスを普通教育に応用する方向へ向かうことになったのである．この試みの 1 つがⅠ－１で述べた Renzulli らの SEM である．

このような流れの中で 1988 年のジャイコブ・K・ジャビッツ才能者教育法（Jacob K. Javits Gifted and Talented Student Education Act）の成立，1990 年の国立才能研究所（The National Research Center on the Gifted and Talented (NRC/GT)）の設立を経て「すべての子どもがその潜在的可能性を開花させることを目指す」という方向性が確立された．さらに 1993 年の教育省の報告書「国家の卓越－アメリカの才能を伸ばす主張－（National Excellence: A Case for Developing America's Talent）」が刊行された．この報告書では「才能者のためのプログラムは，教授・学習法の革新的な実験場の役目を果たしてきた」と述べられ，才能教育のノウハウが普通教育でも有効利用されるよう提案された．

以上のように，現在のアメリカの才能教育は，Ⅱ－１(1)で述べる知能検査の結果（IQ）などで選抜された一部の生徒の教育から，そのノウハウを生かしながらすべての生徒の才能伸長のための教育へと移行したのである．

(2) Renzulli の「卓越性の放射現象」

上記Ⅰ－２(1)のような流れの中で 1980 年代中頃, Renzulli は Reis と共同で全校拡充モデル（SEM）を開発した．SEM が理念とし，実現してきたのは次の 4 つである．

① 特別プログラムの対象を約 15%の児童・生徒に広げ（従来は数パーセント），多様な拡充を提供する
② 才能教育プログラムと普通教育のカリキュラムを提携させる
③ 対象を「才能者」と名づけて隔離しない
④ 拡充を普通のクラスにも適用し，すべての児童・生徒の拡充を行う

先述したように，1983 年の「危機に立つ国家」を契機にして，才能教育への非難が強ま

り，特定の児童・生徒を対象とした才能教育プログラムが縮小・廃止された．「才能教育」関係の研究者は「才能伸長」へと舵を切ることになった．この中で注目を集めたのが［Renzulli 83］の実践モデルであった．その理由の１つは，エリート主義を排し普通教育と連携したことであり，もう１つは，普通教育の平等を唱える運動が成功しなかったためであるとされる．成果をあげた才能教育プログラムのノウハウに期待が寄せられた．普通教育では一斉授業が主要な方法であったが，SEM では，能力・興味・学習スタイルを考慮した学習の個性化を目指した．

学力の高い児童・生徒も学習障がいの児童・生徒も適切に処遇される権利があり，本当の平等は，すべての児童・生徒の個人差を認めて，同一の経験ではなく個性化された経験を与えた結果として達成される，と［Renzulli 83］は考えた．学校全体の教育がよいと，すべての児童・生徒の多様な才能も伸びるというわけである．［Renzulli 88］は，これを「上げ潮がすべての船をもち上げる（A rising tide lifts all ships)」と評し，「卓越性の放射現象」と呼んだ．

［Renzulli 83］は，SEM のシステムの中で拡充クラスタと呼ばれる異学年の児童・生徒の集団を構成したが，現在の日本で拡充クラスタを設置することは困難である．Ⅱ－２で述べるように，才能教育は大きく拡充と早修に分けることができるが，筆者はこのような点を踏まえて，拡充型の教育スタイルで，しかも拡充クラスタなしで，卓越性の放射現象の実現を数学教育において目指すものである．

一般に早修は，才能者を選抜し，かつ，いわゆる飛び級・飛び入学を伴う．拡充もその種類によっては生徒の選抜を行う．筆者は，生徒の選抜を行わず，通常の学校教育の一部としての指導プログラムで卓越性の放射現象の実現性を検討するものである．

参考文献

［本多 10］本多泰洋：“諸外国の才能教育(1)(2)”, 岩永雅也,松村暢隆 編, 才能と教育－個性と才能の新たな地平へ－, 放送大学教育振興会, pp.117-139, 2010

［本多 12］本多 泰洋：“米国における才能教育の歴史的考察 ： 黎明期から第二次世界大戦まで”, 帝京短期大学紀要 (17), pp.63-75, 2012

［伊藤 05］伊藤雄二：“国際数学オリンピックの運営の状況とその数学教育的価値について”, 教育開発 1, 53-73, 2005

［岩永 97a］岩永雅也：“才能と才能教育”, 麻生誠, 岩永雅也編, 創造的才能教育, 玉川大学出版部, pp.16-49, 1997

［岩永 97b］岩永雅也：“才能教育の理論と実践”, 麻生誠, 岩永雅也 編, 創造的才能教育, 玉川大学出版部, pp.50-117, 1997

［岩永 97c］岩永雅也：“才能教育をめぐる状況”, 麻生誠, 岩永雅也 編, 創造的才能教育, 玉川大学出版部, pp.172-192, 1997

［Marland 71］Marland, S. P：“Education of the Gifted and Talented－Volume 1: Report to the Congress of the United States”, the U. S. Commissioner of Education, Department of Health, Education, and Welfare, pp.i～VIII-13, 1971

［松村 03］松村暢隆：“アメリカの才能教育―多様な学習ニーズに応える特別支援”, 東信堂, 2003

［松村 08］松村暢隆：“本当の「才能」見つけて育てよう－子どもをダメにする英才教育”, ミネルヴァ書房, 2008

［松村 10a］松村暢隆：“心理学的概念としての才能”, 岩永雅也, 松村暢隆 編, 才能と教育－個性と才能の新たな地平へ－, 放送大学教育振興会, pp.45-57, 2010

［松村 10b］松村暢隆：“才能の評価と発見”, 岩永雅也, 松村暢隆 編, 才能と教育－個性と才能の新たな地平へ－, 放送大学教育振興会, p.64, 2010

［松村 10c］松村暢隆, 佐野亮子, 小倉正義, 石川 裕之：“認知的個性－違いが活きる学びと支援,” 新曜社, 2010

［中村 10］中村順子, 水内豊和：“日本における GT 教育の可能性”, 富山大学人間発達科学部紀要第 5 巻第 1 号, pp.161-168, 2010

［中村 06］中村隆史, 今井寛, 渡辺政隆：“理数系コンテスト・セミナー参加者の進路等に

関する調査", 文部科学省科学技術政策研究所 調査資料 129, pp.1-31, 60-63, 67-124, 2006

[Renzulli 83] Renzulli, J. S, 松村暢隆 訳 ; "個性と才能をみつける総合学習モデル", 玉川大学出版部, 1983

[Renzulli 88] Renzulli, J. S : "A decade of dialogue on the three - ring conception of giftedness", Roeper Review Volume 11 Issue 1, pp.18-25, 1988

[Renzulli 98] Renzulli, J. S : "A rising tide lifts all ships: Developing the gifts and talents of all students", Phi Delta Kappan 82, pp.105-111, 1998

[小倉 09] 小倉正義 : "アメリカにおけるギフテッドへの教育", 岡南, 小倉正義, 杉山登志郎 著, ギフテッド－天才の育て方, 学習研究社, 2009

[田中 12] 田中義郎 : "アメリカの才能児・生徒教育－伝統的平等主義の今日的理解と今後の課題－", 比較教育学研究, pp.80-96, 2012

[山内 12] 山内乾史 : "才能教育について(概説)－日本における状況－", 比較教育学研究, pp.3-21, 2012

---

i 才能教育（Gifted and Talented Education）とは，個人の全人格の発達を促す教育を行いながら同時にその優れた能力をできるだけ引き出すことを目的とした教育である．次の 10 の要件を満たすべきものとされる（本多（2012））．

1．公立の学校教育制度の中で実施
2．特別の授業料等の徴収はない
3．特別の訓練を受けた教師によって実施
4．対象となる子どもの年齢範囲は幼稚園（3 歳）から高等学校（17 歳）まで
5．才能教育を受ける子どもの認定機会は平等
6．認定者は教育委員会等
7．特有の教育課程，カリキュラム，教育方法等で実施
8．特別の学級，学校，施設等が用意される場合がある
9．子どもの精神的安定を図るために心理カウンセラーの支援を用意
10．才能教育を受けた子どもに公的な特権は与えられない

ii 2014 年現在，わが国で認められている教育上の例外措置は次の 4 点である．

1．大学への早期入学制度（学校教育法第 90 条 2 項）

２．大学の早期卒業制度（同法第 89 条）

３．大学院への早期入学制度（同法第 102 条 2 項）

４．大学院の早期修了制度（大学院設置基準第 16 条ただし書き）

[iii] 年齢主義による学年制を厳格に適用してきた国は日本の他にない．本多（2010）は，脚注ｉに示した要件のうち２，４，５の他に「すべての学習教科を対象として，子どもの潜在的なすべての能力を伸ばし，全人的な人間形成を図る」を加えた 4 つの要件を満たすものを「本格的に系統的な」才能教育と呼んでいる．これを実施している国・地域は，カナダ，アメリカ，韓国，台湾，香港，シンガポール，オーストラリア，イギリスである．

Ⅱ 才能に関する基礎研究

1 才能と才能者の定義ならびに特徴

近代以降，学校には，社会が要求する合理的判断力をもつ若者を育成することが求められた．合理的判断力の基本は知的能力であるため，才能とは知的能力であるとの認識が進み，その定式化がなされてきた［岩永 97a］．

本節では，才能の定義を歴史的観点から俯瞰する．

(1) 才能教育の黎明期における才能の定義

1905年, Alfred BinetとThéodore Simonによって「知能測定尺度（une echelle metrique de l'intelligence）（ビネー・シモン検査，Binet- Simon Test）」が作成された．ビネー・シモン検査は，種々の内容や形式の問題を易しいものから難しいものへ配列し，全体を通してどの程度の問題までできたかをもとに精神年齢（Mental Age）を測定するというものであった．精神年齢とは，標本集団の各年齢別の標準的到達度を利用して知能の程度を表す方法である．例えば，満 10 歳の多数の子どもが解決できる問題をパスした子どもは，暦年齢（Chronological Age）のいかんにかかわらず精神年齢は 10 歳であると言われる．

1912 年，ドイツの William Stern によって知能指数（Intelligence Quotient，IQ）という指標が提示された．IQ は，精神年齢を暦年齢で割り 100 を掛けたものである．つまり，10 歳の平均的な子どもと同じ知能を示す暦年齢 5 歳の子どもの IQ は 200 ということになる．

フランス語で書かれたビネー・シモン検査は，様々な言語に翻訳・標準化された．その中で最も著名なものがスタンフォード大学（Stanford University）の Lewis Madison Terman によって開発された「スタンフォード・ビネー改訂増補ビネー・シモン知能測定尺度（スタンフォード・ビネー検査（Stanford- Binet Test））」である．Terman は，1378 人の被験者を対象として標準化に成功した．

才能の概念をはじめて理論的に定義したのも Terman である．Terman はスタンフォード・ビネー検査の上位 1%を「才能者（giftedness, the gifted）」と操作的に定義している．才能者という言葉を初めて用いたのは Terman とされる．そして，その定義が才能の発見に関して有効であり，また効率的であることをデータによって示した．

この才能者同定の研究は，カリフォルニア州の学童 25 万人の中から，IQ が上位 1%の約 1,500 人を抽出することにより開始された[iv]．この研究は Terman の没後も弟子たちによって受け継がれ 70 年以上続けられた．研究の結果，加齢によるスピードの低下などを考慮すると，IQ は事実上一定であった．この結果は IQ の信頼性を示すものとしてよく引用されている．また，才能者の男児の 70%，女児の 67%がそれぞれ大学を卒業した．これは当時のカリフォルニア州の平均の約 8 倍である．男性は，専門職に就いた比率も当時のカリフォルニア州の平均の約 8 倍であった．収入についても被験者の半数は，全米平均の上位 7%に入っていた．このような定量的な研究結果によって，学童期の高 IQ こそが成功のパスポートという「IQ 神話」を生み出すことになった．

このような尺度は，俗に知能検査や知能テストと呼ばれ，才能教育はもとより教育界全体に大きな影響を与えた．そのため，Terman は「才能教育の父」と呼ばれる．

先に述べた信頼性とは，常に同一の測定結果を示す性能を指す．例えば，同一の検査を同一の人が時を隔てて繰り返し受けたときの測定結果の相関や，検査を奇数番号・偶数番号に 2 分割したときのそれぞれの集団の相関等によって求める場合がある[v]．

信頼性に対して，検査が目標とする特性を正しく測定できているかを問う場合，その性能は妥当性と呼ばれる．知能検査に限らず，妥当性の検証は心理学の諸検査において非常に困難なものである．知能検査は，先の Terman の研究などによって，知的・社会的適応を予測するのには有効であると考えられている．これは知能の 1 つの側面と言える．しかし，**Ⅴ－８⑶ウ**でも述べるが，IQ と創造性の間には強い相関が認められなかった．また，Terman の研究において才能者から漏れた人の中から 2 人のノーベル賞受賞者が出た．つまり，妥当性という意味では，知能検査も不完全と言える[vi]．

1926 年，コロンビア大学（Columbia University）の Leta Stetter Hollingworth は，著書「才能者－その特質と教育－（Gifted Children : Their Nature and Nurture)」において，才能は生まれつきの知能のみによるものではなく，その教育環境も大きな影響をもつ，としている（いわゆる先天説と環境説）．才能は生まれつきの知能によるとする Terman の考えとは異なるものであった．才能者（giftedness, the gifted）という言葉を最初に用

いたのは Hollingworth との説もある．Hollingworth は「才能教育の母」と呼ばれる．

1930 年，ノースウェスタン大学（Northwestern University）の Paul Andrew Witty は IQ 140 以上のこども 50 人と，その対照群として同じ年齢，同じ性別，同じ民族の IQ 90〜110 の子ども 50 人を抽出して研究対象とした．その結果，Witty は Terman や Hollingworth が才能者の知的才能は一義的に IQ の測定で示された結果によっているとする見解には同意できないとした［Jolly 10］．さらに，スタンフォード・ビネー検査によって精確に才能者を抽出できるのか，検査に明確な信頼性はあるのか，と疑問を述べている．Witty は，知能検査は本当のところ何を測定しているのか，知能とは何なのかを知るためには明確な信頼性のある方法が必要であるとした．さらに，才能者であるか否かの判別は，子どもの観察によってのみできるとし，外来性の環境要因が重要であると述べた．Witty は才能者を特徴づける要素を，

① 能力（ability）
② 駆り立てる力（drive）
③ 好機（opportunity）

などの才能の表出（the fruits of genius）であるとした．Witty による才能の再検討は，現在の才能の認定方法に大きな影響を与えている．

1943 年，モーガン州立大学（Morgan State University）の Martin David Jenkins は，高い能力をもったアフリカ系アメリカ人の子どもは，IQ と学習成績との間に差があり，民族差別という社会的制限や社会経済的地位（socio economic status）の違いよって白人の子どもとは異なった結果を示す，との結論を得た［Jolly 10］．このような経緯もあり 1960 年代に入ってから，知能を IQ として単一的に測定することに対して，マイノリティへの配慮を欠いているとの批判はますます強まっていった．

1960 年ころから，知能の 1 次元性に対する疑問も示されるようになった．［Guilford 67］は，思考過程に収束的（convergent）と拡散的（divergent）の 2 つの様式を区別した．多様な条件刺激が同一の反応を導くときに収束的，逆に同一の刺激が多様な反応に結びつくときに拡散的と呼んだ[vii]．［Guilford 67］が指摘した最も重要なことは，知能は収束的思考であり，創造性は拡散的思考であるとした点である．これは，知能という 1 次元的能力がすべての知的業績を左右するという，信仰にも似た風潮に陰りが見え始めた原因の 1

つであると思われる[viii].

さらに 1980 年代から，知能をより幅広いものとして捉えようとする知能理論が提唱されるようになった.

その中の 1 つが［Sternberg 85］の三位一体説である．これは知能の 1 次元性を批判するものであり, Sternberg は知能を分析的（analytic）, 創造的（creative）, 実践的（practical）の 3 種に分け，それらの良き総合が社会的業績をあげる鍵であると結論づけた．さらに，従来の知能理論と検査は，上記のうちの分析知能のみに重点をおいたものであるとした.

ハーバード大学（Harvard University）の Howard Gardner による「多重知能（Multiple Intelligences，MI）」理論も著名である．［Gardner 83］は，MI は全体で 7 つの知能からなるとしたが, 後にもう 1 つ加え 8 つの知能が組み合わさって働くとした.［Gardner 83］は，知能を「文化的な価値のある問題解決や創造の能力」と定義した．以下に MI の 8 つの知能を列挙する.

① 言語的知能（Linguistic Intelligence）：
　話し言葉・書き言葉への感受性，言語学習・運用能力など

② 論理数学的知能（Logical-mathematical Intelligence）：
　問題を論理的に分析したり，科学的に究明したり，数学的な操作をする能力

③ 音楽的知能（Musical Intelligence）：
　リズムや音程・和音・音色の識別，音楽演奏や作曲・鑑賞のスキル

④ 身体運動的知能（Bodily-Kinesthetic Intelligence）：
　体全体や身体部位を問題解決や創造のために使う能力

⑤ 空間的知能（Spatial Intelligence）：
　空間のパターンを認識して操作する能力

⑥ 対人的能力（Interpersonal Intelligence）：
　他人の意図や動機・欲求を理解して，他人とうまくやっていく能力

⑦ 内省的知能（Intra-personal Intelligence）：
　自分自身を理解して，自己の作業モデルを用いて自分の生活を統制する能力

⑧ 博物的知能（Naturalist Intelligence）：
　自然や人工物の種類を識別する能力

ビネー・シモン検査の開発から，Terman による標準化，理論的な初めての「才能」の定義，知能検査に対する信仰と批判，新理論の出現までを俯瞰してきた．

アメリカは連邦教育法によって「才能」を定義するが，このような一連の流れは連邦の定義にも影響を与えている．

(2) アメリカの連邦教育法による定義

1972年の報告書「才能者教育」(マーランド報告) は，その後の才能の定義を方向づけた．マーランド報告では，才能の領域として以下の6つが示された．

① 一般的な知的能力（general intellectual ability）
② 特定の学問的適性（specific academic aptitude）
③ 創造的もしくは生産的思考（creative or productive thinking）
④ 統率能力（リーダーシップ）（leadership ability）
⑤ 視覚および芸術性（visual and performing, arts）
⑥ 精神運動的能力（psychomotor ability）

このうち，⑥の精神運動的能力については，学校外にその分野の才能を伸長する多くの施設があることから，1978年の改正初等中等教育法（ESEA，Elementary & Secondary Educational Amendments of 1978, PUBLIC LAW 95-561，Ⅸ(A)）からは，その記載が消え①～⑤の分野について記された．

その結果，ESEA（1978）は，才能および才能者について，次のように定義している．

（才能者とは）知的（intellectual），創造的（creative），特定の学問（specific academic），リーダーシップ（leadership ability）などの能力の領域，あるいは舞台・視覚芸術（performing and visual arts）で，高度な遂行能力の根拠となる表出されたあるいは潜在的な能力をもっているものと，幼児・初等・中等教育段階で認定される子どもたちや（該当するなら）青年たちである．そしてそれがゆえに，ふつうは学校で提供されない指導や活動を必要とする者である．

ESEA の特徴として，才能教育の歴史を踏まえた複数のカテゴリが含まれていること，才能伸長のための個性化教育の必要性が盛り込まれていること，特殊な教育的ニーズを明文化したことなどが挙げられる．なお，潜在的な能力の記述は，学業不振に陥る才能者が存在することを含意している．

(3) 才能者の基本的特性と過度激動

上に見たように，才能および才能者の定義がなされ研究が進むにしたがって，才能者のもつ特性も検討されてきた．[Andrews 09] によれば，一般的な才能者のもつ能力の基本的特性として次の 5 つが挙げられる．

① 高度な言語能力（advanced verbal skills）
② 高度な抽象化（advanced abstractions）
③ 高度な集中力（advanced power of concentration）
④ 高度な知能（advanced intellect）
⑤ 高度な行動（advanced behavior）

さらに，ポーランドの心理学者 Kazimierz Dąbrowski は，過度な反応などを人格の成長要素とする人格形成理論を提唱し，それを分離理論としてまとめた [Dąbrowski 77]．「積極的な分離」とは，一般的な受身の人生から離れ，自分から更に高いレベルの生き方を求めることである．一般社会との積極的分離と再融合を繰り返す人間は，自己や世界の概念が変化していき，最終的に独創的な生き方のビジョンを得てその実現を目指すとされる．しかしその過程は，緊張，不安，気分的うつ，恥，罪悪感といった精神的苦痛を伴う．自己の葛藤も深い感情作用に連動しており，人生の要となる出来事も日常の内省行為も，世の中がそうあるべき姿と現実世界とのギャップを思い知る機会となる．そして利他意識や道徳観念といった更に高いレベルでの人格形成につながっていくと考えられている．

一方，「否定的な分離」とは，社会的な生き方から破滅的に離れることで，精神病や自殺を引き起こす可能性があるとされる．

「積極的な分離」の中核をなすものが，刺激に対する並々ならない反応「過度激動（overexcitabilities，OE）」である．これは神経の感受性が増すことによって通常の人間

よりも刺激を生理的に強く経験する性質であり，才能者の特性である．

Dąbrowski は OE を 5 つに区分した．すなわち

① 知性的過度激動（intellectual OE）
② 精神運動的過度激動（psychomotor OE）
③ 感覚的過度激動（sensual OE）
④ 想像的過度激動（imaginational OE）
⑤ 情緒的過度激動（emotional OE）

である．

本研究の対象となるのは，①の知性的過度激動である（Ⅵ-３）．知性的過度激動は，才能者の知性的分野の特性と認識されており，以下のように細分化される[ix]．

・心の激しい作用

鋭い観察，好奇心，問題解決，持続的な知的努力，熱心な読書，綿密な計画

・深い思慮

メタ認識，分析的思考，内観，理論好き，モラル思考，論理的，思考の独自性

Dąbrowski は，短時間の単純な感情は人格の成長にあまり影響はなく，否定的感情も含めた激しい感情作用こそが人生を変えるような劇的な体験をもたらし，積極的な分離を起こすと考えた．つまり，精神的苦痛は個人が心理的により高いレベルへ成長するために不可欠であり，その深い感情作用を最大にもたらすものは OE であるとしている．才能者が OE という平均以上に敏感な精神状態にあることは，勉学や仕事で著しい成果をあげるだけでなく，日常におけるすべての活動においても精神に特異な反応を起こしている．つまり，才能者は誕生時より常に外界，内界両方からの刺激を増長した精神で感じ，激しく深い幅をもって経験し，内省を繰り返していることが，彼らの著しい成長に関連しているのである［Dąbrowski 77］．

(4) 才能の三輪概念

［Renzulli 78］は，才能の全般的な特徴・特性を大きく 3 つにまとめ，「才能の三輪概念（Three-Ring Conception of Giftedness）」と呼んだ．これは，才能を知能より広く捉えようとするものであり，MI 理論と同じ流れの中で，才能とは高い IQ であるとする一般的な認識への挑戦から出てきたものである．実際，才能の三輪概念は，1978 年にファイ・デルタ・カッパン（Phi Delta Kappan）という教育全般の問題を論じる雑誌に掲載されたが，一般的な心理学や教育学の雑誌はもとより才能教育の専門雑誌にも受理されなかった．図Ⅱ-1 は，［Renzulli 97］からの引用である．

才能の三輪概念は，「普通より優れた能力（above-average ability）」，「創造性（creativity）」，「課題への傾倒（task commitment）」からなる．「普通より優れた能力」と「創造性」は ESEA にも謳われている．注目すべきなのは「課題への傾倒」であり，これは，特定の課題に長期間に渡って取り組めるような情熱や意欲のことである．ESEA には含まれていないものの，才能者のもつ特徴・特性の 1 つと考えられている．

上記の 3 つの要素は，3 つとも揃わなくてもよく，どれか 1 つが高ければ才能があると認めて，残りの 2 つは努力目標とする．図Ⅱ-1 で 3 つの輪が重なっているのは，その積集合が才能の条件ということではなく，3 つの要素の相互作用を表している．背景の千鳥格子は「パーソナリティ」と「環境」の影響を表している[x]．

才能の三輪概念の 3 つの要素を評価・発見する方法の 1 つとして，教師が学校で子どもたちの様子を観察するためのチェックリストがある．［Renzulli 74］も「優れた生徒の行動特性の評定尺度（Scale for Rating Behavioral Characteristics of Superior Students, SRBCSS）」と呼ばれるそのようなチェックリストを開発した．SRBCSS では，以下の 10 次元の各項目について，教師が児童・生徒の普段の行動を観察して 4 段階で評定する（改訂版では 6 段階）．

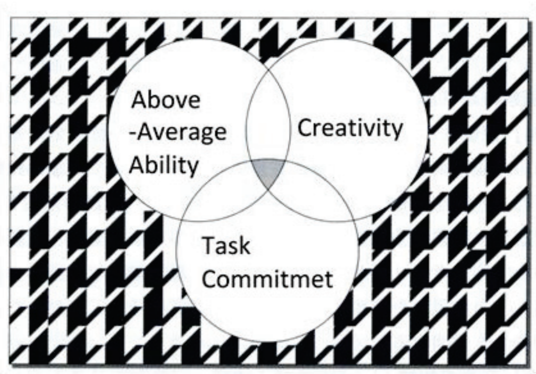


図 Ⅱ-1 才能の三輪概念

① 学習：知識・記憶が豊か，素早く学習や理解ができる，など

② 意欲：課題に夢中になる，やり抜くのに外的動機付けは不要，など

③ 創造性：好奇心が旺盛，変わった答えをたくさん出す，想像力が豊か，同調しない，など

④ リーダーシップ：責任感や協調性がある，適応しやすい，社会的活動を好む，など

⑤ 芸術：芸術活動を好む，創造的な芸術表現をする，室の高い表現を求める，なと

⑥ 音楽：音楽を聴いたり演奏したりするのを好む，音をよく聞き分ける，曲を覚える，など

⑦ 演劇：劇に参加する，物語をうまく語る，体を使って感情を伝える，物まねがうまい，など

⑧ コミュニケーションの正確さ：的確に話す・書く，話をうまく要約できる，など

⑨ コミュニケーションの表現：表現豊かに話す，表情・動作で意味を伝える，など

⑩ 計画性：必要な情報・資料を決める，手順よく作業を進める，全体を見通せる，など

このうち，①学習，②意欲，③創造性，⑧コミュニケーションの正確さ，⑩計画性は，数学の才能認定にも関係があると考えられるため，Ⅲ−３の質問紙の開発において比較検討の材料とした．

２ 才能教育のタイポロジー

才能教育に関する最先進国の１つがアメリカである．人種，民族，経済，文化等，アメリカは多様性の国であり，それらの地域特性に応じて多彩な才能教育が行われている．［岩永 10］によれば，それらの数は 50 を超えるが，暦年齢とカリキュラムの一致性の観点に鑑みれば 2 つに大別される．それらは拡充（enrichment）と早修（acceleration）である．それぞれを簡潔に言えば「より広く深い学習」，「より早い履修」と表現できる．

(1) 拡充教育

拡充教育とは，優れた知的能力をもつ児童・生徒に対して行う教育であって，以下の特徴をもつものを言う．

① 総合的な思考力，分析力を涵養するため，通常のカリキュラムよりも体系的で深化した幅広い教育内容を提供する
② 原則として飛び級，飛び入学を伴わない
③ 教材や資料は標準のものとは別に作成される
④ 教授内容は，特定の科目に偏らず総合的なものである

拡充教育の方法には，(1)独立学習，(2)グループ学習，(3)課外学習，(4)アドバンスト・プレイスメント・プログラム（Advanced Placement Program，AP）などがある．

(1)の独立学習とは，通常の学習を行っている一般の生徒とは別の課題を才能者の生徒に与えて学習させる教育方法である．

(2)のグループ学習には，一般の生徒の中に，同年齢の数人の才能者の生徒を在籍させる場合と，上級学年の一般の生徒の中に，年下の才能者の生徒を混在させる場合がある．

前者は，例えば，音楽の才能を示す生徒らは，その授業時間だけ別枠で高度な音楽の授業を受け，その他の時間は一般の生徒と一緒に各教科の授業を受けるというものである．

後者は，生徒同士が影響しあって相互作用による成長を促すことが大きな利点とされる．具体的には，上級学年の一般の児童・生徒には年下の子どもの扱い方や学習指導の仕方を身につけさせることができ，年下の才能者の子どもにとっては，協調性や社会性を身につけさせる機会になるというものである．

このグループ学習による拡充教育を推進する代表的な研究者が Renzulli であり，Renzulli らは，このグループ学習を「拡充クラスタ」と呼んでいる．

(3)の課外学習は，通常のカリキュラム外の教育方法として，地域の図書館，博物館，美術館，教育センターなどを利用した様々な教育方法が考案されており，独立学習としてもグループ学習としても実施可能である．

(4)のアドバンスト・プレイスメント・プログラム（AP）は，高校で大学教養レベルの内容の講義を受講するというものである．試験に合格すれば，大学入学時には，教養レベルの単位を取得したものとして取り扱われるので，大学の在学期間を短縮でき，次に述べる早修の 1 つと考えることもできる．

表 Ⅱ-1 才能教育の方法論（拡充と早修）［岩永 97b］より抜粋

	拡充（enrichment）	早修（acceleration）
目的	・教育水準の全社会的向上	・専門的能力の早期発見・開発
	・教育地域格差解消	・学校不適応者救済
主体	・州，郡，市，連邦（「面」での実施）	・有力大学（「点」での実施）
	・知事学校	・個人，親
	・マグネットスクール	・スポンサー企業
選抜基準	・学齢の10～30%（「面」での実施）	・学齢の1～3%（「点」での実施）
	・IQ≧120～だが重視	・IQ≧150～だが非重視
	・全分野（含芸術等）	・数学中心（含英語）
	・教師，親，級友の推薦	・SAT等早期受験
形態・方法	・特別学校	・サマースクール，課外クラス
	・深化した総合カリキュラム	・大学の才能児プログラム
	・独自の教材	・既存上級教材の早期提供
特徴	・飛び級・飛び入学しない	・飛び級・飛び入学
	・公的補助	・個人負担大
	・地域指向	・大都市部偏在
	・才能教育の約90%	・才能教育の約10%

(2) 早修教育

早修教育とは，優れた知的能力をもつ児童・生徒に対して行う教育であって，以下の特性をもつものを言う．

① acceleration の原義どおり，通常の課題の早期履修・修得を目的とする
② 教育内容は，特別に作成されるものではなく，上位学年の課程あるいは上級学校の通常のカリキュラムである（The same but sooner and/or faster）
③ 一般に飛び級・飛び入学を伴う（下記の full acceleration の場合）

さらに早修は，完全早修（full acceleration）と部分早修（partial acceleration）に分けられる．前者は，飛び級・飛び入学を伴うものである．後者は，科目ごとの早修や AP などが知られている．AP は先に記したように拡充とも早修とも考えることができる．

実際の早修教育は，数学，物理や語学に対して行われることが多い．

３　才能の認定方法の検討

才能者の「認定（identification）」について述べる前に才能の英語表記について触れておきたい. 術語「才能」は giftedness あるいは talent と表記されるか, もしくは the gifted and talented と 2 つの概念が併記される．どのように表記するかは研究者によってまちまちであるが,［Gagné 91］によれば, 厳密に見れば giftedness は抽象的・基本的な能力で, 人間のもつ根源的な潜在能力の優越性を指し，talent は社会での実際的な活動に対応した具体的・顕在的な能力を指す概念とされる．つまり，ESEA における才能の定義のうち, 知能，創造性は giftedness，芸術の能力，リーダーシップ，特定の学問の能力は talent に分類できる．したがって，この立場では数学への適性や語学的能力のような具体的能力の卓越した高さについては talent を用いることになる．本研究も［Gagné 91］の立場で行われている.

(1)　才能の認定方法

才能教育を行うにあたって，その対象者である児童・生徒の才能は「認定」される．つまり，子どもの特性が見分けられなければならない．認定は，才能教育のタイプによっても異なる.

ア　拡充教育の才能の認定

拡充教育は総合的な思考力，分析力の涵養のため幅広い根源的な知的能力，つまり，giftedness が要求されている．1960 年代の知能検査に対する批判がありながらも, 拡充教育における才能の認定には主に知能検査の結果（IQ）が重視されてきた．IQ は人間が生来もっている基本的な能力で, 生涯変わらない指標と考えられていたからである. つまり, どのような社会的な階層にもほぼ同じ比率で高 IQ の児童・生徒が分布していると考えられ，IQ を用いることが最も公平な方法であると判断していたのである．しかし，実際には社会経済的な偏りがあり, IQ による認定は政策としての拡充教育に相応しくないとの批判が出るようになった.

知能検査・IQ による認定の批判には次のようなものがある.

① 知能検査・IQ では，社交性，協調性などの集団特性を測ることができない．才能教育プログラムへの適応には，このような能力も必要である

② 知能検査・IQ では，創造力，芸術的なセンス等を測ることができない．①と合わせて，人間のもつ才能のごく一部しか測れていない

③ 知能検査・IQ は，標準化された 1 種類だけの検査であるから練習効果が高い

④ 知能検査・IQ は，社会的主流派を対象に作られているため，人種や経済的優位性によって得点が異なる

⑤ 知能検査・IQ でわずかな知能優秀者を集めるよりも，もっと多様な集団を対象として教育全体の卓越性を高めるほうがよい

才能者の認定ではないが，社会福祉の観点から次のような批判もある．

⑥ 知能検査・IQ では，IQ が正常でも対人関係に問題をもつ広汎性発達障がいの児童・生徒を福祉の対象に入れることができない．

［岩永 97b］によれば，このような過程から拡充教育の才能の認定には，州などによるが次の 4 段階のステップを踏んだ才能プール（talent pool）を形成することが多い．才能プールは才能者の候補となる児童・生徒の集団である．

例えば，第 1 段階として一般的知的能力に関する標準化された試験を用い，上位 8%程度の生徒を選ぶ．この選定は試験の成績により自動的に行われる．なお，この標準化された試験は知能検査ではなく，地域ごとの標準試験が用いられる[xi]．この第 1 段階で才能プールの約半数が埋まる．

その生徒らに加えて，第 2 段階として教師の推薦によって，試験には表れない創造性，意欲，特定分野の能力などを基準に数%を才能プールに入れる．この選定では SRBCSS をはじめとするチェックリストが使われることがある．

第 3 段階では，親による申告，友人からの推薦，作品等の検討によって選び，同学年の 15%程度の才能プールを確保する．

第 4 段階で教師，心理学者，教育行政職員などからなる才能者選抜委員会によって，10%程度に絞り込まれる．

上記の才能プールの形成は 1 つのモデルであって，学区によっては知能検査を用いている場合もある．その際は，IQ 120～130 が選抜の基準となっている．

イ　早修教育の才能の認定

一般に早修はいわゆる飛び級・飛び入学を伴うので，もし，児童・生徒がその教育に馴染めなかったとしても簡単にやり直すことができない．したがって，早修における才能の認定はより慎重に行う必要があり，その意味も重大である．

しかし，認定方法は単純である．その理由として，第 1 に基準となる能力が認知的能力だけであることから，測定の方法は筆記試験のみで済むこと，第 2 に広範な比較対照群を有するため利用するテストの種類が限られること，第 3 に才能者としての認定はそのテストの成績によって機械的に決まること，の 3 点を挙げることができる．

実際に用いられているテストは，大学入学適性試験（Scholastic Aptitude Test，1993 年に Scholastic Assessment Test と改称，SAT）かまたは大学入学標準学力試験（the American College Testing Program，ACT）が多い［Sheffield 94］．アメリカの大学に進学する際には，SAT か ACT のいずれかの成績を提出することが必要である．つまり，才能者の候補の児童・生徒はこれらのテストを早期に受験することになるのであり，同学年の 1～3%が選抜される．

早修の研究者・実践者は IQ を重視しない．IQ で測られる能力は一般的・基礎的であって，数学や物理の達成可能性を予測できないと考えているからである．つまり，IQ は giftedness の測定はできても talent の測定はできないと彼らは捉えているからである．それが SAT や ACT を利用する理由の 1 つでもある．さらに，拡充が地域社会に根ざしているのに対して，早修は広い範囲から児童・生徒を集めるため基準が同一である方が望ましいことも挙げられる．

ウ　アメリカの数学的才能の認定

先述したように，拡充は総合的な思考力，分析力の涵養が主目的である．したがって，拡充における才能の認定も数学に特化したものではなく，様々な方向から児童・生徒のもつ才能・能力にアプローチしている．

数学に特化した才能の認定は専ら早修によるものである．

ただし，数学の才能教育そのものは早修に限ったものではなく，拡充の中でも実施されている．よく知られた実施校にアメリカ・ノースカロライナ州の公立全寮制理数系専門高校であるノースカロライナ科学数学高校（North Carolina School of Science and Mathematics，NCSSM）や韓国の公立漢城（ハンソン）科学高校，国立の科学才能学校，江西教育庁英才教育院 等がある．

諸外国における数学に特化した才能者の認定は，これまで標準テストによるものであり，アメリカでは多くの場合，SAT や ACT が用いられてきた．最も著名な数学の才能者認定プログラムに，ジョンズ・ホプキンス大学（Johns Hopkins University）の Stanley によって着手された「数学的に早熟な若者の研究(the Study of Mathematically Precocious Youth，SMPY）」と，同じくジョンズ・ホプキンス大学の「才能者センター（the Center for the Advancement of Academically Talented Youth，CTY)」の才能発見プログラムであるタレント・サーチ（Talent Search）の事例がある．

SMPY では，生徒は当該学年の標準テストを受け，その上位 3%が SAT と ACT の受験資格を得る．認定の手段として SAT または ACT を用いることの妥当性として Stanley は次のように主張している．

> 通常 9・10 年生が受ける代数学や幾何学の授業を受けていない 7・8 年生が，そのような授業を受けた平均的な 11・12 年生の学力より高く設計された SAT，ACT を受けているので，7・8 年生のハイレベルな思考をテストできている

実際，［Barnett 93］の報告によれば，1980 年から 1984 年の間に SAT の得点によって SMPY に認定された 353 人の生徒たちは，潜在能力を維持し高校や大学の様々な知的な経験を通してその能力を体現したとされる．数学の才能者認定手段として，SAT，ACT を支

CREATORS
↑
PROBLEM POSERS
↑
PROBLEM SOLVERS
↑
CONSUMERS
↑
COMPUTERS
↑
DOERS
↑
ILLITERATES

図 Ⅱ-2 生徒の数学的階層

持する人々は，認定基準の妥当性としてこれを引用してきた．

CTY でも SAT のスコアについて年齢別の基準を設け，数学分野と言語分野のそれぞれについて別々に CTY の受講資格の有無を認定している．

一方，［Sheffield 94]は，当該学年の標準テストから SAT，ACT の受験に至る数学の才能者認定に次のような理由で懐疑的である．［Sheffield 94]は生徒の数学的階層（continuum or hierarchy）として**図Ⅱ-2** を示した．**図Ⅱ-2** にある CONSUMERS（消費者）とは，日常生活に数学を運用し賢い消費者として生活できるレベル，という意味である．［Sheffield 94]は，当該学年の標準テストでは，PROBLEM SOLVERS（問題解決者）以上のステージは測れないとし，SAT，ACT の受験資格をもたない生徒の中に，数学的な talent が埋もれている可能性を指摘している．さらに，SAT や ACT でさえも，PROBLEM SOLVERS の域にある問題の出題はなく，また，確率や統計の分野が含まれていない．この意味でもアメリカの数学教師評議会（National Council of Teachers of Mathematics, NCTM）の基準（the Curriculum Standards for Grade 9-12，1989）を満たしていないと指摘している．

エ 拡充による数学才能教育の例

拡充によって数学教育を行っている例として，アメリカのノースカロライナ科学数学高校（NCSSM）と，韓国の江西教育庁英才教育院の事例を簡単に述べる．

NCSSM は 11・12 年生のみの 2 年制の高校である．公立校であるため，州の定める必修科目や卒業に必要な単位数の規定にしたがわなければならない．教育課程は，教育プログラムの深さと広さの両方を提供することを目指して作られており，拡充教育が実施されている［ハロラン 88]．

入学者の選抜は，SAT 等の学力テスト，10 年生の成績，学校の推薦，小論文，面接で行う．

NCSSM の課程目録には，学校の使命として，「科学，技術，エンジニアリング，数学における州，国家およびグローバルなリーダーになるように学問的に才能のある生徒を教育し，人類の向上のためのイノベーションを励起する」こと，「ノースカロライナの公教育を

進める」こと,「生徒の知的能力,創造性,分析力,批判的精神を養う」ことを挙げている.

1 学年の定員は 200 人,1 クラス平均 15 人の少人数教育であり,数学の授業では,「なぜ」そう考えるのかを常に問われ,討論形式のものが少なくない.数学や理科の宿題は論文形式のものが多く,思考の過程を書くよう求められる.

2014 年の課程目録では,41 の数学の科目が用意されている.ただし,それらのうち必修科目以外の科目の履修には,他の科目を修得していることや成績などの条件が設けられている.41 科目のうちの 15 科目は AP であり,その内訳は統計 6,解析 9 となっている.

AP 以外にも幅広い分野が網羅されている.それらの科目名を以下に列挙する.

代数学,幾何学,解析学,微分方程式,数値解析,複素系,整数論,組合せ論,ゲーム理論,グラフ理論,力学系,群論,ベクトル関数,偏導関数,重積分,ベクトル場,行列論,証明論,ネットワーク理論,数学的モデリング,問題解決,数学研究

上記の内容のうち,いくつかは難易度ごとに 1 つの科目として扱われているため,科目名を合計しても 41 にはなっていない.「問題解決」は,数学オリンピックの問題を題材にした授業である.「数学研究」の授業では論文の執筆が求められており,学術誌に投稿する場合もある.

数学科の指導目標は,「概念,応用およびテクノロジーの使用に焦点化した一般教養課程を通して,数学におけるしっかりした理解を確立する機会」を提示することであり,全員にグラフ電卓の購入が課せられている.

生徒たちは,大学への早期入学をせず 2 年間の課程を経たのちに大学に進学する.その意味では AP も含めて拡充教育を実施していると考えられるのである.

韓国のソウル市教育庁には,地域ごとに 11 の地域教育庁がある.それぞれの地域教育庁に 1 つずつの英才教育院が設置されている.その 1 つが江西教育庁英才教育院である[石川 11].

入学者の選抜は,学校の推薦,筆記試験(問題解決力検査),面接,審査委員会の審議で行われる.

江西教育庁英才教育院中等課程数学分科における教育目標は,「数学の問題の解決に留ま

らず，数学を作り出す数学的な力を強化し，英才に真性の『数学をする』経験をさせることで，彼らの潜在的可能性を極大化する」となっている．教育の年間プログラムは，基本課程，深化課程，選択課程の混合で構成されている．基本課程の目標は，「各分野の探索活動を通した体験および創造的思考力の啓発」，深化課程の目標は，「早修よりも，創造的，高度な水準の探究活動によって創造的な思考力の向上」，「各生徒が特性ある探究主題を設定できるよう，ホームページの活用，およびメンターを通した相談指導」となっている［石川 11］．

(2) 才能の認定に用いる諸検査

拡充と早修における才能の認定について述べたが，これらの認定に用いられる方法・検査についてまとめておく．まず，方法・検査は定性的なものと定量的なものがあり，前者は，チェックリスト，面接調査用シート，後者は，基準尺度測定シート，知的能力判定テスト，標準テスト等がある．

ア チェックリストと面接調査用シート

チェックリストは，教師や専門家，保護者が子どもの普段の学習態度や行動を観察し，才能の有無をスクリーニングするためのシートである．これに対して面接調査用シートは，教師やカウンセラーが，本人や保護者と直接面接するか，あるいは観察しながら記述するためのシートである．面接しながら記述することにより，教師や保護者の先入観を可能な限り排除して客観的に判断できるとされる．障がいをもった子どもやその保護者を対象とする場合には重要な調査方法である．

その一方で，面接用シートによる調査は，面接を行う教師やカウンセラーの力量によって大きく結果が左右される点が問題である．教師やカウンセラーが少ないため，才能者の発見を効率よく行うことができないことも指摘される．このため，面接者の力量に依存しないチェックリストの利用が多い．

表　Ⅱ-2　才能者の認定に用いられる検査

検　査　名	属性	特　　徴
チェックリスト	定性的	保護者，教師，専門家などが児童・生徒の普段の学習態度や行動を観察し，才能者であるかどうかをスクリーニングする．
面接調査用シート	定性的	教師や才能教育カウンセラーなどの専門家が，本人や保護者と直接面積あるいは観察しながら記述する．
基準尺度測定法	定量的	1つ1つの質問に，一般に1～5の5段階で点数化して回答し，各設問に対する合計が高いほど，高い能力の才能者と判断する．
知的能力判定テスト	定量的	種々の知能検査等．知能検査には以下の様な批判がある．(1)創造性，社会性，芸術的センス等は測れない　(2)標準化された1種類のテストしかないため練習効果が高い　(3)社会的な主流派を対象に作られているため人種や富裕度によって得点が異なる　など．
標準テスト	定量的	2001年成立のアメリカ連邦教育法「一人の子どもも置き去りにしない法（the No Child Left Behind Act of 2001，NLCB）」により，実施が義務化．学校の学習指導の評価や，子どもの学習到達度の測定に用いられる場合は学力テスト（achievement test）の1つと言える．SATやACTもその1つ．

イ　基準尺度判定シート

チェックリストと面接調査用シート，基準尺度判定シートは，質問項目に大きな違いはない．前者の 2 つが定性的な判断に基づいて判断するのに対して，後者は各質問項目を 4 段階や 5 段階で点数化し得点が高いほど高い才能を有すると判断する定量的な測定法である．代表的なもの 1 つが Renzulli らの SRBCSS である．

ウ　知的能力判定テスト

種々の知能検査は，このテストの 1 つである．知能検査の開発の大まかな歴史はⅡ－1 (1)に記したとおりである．

現在，よく知られているものに，5～16 歳を対象としたウェクスラー児童・生徒用知能検査（Wechsler Intelligence Scale for Children，WISC）や成人を対象としたウェクスラー成人用知能検査（Wechsler Adult Intelligence Scale，WAIS）がある．レヴィン知能検査（Raven Intelligence Test）は，パターン認識などの言語によらない知能検査であり，英語を理解できない難民の子どもや, 広汎性発達障がい（自閉症, アスペルガー症候群等）の子どもに用いられることがある．

知能検査に対するいろいろな批判は，Ⅱ－3 (1)アに記した．

エ 標準テスト

標準テスト（standard test）は，2001 年に成立したアメリカの連邦教育法「ひとりの子どもも置き去りにしない法（the No Child Left Behind Act，NCLB，2001)」によって実施が義務付けられたものであり，学力テスト（achievement test）の 1 つである．アメリカでは，例えば 5 年生用の標準テストを 3 年生に対して実施するなどして才能者の認定に使用している．

Ⅱ－３(1)イに記した SAT と ACT は，NCLB によって実施が義務付けられたわけではないが，アメリカの大学に進学する際には提出が必要であり，才能者の認定に用いるために早期受験することを考慮して，本研究では標準テストの 1 つとして類別しておく．

４ まとめ

本研究では，アメリカの初等中等教育法による才能の定義と第 16 期中央教育審議会の答申を踏まえ,数学的才能者を定義した(Ⅵ－２).その妥当性の検証の 1 つとして[Renzulli 78］の才能の三輪概念を用いた．これを一例として，本研究では才能の上位概念として，［Renzulli 78］の才能の三輪概念と［Andrews 09］の才能者の基本的特性を用い，才能の下位概念として，［Dąbrowski 77］の知性的過度激動を採用した（Ⅳ－７，表Ⅳ-11)．

また，第Ⅲ章における「数学的能力の判別ができる質問紙」の開発に際しては，Ⅱ－３の検討を踏まえ，筆者の長期的目的を満たす質問紙として，チェックリストあるいは基準尺度測定シートを用いることが妥当であると判断した（Ⅲ－２）．具体的には以下の 3 点を考慮した（Ⅱ－３(2)）．①面接調査用シートは，対象者が 1 人あるいはごく少数の場合でなければ用いることはできず，多くの生徒の中から才能者を選抜する目的には使えない．②また，面接調査用シートの使用については，カウンセラーなどの面接官を育成することも必要である．③知的能力判定テストにはⅡ－３(1)アに示した種々の批判がある．

参考文献

[Andrews 09] Andrews, L. J : "GIFTED AND TALENTED EDUCATION: Serving the needs of high-ability students", JST 理科教育支援センター才能教育シンポジウム資料「米国の才能教育の現状」, 2009

[Barnett 93] Barnett, L.B & Durden, W. G : "Education patterns of academically talented youth", Gifted Child Quarterly 37(4), pp.161–168, 1993

[Dąbrowski 77] Dąbrowski, K & Piechowski, M : "Theory of levels of emotional development", Dabor Science Publications, 1977

[藤永 10] 藤永保 : "才能とは何か―学力観の背景", 教育総合研究: 日本教育大学院大学紀要 3, pp.1-16, 2010

[Gagné 91] Gagné, F. N & Gary, A (Ed.) : "Toward a Differentiated Model of Giftedness and Talent, Colangelo, Handbook of Gifted Education", Allyn and Bacon, 1991

[Gardner 83] Gardner, H : "Frames of Mind: The Theory of Multiple Intelligences", Basic Books, 1983

[Gardner 01] Gardner, H, 松村暢隆 訳 : "MI : 個性を生かす多重知能の理論", 新曜社, 2001

[Gardner 03] Gardner, H, 黒上晴夫 訳 : "多元的知能の世界－MI 理論の活用と可能性", 日本文教出版, 2003

[Guilford 67] Guilford, J. P : "The nature of human intelligence", McGrow-Hill, 1967

[Guilford 71] Guilford, J. P & Hoepfner, R : "The analysis of intelligence", McGraw-Hill, 1971

[ハロラン 88] ハロラン芙美子 : "ティーンエイジブルースールポルタージュ・米国の教育改革", 日本経済新聞社, pp.361-469, 1988

[本多 08] 本多泰洋 : "オーストラリア連邦の個別化才能教育－米国および日本との比較", 学文社, 2008

[本多 10] 本多泰洋 : "諸外国の才能教育(1)(2)", 岩永雅也,松村暢隆 編, 才能と教育－個性と才能の新たな地平へ－, 放送大学教育振興会, pp.117-139, 2010

[本多 12] 本多 泰洋 : "米国における才能教育の歴史的考察 : 黎明期から第二次世界大戦まで", 帝京短期大学紀要 (17), pp.63-75, 2012

［石川 11］石川裕之：“韓国の才能教育制度－その構造と機能－”，東信堂, 2011

［石川 12］石川裕之：“韓国の才能教育事情”，比較教育学研究, pp.37-51, 2012

［認知的個性協会 13］認知的個性協会：“一般社団法人 認知的個性協会ホームページ”, http://www.cilearning.jp/, 2013.6.1 確認

［岩永 97a］岩永雅也：“才能と才能教育”，麻生誠，岩永雅也編，創造的才能教育，玉川大学出版部, pp.16-49, 1997

［岩永 97b］岩永雅也：“才能教育の理論と実践”，麻生誠，岩永雅也 編，創造的才能教育，玉川大学出版部, pp.50-117, 1997

［岩永 97c］岩永雅也：“才能教育をめぐる状況”，麻生誠，岩永雅也 編，創造的才能教育，玉川大学出版部, pp.172-192, 1997

［Johnsen 04］Johnsen, K : “Identifying Gifted Students: A Practical Guide”, Prufrock Press, 2004

［Johnsen 05］Johnsen, K & Kendrick, J (Ed.) : “Math Education for Gifted Students (Gifted Child Today Reader)”, Prufrock Press, 2005

［Jolly 06］Jolly, J. L : “Leta S. Hollingworth: P. S. 165 & 500: Lessons Learned”, Gifted Child Today vol29 Issue3, pp.28-34, 2006

［Jolly 10］Jolly, J. L & Bruno, J : “Historical Perspectives: Paul A. Witty: A Friend of Gifted Children”, Gifted Child Today vol33 Issue4, pp.14-17, 2010

［Karp 11］Karp, A : “Toward a History of Teaching the Mathematically Gifted: Three Possible Directions for Research”, Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education11 (1), pp.8-18, 2011

［Koichu 11］Koichu, B : “Overcoming a Pitfall of Circularity in Research on Problem Solving by Mathematically Gifted Schoolchildren”, Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education11 (1), pp.67-77, 2011

［Koshy 01］Koshy, V : “Teaching Mathematics to Able Children”, David Fulton Publishers, 2011

［Kruteskii 69］Kruteskii, V. A ; “数学的能力の構造”，明治図書出版, 1969

［Kruteskii 76］Kruteskii, V. A : “The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren”, University of Chicago Press, 1976

［Leder 11］Leder, G : “Mathematics Taught Me Einstein's Old Cocktail of Inspiration and Perspiration: Mathematically Talented Teenagers as Adults", Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education 11(1), pp.29-36, 2011

［Leikin 09］Leikin, et al. : "Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students", SensePublishers, 2009

［Marland 71］Marland, S. P : "Education of the Gifted and Talented－Volume 1: Report to the Congress of the United States", the U. S. Commissioner of Education, Department of Health, Education, and Welfare, pp.i～VIII-13, 1971

［松村 03］松村暢隆 : "アメリカの才能教育―多様な学習ニーズに応える特別支援", 東信堂, 2003

［松村 08］松村暢隆 : "本当の「才能」見つけて育てよう－子どもをダメにする英才教育", ミネルヴァ書房, 2008

［松村 10a］松村暢隆 : "心理学的概念としての才能", 岩永雅也, 松村暢隆 編, 才能と教育－個性と才能の新たな地平へ－, 放送大学教育振興会, pp.45-57, 2010

［松村 10b］松村暢隆 : "才能の評価と発見", 岩永雅也, 松村暢隆 編, 才能と教育－個性と才能の新たな地平へ－, 放送大学教育振興会, p.64, 2010

［松村 10c］松村暢隆, 佐野亮子, 小倉正義, 石川 裕之 : "認知的個性－違いが活きる学びと支援," 新曜社, 2010

［Milgram 89］Milgram, R. M (Ed.) : "Teaching Gifted and Talented Learners in Regular Classrooms", Charles C Thomas Pub Ltd, 1989

［中村 03］中村淳子, 大川一郎 : "田中ビネー知能検査開発の歴史", 立命館人間科学研究第 6 号, pp.93-111, 2003

［中村 10］中村順子, 水内豊和 : "日本における GT 教育の可能性", 富山大学人間発達科学部紀要第 5 巻第 1 号, pp.161-168, 2010

［二宮 05］二宮裕之 : "算数・数学の才能教育における「学習の深化(enrichment)」と「学習の加速化(acceleration)」", 日本科学教育学会年会論文集 29, pp.245-248, 2005

［Pitta-Pantazi 11］Pitta-Pantazi, et al. : "A Model of Mathematical Giftedness: Integrating Natural, Creative, and Mathematical Abilities", Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education 11(1), pp.39–54, 2011

［Renzulli 02］Renzulli, J. S, et al. : "Scales for Rating the Behavioral Characteristics of Superior Students (Revised Ed.)", Mansfield Center, CT: Creative Learning Press, 2002

［Renzulli 74］ Renzulli, J. S & Hartman, R : “Scale for Rating Behavioral Characteristics of Superior Students”, White. A (Ed.), Identification of the Gifted and Talented, Connecticut State Dept. of Education, Hartford. Bureau of Pupil Personnel and Special Education Services, pp.38-54, 1974

［Renzulli 77］ Renzulli, J. S : “The Enrichment Triad Model, A guide for defensible programs for the gifted and talented”, Creative Learning Press, 1977

［Renzulli 78］ Renzulli, J. S : “What makes giftedness? : Re-examining a definition”, Phi Delta Kappan 60, pp.180-184, 1978

［Renzulli 81］ Renzulli, J. S : “Revolving Door Identification Model”, Creative Learning Press, 1981

［Renzulli 83］ Renzulli, J. S, 松村暢隆 訳 ; “個性と才能をみつける総合学習モデル”, 玉川大学出版部, 1983

［Renzulli 88］ Renzulli, J. S : “A decade of dialogue on the three - ring conception of giftedness”, Roeper Review Volume 11 Issue 1, pp.18-25, 1988

［Renzulli 98］ Renzulli, J. S : “A rising tide lifts all ships: Developing the gifts and talents of all students”, Phi Delta Kappan 82, pp.105-111, 1998

［Renzulli 02a］ Renzulli, J. S : “Gifted and Talented Behavior and Education: A Special Issue of exceptionality”, Routledge, 2002

［Renzulli 02b］ Renzulli, J. S, et al. : “Scales for Rating the Behavioral Characteristics of Superior Students (Revised Ed.)”, Mansfield Center, CT: Creative Learning Press, 2002

［Renzulli 04］ Renzulli, J. S & Reis, S. M (Ed.) : “Identification of Students for Gifted and Talented Programs (Essential Readings in Gifted Education Series)”, Corwin, 2004

［Reynolds 14］ Reynolds, M : “第 1 回ギフテッド教育カンファレンス 2014 資料” , 2014

［Robinson 08］ Robinson. A & Clinkenbeard. P. R : “History of Giftedness: Perspectives from the Past Presage Modern Scholarship”, Springer, 2008

［小倉 09］ 小倉正義 : “アメリカにおけるギフテッドへの教育”, 岡南, 小倉正義, 杉山登志郎 著, ギフテッドー天才の育て方, 学習研究社, 2009

［Sheffield 94］ Sheffield, L. J : “Development of Gifted and Talented Mathematics Students and the National Council of Teachers of Mathematics Standards”, Diane Publishing Co, pp.2-9, 1994

［ Silver 97 ］ Silver, E. A : “Fostering Creativity through Instruction Rich in Mathematical Problem Solving and Problem Posing”, ZDM The International Journal on Mathematics Education 29(3), pp.75-80, 1997

［Silverman 03］ Silverman, L. J : “Gifted children with learning disabilities, N. Colangelo & G. A. Davis (Ed.), Handbook of gifted education (3rd ed.,)”, Boston, MA: Pearson Education, pp.533-543, 2003

［Smuin 14］ Smuin, S : “第 1 回ギフテッド教育カンファレンス 2014 資料”, 2014

［Sriraman 10］ Sriraman, B & Lee : “Book Review: Roza Leikin, Abraham Berman, Boris Koichu (Ed): Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students”, ZDM Mathematics Education 42, pp.507-510, 2010

［Sternberg 85］ Sternberg, R. J : “Beyond IQ; A triarchic theory of human intelligence”, Cambridge Univercity Press, 1985

［Witty 09］ Witty, P. A, 森重敏 訳 : “ギフテッド・チャイルド―その育て方と伸ばし方”, 家政教育社, 2009

［田中 12］ 田中義郎 : “アメリカの才能児・生徒教育－伝統的平等主義の今日的理解と今後の課題－”, 比較教育学研究, pp.80-96, 2012

［White 74］ White, A (Ed.) : “Identifying Students with Extra-Ordinary Learning Ability (Academically Gifted or "Terman Types")”, Identification of the Gifted and Talented, Connecticut State Dept. of Education, Hartford. Bureau of Pupil Personnel and Special Education Services, pp.71-76, 1974

［山内 12］ 山内乾史 : “才能教育について(概説)－日本における状況－”, 比較教育学研究, pp.3-21, 2012

---

iv 後に IQ 140 以上を基準とするようになった.

v 知能検査の場合，このような信頼性を示す係数は 0.95 程度であり，心理学の諸検査においても極めて高いことが知られている.

[vi] スタンフォード・ビネー検査を開発する中で Terman は，性別としては男児の方が点数が低く，また，人種としてはマイノリティの方が点数が低いことを確認した．性別に関しては検査が不完全であるためとして修正がなされたが，人種に関しては修正が行われなかった．

[vii] 収束的な思考の典型例が計算である．8＋7 を計算するとき，5＋3 と 5＋2 に分解して 15 と答える子どももいれば，10－2 と 5＋2 に分解して 15 に到達する子どももいる．あるいは九九で 8×2（＝8＋8）を習得した子どもがそれから 1 を引いて正答を得る場合もある．いずれの場合も 15 が正答である．これに対して拡散的な思考の代表とも言える創造性の検査では，新聞紙の用途をなるべく多く答えよ，などと問われる．包み紙，燃料などはよく思いつくが，防寒の下着代わり，壁に入れて断熱材にする，などは思いつくのは困難である．創造性の検査では，このような連想の多様さと独自性を採点の基準とする．

[viii] 多くの先行研究において，知能検査と創造性検査との相関は高々0.2 程度である．

[ix] ②の精神運動的過度激動は，「エネルギーの余剰」，「情緒的緊張の精神運動的表現」などと言うことができる．早口，際立った熱中，有無を言わせない話し方，衝動行為などが見られる．③の感覚的過度激動は，「感覚的な喜び」，「情緒的緊張の感覚的表現」，「審美的喜び」と言うことができる．目立ちたがり，美しい物・様式にこだわる等の行動が見られる．④の想像的過度激動は，「想像力の自由な活動」，「情緒的緊張の表現としての表象」，「退屈にあまり耐えられない」と言うことができる．比喩，詳細なビジュアル化，事実と作り事の混合，脚色などの行為・行動が見られる．⑤ 情緒的過度激動は，「感情の激しさ」，「情緒の身体的表現」，「強い情緒的表現」，「強い愛着・深い関係の受容力」，「自己に対する十分に分化された感情」と言うことができる．

[x] Renzulli は，これを「千鳥格子の作用（operation houndstooth）」と呼び，パーソナリティの特性として，楽観主義，勇気，あるテーマや学問への情熱，人の気持ちへの感受性，身体的・精神的エネルギー，展望あるいは使命感などを挙げた．

[xi] 代表的なものとして，アイオワ基礎学力テスト，カリフォルニア基礎学力テスト，カリフォルニア学力テスト，スタンフォード学力テスト等が挙げられる．

Ⅲ 数学的能力判別のための質問紙の開発と実施

１ 本章の目的

Ⅰ－１で述べたように，本研究の直接的な目的は，いろいろな学力層における数学の才能伸長モデルを作ることである．

そのためのスキームとして，まず，「数学的能力の判別ができる質問紙」の開発が必要である(「数学に対する思考・表現等の能力ならびに態度に関する基準尺度測定質問紙(以下，質問紙)」)．開発した質問紙によって，日本数学オリンピック予選参加者（予選合格者，不合格者)，一般的な高校生にアンケート調査を行い，異なる学力層における数学的能力の特性を分析する（第Ⅳ章，第Ⅴ章)．この分析をもとに卓越性の放射現象を目指した「才能伸長モデル」を構築する．

一般的な高校生とは各都県の公立高校のうち，上位校，中位校，下位校から 1 校ずつ，同様に私立高校のうち，上位校，中位校，下位校から１校ずつ，合計６校の生徒たちのことを言う（Ⅲ－４)．このように，日本数学オリンピック予選合格者，不合格者，上位校，中位校，下位校の５つのグループを抽出することによって，各段階における数学的才能の伸長に寄与する特性を見出したい．また，この５グループを抽出することによって，質問紙の判別性能，信頼性・妥当性の検証を行うことができる．

具体的には，日本数学オリンピック予選者全体と予選合格者，不合格者に対して因子分析を行い，それらの３つのグループの数学的特性を検討する．また，予選合格者と不合格者の差異を検討し，本選合格者のプロファイリングも行う．

さらに，日本数学オリンピック予選合格者，不合格者，上位校，中位校，下位校の５つのグループに対してクラスタ分析を行い，それぞれのグループの数学的特性を検討する．予選合格者と不合格者に関しては，因子分析とクラスタ分析の２つの統計分析を行うことによって，より確かな検証ができると思われる．

以上のことから，本章の目的は，「数学に対する思考・表現等の能力ならびに態度に関する基準尺度測定質問紙」の開発と，質問紙による上記の数学的能力の判別性能の高さの検証，および質問紙の信頼性・妥当性の検討である．日本数学オリンピック（以下，数学オリンピック）予選参加者398人と一般的な高校生454人に，この質問紙によるアンケート調査を実施し検討を行った．

2 検査法の選定

Ⅱ－３(1)ウに述べたように，アメリカでは数学における才能者の選抜・認定として SAT や ACT が用いられてきたが，［Sheffield 94]のような批判もある．日本において SAT や ACT に相当する標準テストは，大学入試センター試験であるが，これは大学の入学試験以外には用いることができない．また，用いることができるとしても図Ⅱ-2 の PROBLEM SOLVERS 以上のステージ，とくに，PROBLEM POSERS（作問者），CREATORS（創造者）を測ることは困難であると考えられる．Ⅱ－３(2)で検討したように，面接調査用シートは，対象者が１人あるいはごく少数の場合でなければ用いることはできず，多くの生徒の中から才能者を選抜する目的には使えない．また，カウンセラーなどの面接官を育成することも必要である.知的能力判定テストには,Ⅱ－３(1)アに示したような批判がある．以上のことから，筆者の長期的目的を満たす検査・質問紙として，チェックリストあるいは基準尺度測定シートを用いることとした．

今まで，数学や科学のチェックリストや基準尺度測定シートの開発が行われてきている[xii]．例えば［House 87］，［Kennard 01］，［Bosse 06］，［McClure 07］，［Brandl 12］（ここに挙げた５編を以下では「［House 87］等」と記す）や［Sumida 10］,［Renzulli 02］，［White 74］を挙げることができる．［Renzulli 78］は，以前から多くの研究者や教師の間で言われていた「才能者に共通した全般的な特徴・特性」を「才能の三輪概念」であるとした．［Renzulli 02］が才能の三輪概念のそれぞれを評価し，見つける方法として開発したものが SRBCSS である（Ⅱ－１(4)）．

3 質問紙の開発

本研究における質問紙の開発は，先行研究によって示された 3 つの分野のチェックリストを参考にして行った．その 3 分野とは，数学的才能，科学的才能，および一般的才能である．

数学的才能のチェックリストは先に示した「［House 87］等」の 5 編であり，科学的才能のチェックリストは，［Sumida 10］の開発した理科教育における日本人・小学生向けの初めての才能チェックリストである. そして, 一般的才能のチェックリストは, ［Renzulli 02］の SRBCSS と［White 74］に掲載されている Terman Types と呼ばれるチェックリストである.

ところで，欧米では数学や科学の才能者の思考・行動等の特性チェックリストが作られていたが，西洋諸国向け以外にはそれらがない状態であった［Phillipson 07］. 欧米のチェックリストには，演劇に関する表現能力など日本人には合わない質問項目もあり，［Sumida 10］が日本人向けのチェックリストを作成したことは，日本の科学才能教育において礎となるものである.

数学が科学の一分野であることを考えれば，数学のチェックリストが部分的に科学のチェックリストに包括されると考えられる．これについては「［House 87］等」と［Sumida 10］との対応を検証し，それらの多くが［Sumida 10］に含まれていることを確認した．実際，［Sumida 10］の質問項目は 60 個あるが，これらを「［House 87］等」，［Renzulli 02］，［White 74］と比較検討したところ，実に 37 個の質問項目がほぼ同じ内容であった．そこで，本研究では，［Sumida 10］が日本人向けに開発された初めてのチェックリストであることを重視し，［Sumida 10］を，数学用・高校生向けに改訂して質問紙を開発した．上記のような経緯から，［Sumida 10］を参考として基準尺度測定質問紙を作成することは妥当であると思われる.

［Sumida 10］の才能チェックリストは，「自然現象に対する興味，モチベーションと態度」，「科学的思考」，「観察と実験における技術と表現」，「自然現象の知識と理解」の各分野から 15 項目ずつ合計 60 個の項目から成り，日本人に合うように作られている．本研究では，これらの 4 分野を「数学に対する興味，モチベーションと態度」，「数学的

思考」，「思考における技術と表現」，「数学の知識と理解」に置き換え，1 つ 1 つの項目について数学の才能について論じた「［House 87］等」，［White 74］や［Renzulli 02］の SRBCSS の検査項目と比較をした上で，各質問項目を数学用に改訂した．

さらに，数学に特有な特性とされ，［Sumida 10］に含まれないもの 11 個を加え，逆に科学に特有で数学の特性に含まれないと考えられるものを削除した．具体的には，「1 回で（反復しないで）新しい数学の内容を学べます」，「数学の問題を解いて楽しんだり，数独のような数学パズルで遊んだり，テレビゲームをしたりします」などは［Sumida 10］にはなく，数学に特有な特性である（「［House 87］等」）．逆に［Sumida 10］にあるが，科学に特有で数学の特性とは考えにくいものとして「喜んで生き物を世話し，育てます」などの項目を削除した[xiii]．以上のような作業を通して付録 1 の質問紙が完成した．

4 質問紙を用いたアンケート調査

数学オリンピック予選参加者の特性の分析が研究目的の 1 つであるため，実際の調査では，教師によるチェックリストへの記入ではなく，直接，生徒が自記式で回答する方法をとった．生徒自身が記入することによる客観性のブレは，800 人以上のサンプルを取ることで克服できると考えられる．

質問紙によるアンケート調査は，数学に対する思考・表現ならびに態度等について 4 択式 48 個の質問項目で構成されている．例えば，「同級生よりも速く，かつ上手く数学を学べます」という項目について「1. そう思わない　2.あまりそう思わない　3.ややそう思う　4.そう思う」の 4 つから自分に最も適するものを選ぶのである．2013 年 1 月 14 日 13 時から 3 時間にわたって行われた第 23 回日本数学オリンピック予選の終了後，東京会場（早稲田大学 348 人），神奈川会場（神奈川県私学会館ほか 1 か所 131 人）の計 479 人の予選参加者に対して，数学オリンピック財団係員による指示のもと，20 分程度の時間をとり実施された．その際，時間を掛け過ぎず感じたとおりに答えるよう担当係員から注意を与えた．

当日の数学オリンピック予選全体の参加者は 3,402 人であった．本研究で行ったアンケートは東京・神奈川会場合計で 416 人の回答を得た．回答の一部欠損等，統計処理上不適切なものをクリーニングした結果 398 人の回答が有効となった．このうち，予選合格者を

表 Ⅲ-1 アンケート参加生徒の人数

東京・神奈川の数学オリンピック予選参加者数	479
アンケート回答者数	416
有効回答者数	398（内訳　G1：56，G2：342）

	公立上位	私立上位	公立中位	私立中位	公立下位	私立下位	計
アンケート回答者数	75	75	80	86	72	90	478
有効回答者数	73	70	74	84	70	83	454
有効回答者数の計	143		158		153		454

G1 と呼び，予選不合格者を G2 と呼ぶ．398 人中，G1 は 56 人，G2 は 342 人であった（**表Ⅲ-1**）．また，オリンピック予選参加者全体を G0 と呼ぶことにする．

さらに，2013 年 9 月，公立高校のうち，上位校，中位校，下位校から 1 校ずつ，同様に私立高校のうち，上位校，中位校，下位校から 1 校ずつ，合計 6 校の生徒たちにもアンケート調査をした．数学の授業において，担当教員の指示のもと，20 分程度の時間をとり実施された．その際，時間を掛け過ぎず感じたとおりに答えるよう担当教員から注意を与えた．

各高校からは，高校 1 年の 1 クラス（約 40 人）および，高校 2 年の 1 クラス（約 40 人）の計 2 クラスにアンケートを行った．一部の学校では，生徒の学力によるいわゆる選抜クラスを編成していたので，その選抜クラスでのアンケートは避け，一般的なクラスから任意に選んだ．その他の学校では，学力別のクラス編成は行っていなかったため任意にクラスを選んだ．ただし，上位校とは，当該高校が設置された自治体（都，県）における全高校の上位 1/3 に属する学校を指す．同様に，中位校は 1/3～2/3 の間に，下位校は 2/3 以下に属する高校である．その判定は，①首都圏を中心に教室を展開する市進学院の提供する偏差値[xiv]，②全国で個別教室を展開する株式会社トライグループの提供する偏差値[xv]の両方で上記の基準を満たすこととした．③東京都立高校に関しては，都内の多くの中学生が受験すると言われている「V もぎ（株式会社進学研究会主催)」，「W もぎ（株式会社創育主催)」の合格確実圏（合格可能性 80%以上）の偏差値[xvi]をさらに加えて，都合 4 つの偏差値が上記の基準を満たすこととした．また，各自治体の生徒の学力層が均等に存在すると仮定した．この 6 校全体の生徒を GH と呼ぶことにする．GH のアンケート参加者数は 478 人であり，回答の一部欠損等，統計処理上不適切なものをクリーニングした結果 454 人の回答が有効となった．6 校の高校別の詳細は**表Ⅲ-1** に記す．

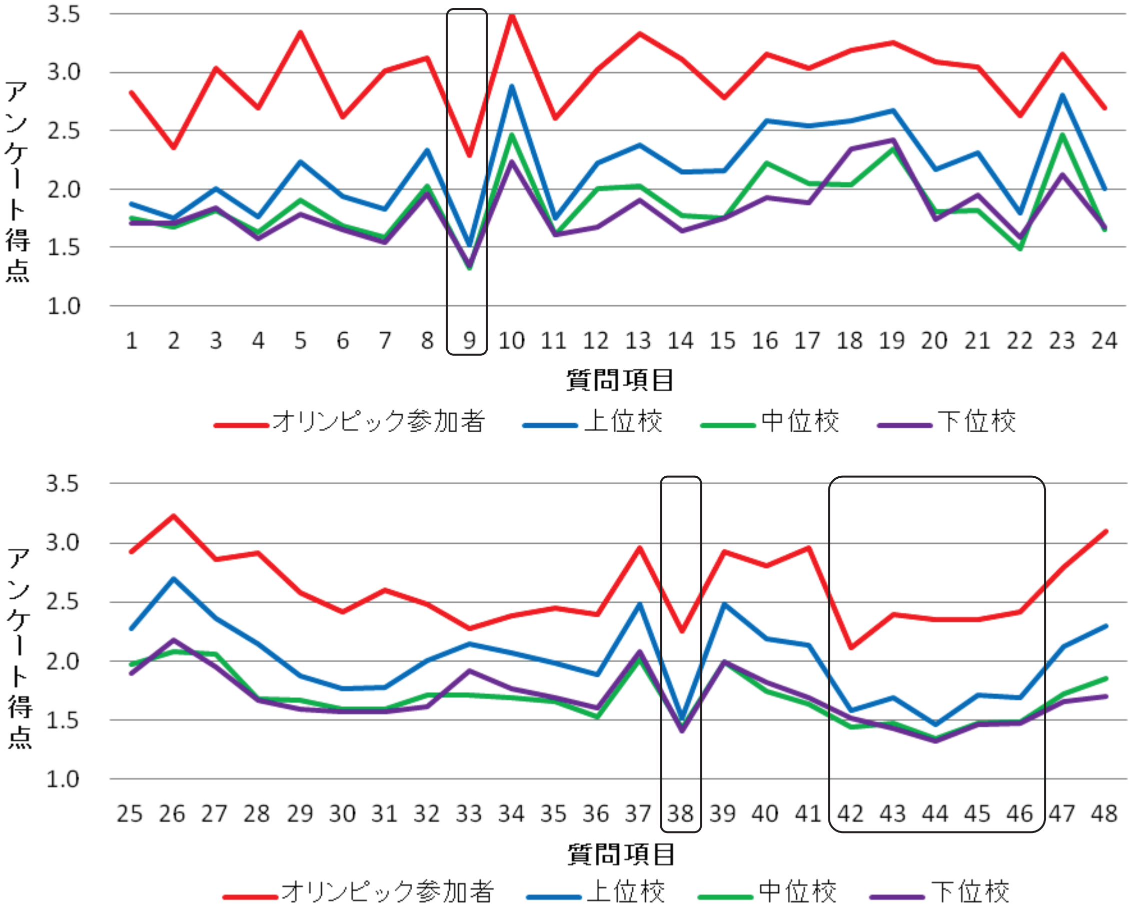


図 Ⅲ-1 数学オリンピック予選参加者と上位校，中位校，下位校の平均点（枠線の中は床効果のある項目）

5 質問紙の判別性能および信頼性・妥当性

本節では，Ⅲ-３で開発した質問紙における判別性能の高さを検証し，続いて，質問紙の信頼性および妥当性について検討する．

(1) 質問紙の判別性能

ア 平均点のグラフの検討

数学オリンピック予選参加者（G0）と上位校，中位校，下位校の平均点を折れ線グラフにしたものが**図Ⅲ-1** である．縦軸はアンケートの得点（4 点満点），横軸はアンケートの

質問項目の番号である（全 48 問）．一般的に下位校よりも上位校の方が，上位校よりも数学オリンピック予選参加者の方が，数学の学力は高いと考えられる．Ⅵ－２(3)でも述べる通り，実際，数学オリンピック予選参加者に占める上位校の人数比は 95.5%であり，中位校・下位校の人数比はそれぞれ 4.5%であった．さらに，Ⅲ－４における先述の偏差値①かつ②，または，①かつ②かつ③の上位 5.0%の高校の人数比は 45.1%であった．数学オリンピック予選参加者の実に約半数は，上位 5.0%に属する生徒で占めているのである．一方，質問紙の回答による点数も数学の学力と同じ傾向であることが**図Ⅲ-1** からわかる．すなわち，数学の学力と質問紙は相関が高いと考えられる．

このグラフの特徴は，G0 の折れ線と，GH に属する各グループの折れ線が交差していない点にある．この結果は，質問紙が数学的能力を判別できていることを示唆している．

また，各折れ線の「形」がほぼ相似形であることから，各グループの才能伸長に関しては，同じ方向性で行うことができる可能性も読み取れる．

図Ⅲ-1 の折れ線に関する基礎データは**付録 4** に収録している．

イ t 検定

さらに，G0 と GH 間の平均値の差について検討した．まず各質問項目について，G0 と GH 間で F 検定を行った．この結果を受けて，等分散の質問項目については t 検定を，等分散でない質問項目については Welch の方法による t 検定を行った．用いたソフトウェアは，R（ver. 2.15.2）である．次に示す**表Ⅲ-2** は，各グループ間の有意差のある質問項目の割合を示したものである．

表Ⅲ-2 の「①オリンピック－上位校」において，有意でない質問項目は 1 つだけであり，その P 値は 0.214 であった．その他の 47 項目はすべて有意で，P 値の和は 0.001 未満であった…(a)．「②オリンピック－中位校」はすべての項目で有意であり，全 48 項目の P 値の和は 0.001 未満であった…(b)．「③オリンピック－下位校」もすべての項目で有意で

表 Ⅲ-2 数学オリンピック予選参加者と一般的な高校生に関する t 検定の結果

	有意差ありの割合
①オリンピック－上位校	47/48 （ 97.9%）
②オリンピック－中位校	48/48 （100.0%）
③オリンピック－下位校	48/48 （100.0%）

有意水準 0.1%

あり，全 48 項目の P 値の和は 0.001 未満であった…(c)．(a)～(c)は，すべて 0.001 未満であるから，①については，1 つの質問項目を除く 47 項目全体において，②，③については，ともに 48 項目全体において有意水準 0.1%で有意であると言える．以上のことから，質問紙が数学的能力の判別に有用であると考えられる．

なお，この項で用いた基礎データは巻末の**付録 2** に収録している．

ウ 判別分析

G0 と GH 間における分散・共分散行列の同等性の検討のため，ソフトウェア R（ver. 2.15.2）および群馬大学・青木繁伸教授のソースコード[xvii]を用い，ボックス（Box）の M 検定を行ったところ，各グループ間はすべて分散・共分散行列が同等でなかった．そのため，青木繁伸教授の運営する web 上のサービス「Black-Box : 二次の判別関数」[xviii]を用い，マハラノビスの距離による 2 次の判別分析を行った（**表Ⅲ-3**）．この結果，G0 と GH の各グループ間の正判別率は，少なくとも 90.8%以上あり，また，数学オリンピック予選合格者の集合である G1 と GH 各グループ間の正判別率は，少なくとも 95.5%ある．このことから質問紙は，数学的能力に関して高い正判別率を有すると言える．

さらに，G1 と各高校 6 校との判別分析を行ったところ，公立高校に関しては上・中・下位の各高校に関しては正判別率が 100.0%であった．G1 と各私立高校との正判別率も，少なくとも 99.2%あり，極めて高い正判別率を有する．つまり，質問紙は数学的能力を判別することができると考えられる．

以上，折れ線グラフ，t 検定，判別分析の結果を総合して，本研究の質問紙は数学的能力を判別できると言える．

なお，この項で用いた基礎データは巻末の**付録 3** に収録している．

表 Ⅲ-3 各グループ間の正判別率(%)

	上位校	中位校	下位校
G0	95.1	90.8	91.8
G1	95.5	98.6	98.1

	公立上位校	公立中位校	公立下位校
G1	100.0	100.0	100.0

	私立上位校	私立中位校	私立下位校
G1	99.2	99.3	99.3

(2) 質問紙の信頼性

ア 質問紙の内部信頼性

G0 のアンケート結果に対して，ソフトウェア R（ver. 2.15.2）を用い，因子抽出法：最尤法，因子軸回転：プロマックス回転による因子分析を行った．初期解における固有値の減衰状況から判断して因子数を 3 とした．3 回ずつ回転を行い，その度に因子負荷量が 0.400 未満の質問項目を削除したところ，3 つの因子を抽出した．各因子の信頼性を確認するため，ソフトウェア R（ver. 2.15.2）および群馬大学・青木繁伸教授のソースコードを用い[xix]，Cronbach の α 係数を求めたところ，因子Ⅰ：0.912，因子Ⅱ：0.916，因子Ⅲ：0.917 であった．したがって各因子で高水準の信頼度が得られたと言える（Ⅳ-３）．

イ 天井効果と床効果

次に天井効果・床効果について検討する．［辻 07］によれば，その判定には「平均値±標準偏差」がそれぞれ質問紙の尺度の最高値よりも大きいか，または最低値よりも小さいか，を判定基準とする方法があるとされる．現在，わが国の教育・経営分野の論文においてもこの方法がしばしば採用されていることに鑑み，本研究でもこの基準を用いることにする．

本質問紙の測定データの平均値の表記は，原則として測定データの精度＋1 桁としている. 本研究の測定データは, 1～4 の整数値であるため, 平均値の表記は小数第 1 位である．同様に，標準偏差の表記は，測定データの精度＋2 桁としている．したがって，本研究では標準偏差の表記は小数第 2 位である．しかし，「平均値±標準偏差」を求めるにあたって，ここでは平均値の表記をより精度の高い小数第 2 位にそろえることにする．

表 Ⅲ-4 平均値－標準偏差＜1 の質問項目

質問項目		平均値（C）	標準偏差(E)	C－E
9	高いレベルの数学に関わるような鋭い質問をします	1.81	0.88	0.93
38	ある数学的な話題についての知識が豊富です	1.82	0.95	0.87
42	たくさんの数学用語を知っています	1.79	0.89	0.90
43	「数学」とは何かについて自分の考えをもっています	1.93	1.01	0.92
44	教科書の内容を超えた数学について知識が豊富です	1.83	0.96	0.87
45	日常生活の中の数理現象を理解します	1.92	0.93	0.99
46	数学の知識と理解に自信があります	1.95	0.98	0.97

G0，GH の計 852 人の回答について，「平均値±標準偏差」を 48 の質問項目毎に求めたところ，「平均値＋標準偏差」の最大値は 3.93＜4 となったため，天井効果は認められなかった．本質問紙はその性格上，天井効果がないことが重要であり，この意味で信頼性を有すると言える．「平均値－標準偏差」については，48 項目中 7 項目が 1 未満となり，これらについては床効果が確認された（**表Ⅲ-4**）．この 7 項目は GH 全体の平均値が低い一方で，G0 と GH の平均値の差は十分あり，床効果が認められるものの，よく判別できてい

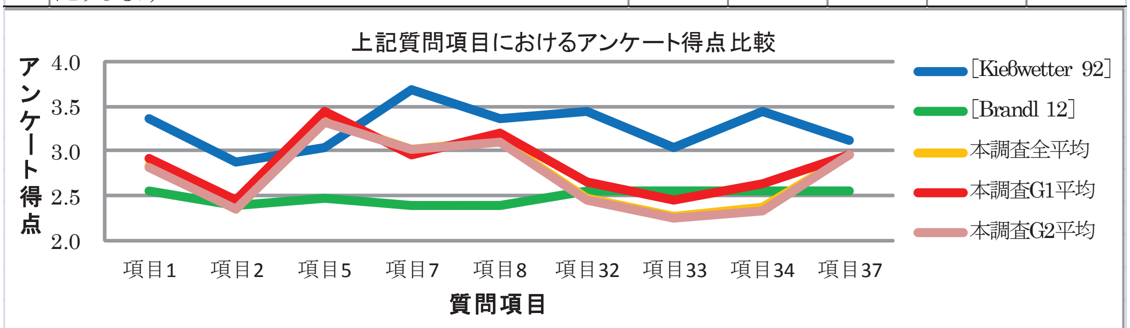
ると考えられる（**図Ⅲ-1** の囲み部分）．この点からも信頼性を有すると考えられる．

(3) 質問紙の妥当性

［Brandl 12］は，ドイツの寄宿舎学校（German Boarding School for Higher Education）の高校 2・3 生 113 人に，その生徒らの数学的能力の特性についてのアンケート調査をしている．この寄宿舎学校の入学要件は大変厳しく，(1)入学試験，(2)調査書，(3)IQ130 以上（the intelligence structure test I-S-T 2000 R ［Liepmann 07］），(4)ソーシャルスキルの訓練を 2 日以上受ける，となっている．［Brandl 12］は，この生徒らを高達成者（High Attaining Students，HAS）と呼んでいる．この論文では，［Kießwetter 92］と同一の質問項目を用いて，その結果を比較している．［Kießwetter 92］は数学的ギフテッド（Mathematically Gifted Students，MGS）の特性を分析した論文であり 16 個の質問項目を用意している．そのうち 9 項目が本研究で作成した質問紙の項目とほぼ同一の内容となっている．この 9 項目について，［Brandl 12］，［Kießwetter 92］の結果と本研

表 Ⅲ-5 本研究の質問項目と ①[Brandl 12] および ②[Kießwetter 92]との比較

	質 問 項 目	①	②	本調査全平均	本調査G1平均	本調査G2平均
1	同級生よりも速く，かつ上手く数学を学べます	3.4	2.6	2.8	2.9	2.8
2	1回で（反復しないで）新しい数学の内容を学べます	2.9	2.4	2.4	2.5	2.4
5	数学の問題を解くのを楽しみます	3.0	2.5	3.3	3.5	3.3
7	上級学年の教科書や課題に取り組みたいと思っています/取り組んでいます	3.7	2.4	3.0	3.0	3.0
8	やさしくて反復練習の多い宿題は嫌いです	3.4	2.4	3.1	3.2	3.1
32	考えた結果を分かりやすく説明します	3.4	2.6	2.5	2.7	2.5
33	コンピュータを上手く用います	3.0	2.6	2.3	2.5	2.3
34	何を学習したか自分の言葉で表現します	3.4	2.6	2.4	2.6	2.3
37	間違うことを心配をしないで考えたり，問題を解いたりします	3.1	2.6	3.0	3.0	3.0



究の数学オリンピック予選参加者（G0）の結果を比較したところ，**表Ⅲ-5** を得た．［Kießwetter 92］および，［Brandl 12］は 5 点満点であり，本研究の質問紙は 4 点満点であるため，前者 2 つの得点 0.8 倍することで 4 点満点に換算した．

表Ⅲ-5 下のグラフで示したように, G0, G1，G2（赤系統の線）は，MGS（青線）ほどの高得点ではないが, 総体的には HAS（緑線）以上の結果を残していると言える．とくに G1 は，9 項目中 8 項目で HAS よりも高い得点となっている．［Brandl 12］は MGS の識別について，異常な社会的行動のない HAS は潜在的な MGS であるとしており，さらに，MGS と HAS を学習環境の構造と内容に関して同じ方向で促進することができると述べている．これらを総合して，本質問紙の結果は G0，G1，G2 の結果として妥当であり，数学的能力を測る質問紙としても妥当性があると判断できる．

表 Ⅲ-6 ［Sumida 10］と本質問紙の因子負荷量

因子Ⅰ		因子Ⅲ	
*1	*2	*1	*2
0.957	0.939	0.792	0.573
0.921	0.847	0.740	0.439
0.912	0.447	0.714	0.665
0.910	0.552	0.702	0.332
0.908	1.047	0.683	0.532
0.890	0.343	0.565	0.811

また，本研究のアンケート結果に対して因子分析を行った結果と［Sumida 10］の因子負荷量を比較したものが**表Ⅲ-6** である．［Sumida 10］の調査では，3 つの因子が抽出されているが，そのうち因子Ⅱは科学に特有の特性であるため，因子Ⅰ，Ⅲのみを記す．*1 は［Sumida 10］の各項目の因子負荷量を大きい順に並べたものである．*2 には，それと並列して本質問紙の，［Sumida 10］に対応する質問項目の因子負荷量を記している．*2 の被験者は G1 である．*2 のうち，0.500 以上の項目のセルを網掛けしてある．それぞれ 6 項目中 4 項目で［Sumida 10］と同様に高い因子負荷量を示しており，数学的能力を測る質問紙として妥当であると考えられる. なお, 因子分析の詳細に関しては第Ⅳ章に記す.

6 質問紙の限界

上記のように本質問紙の判別性能，信頼性，妥当性について検討し，判別性能では G1 と上位校，中位校，下位校間でそれぞれ 95.5%，98.6%，98.1%の正判別率を確認した．つまるところ，本質問紙は G1 すなわち数学オリンピック予選合格者のスクリーニングが

可能だと言える.

しかし，一方では，質問紙によって数学的能力を測ることの限界についても述べなければならない.

後のⅥ-２(1)「予選合格者の中の「数学的才能者」」において，「数学的才能者」を「18歳以下の日本数学オリンピック本選合格者，または実用数学技能検定１級の合格者」と定義し, その妥当性を検討する. 本研究において, その妥当性は十分検証できたと考えるが, それは，国際数学オリンピックや日本数学オリンピックの出題レベル，および両方の数学オリンピック参加者のその後の進路についての検討による結論である.

図Ⅱ-2「生徒の数学的階層」のうち，数学オリンピック自体で測ることができるのは PROBLEM SOLVERS までであると考えられる．PROBLEM POSERS や CREATORS まで測ることは困難である．しかし，前述したように，数学オリンピックの出題レベルと数学オリンピック参加者のその後の進路から，数学オリンピックによる「数学的才能」の抽出が可能であると考えたのである.

当然に, 質問紙による数学的能力の判別も PROBLEM POSERS や CREATORS を測ることはできない.

本質問紙によって可能なことは，G1 のスクリーニングであり，その中に数学オリンピック本選合格者に含まれることから，本質問紙では「数学的才能者」である可能性をもった生徒の判別ができるが，「数学的才能者」の判別は困難であると言わざるをえない．この点は質問紙の限界の１つである.

また，質問紙の場合，回答者が率直に正直に質問項目に答えてくれることが前提になっているが，回答者の主観が入る余地は否定できない．本研究では生徒自身が回答することによる客観性のブレを回答者数の多さで克服できると考えたが，ひとりひとりの回答に関するスクリーニングについては，主観を含む回答によって誤判別が起こることを考慮しなければならない．この点も質問紙の限界と言える.

したがって，質問紙を用いた調査・研究に関しては，これらの限界を承知した上で行う必要があり，得られた結果にもまた限界があることを知っておかなければならない.

7 まとめ

本研究で開発した質問紙は，ここに示したように，質問紙としての信頼性，数学的能力の検査としての妥当性を有し，また，数学的能力に関して非常に高い判別性能をもつ．したがって，数学的能力の測定質問紙として標準的なものになりうることが示されたと言える．

参考文献

［Barnett 93］Barnett, L.B & Durden, W. G : “Education patterns of academically talented youth”, Gifted Child Quarterly 37(4), pp.161–168, 1993

［Bosse 06］Bosse & Rotigel : “Encouraging Your Child's Math Talent”, Prufrock Press, pp.15–42, 2006

［Brandl 12］Brandl, M & Barthel, C : A Comparative Profile of High Attaining and Gifted Students in Mathematics, 12th International Congress on Mathematical Education Pre-Proceedings, 1429–1438, 2012

［House 87］House, P. A（Ed.）: “Providing Opportunities for the Mathematically Gifted K-12”, National Council of Teachers of Mathematics, pp.1–46, 1987

［本多 08］本多泰洋：“オーストラリア連邦の個別化才能教育－米国および日本との比較”, 学文社, pp.16–38, 2008

［Kennard 01］Kennard, R : “Teaching Mathematically Able Children”, David Fulton Publishers, pp.1–10, 2001

［Kießwetter 92］Kießwetter, K : “Mathematische Begabung” als Element des Weltbildes kompetenter Mathematiklehrer und Schüler- ausgewählte Ergebnisse aus einem DFG-Projekt. MU 38 (1), pp.54–60, 1992

［McClure 07］McClure & Piggott : “Meeting the Needs of Your Most Able Pupils :Mathematics”, David Fulton, pp.38–52, 2007

［Phillipson 07］Phillipson, S. N & McCann, M.（Ed.）: “Conceptions of giftedness”, Sociocultural perspectives, 2007

［Renzulli 78］Rezulli, J.S. : “What makes giftedness? : Re-examining a definition”, Phi Delta Kappan, 1978

［Renzulli 02］Renzulli, J. S, et al. : “Scales for Rating the Behavioral Characteristics of Superior Students（Revised Ed.）”, Mansfield Center, CT : Creative Learning Press, 2002

［Sheffield 94］Sheffield, L. J : “Development of Gifted and Talented Mathematics Students and the National Council of Teachers of Mathematics Standards”, Diane Publishing Co, pp.2–9, 1994

［Sumida 10］Sumida. M : “Identifying Twice-Exceptional Children and Three Gifted Styles in the Japanese Primary Science Classroom”, International Journal of Science Education, Vol. 32, No. 15, pp.2097–2111, 2010

［辻 07］辻義人 ; “授業改善アンケートの分析(1)”, 小樽商科大学学報第 343 号, 2007

［White 74］White, A (Ed.) : “Identifying Students with Extra-Ordinary Learning Ability (Academically Gifted or "Terman Types")”, Identification of the Gifted and Talented, Connecticut State Dept. of Education, Hartford Bureau of Pupil Personnel and Special Education Services, pp.71-76, 1974

---

xii これらは 2E 教育に適用される場合もある．さらに，そこから生まれた認知的個性（Cognitive Individuality，CI）の評価ツールとして開発されている側面もある．日本の一般社団法人，認知的個性協会によれば，CI とは「さまざまな学習の得意・苦手や興味などを，「発達の凸凹」がある総合プロフィールとして捉えるもの」である．アメリカでは学習障がい児の才能を見いだして学力を高めようとする学校教育の取り組みがあり,「二重に特別な（twice-exceptional［2E]）」教育と呼ばれている．

xiii 本文で示したもののほかに「数学の問題を解くとき，面白い方法を見つけ出します」，「新しい数学の内容を思い出して簡単に使うことができます」，「上級学年の教科書や課題に取り組みたいと思っています/取り組んでいます」などは［Sumida 10］にはなく，数学に特有な特性である．逆に［Sumida 10］にあるが，科学に特有で数学の特性とは考えにくいものとして，本文で示したもののほかに「観察や実験で使われる装置を修正したり改良したりします」，「生態学の観点から，動物の世話をしたり，植物を育てます」，「上手に、動物，植物，石などを集めます」，「観察や実験の装置を用いるとき，入念な注意

を払います」などがあり，それらの項目を削除した．

[xiv] www.ko-jukennavi.net/inavi02-01.html，www.ko-jukennavi.net/inavi02-02.html，www.ko-jukennavi.net/inavi17.html 2014.11.2 確認

[xv] www.trygroup.co.jp/exam/high/tokyo/list/，www.trygroup.co.jp/exam/high/ibaraki/list/，www.trygroup.co.jp/exam/high/tokyo/list/ 2014.11.2 確認

[xvi] www.geocities.jp/toritsukoukou2/ 2014.11.2 確認

[xvii] aoki2.si. gunma-u.ac.jp/R/eq-cov.html 2014.4.1 確認

[xviii] aoki2.si.gunma-u.ac.jp/ BlackBox/ BlackBox.html 2014.4.1 確認

[xix] aoki2.si.gunma-u.ac.jp/ R/alpha.html，2014.4.1 確認

Ⅳ 質問紙を用いた数学オリンピック予選合格者と不合格者の共通点と相違点の検討

１ 本章の目的

本章の目的は，第Ⅲ章で開発した質問紙を用いた調査による日本数学オリンピック予選・本選参加者のそれらの特性を分析することである．特に数学オリンピック予選合格者と不合格者の特性の差異，および本選合格者のプロファイリングについて検討する．Ⅲ-４に記したアンケート調査の結果のうち，数学オリンピック予選参加者に関する検討を本章で行う．一般的な高校生の数学的能力に関する特性等は第Ⅴ章で検討する．

２ 予選合格者と不合格者の平均点の差異

質問紙（アンケート）の各質問項目の平均点を，数学オリンピック予選の合格者 56 人（G1）と不合格者 342 人（G2）のそれぞれのグループで比較した．

まず各質問項目について，G1，G2 の間で F 検定を行ったところ，3 つの質問項目をのぞくすべての項目で等分散であった．この結果を受けて，等分散の質問項目については t 検定を，等分散でない質問項目については Welch の方法による t 検定を行った．

この結果，P 値が 0.050 未満の項目が 6 項目で確認された（表Ⅳ-1）．

なお，本節では数学オリンピック予選合格者と不合格者の質問項目の平均点の差異を検討するため，平均点を小数点第 2 位まで表記する．

表 Ⅳ-1 P 値<0.05 の質問項目

質問項目	G1	G2	G1－G2	t 値	P 値
6 新しい数学の内容を思い出して簡単に使うことができます	2.89	2.58	0.31	2.643	0.009
28 論理的に推論します	3.13	2.88	0.25	1.985	0.048
34 何を学習したか自分の言葉で表現します	2.63	2.34	0.29	2.319	0.021
36 考察と研究の結果を図や表で適切に要約します	2.63	2.37	0.26	2.124	0.034
42 たくさんの数学用語を知っています	1.88	2.15	－0.27	2.250	0.027
43「数学」とは何かについて自分の考えをもっています	2.09	2.45	－0.36	2.508	0.013

このことから，「予選合格者は，不合格者よりも新しい数学を修得し，それを使いこなすことができ，論理的に推論・思考する．学習した内容について，自分なりの咀嚼ができて，思考した結果を視覚的にわかりやすく示すことができる．一方，予選合格者は，数学用語については不合格者ほどの知識をもたないと認識しており，不合格者よりも『数学』について固定的な見方やイメージをもっていない」と言える．

表Ⅳ-1 において注目すべきは，5 つ目，6 つ目の質問項目「42 たくさんの数学用語を知っています」，「43 『数学』とは何かについて自分の考えをもっています」の G1－G2 が負の値を示している点である．

まず，質問項目「42 たくさんの数学用語を知っています」について，この結果は，「多くの知識が頭に入ることで，ある種の満足感を得て数学的な思考が止まってしまう可能性がある．知識の多さよりも，表Ⅳ-1 の上から 4 つの項目『6 新しい数学の内容を思い出して簡単に使うことができます』，『28 論理的に推論します』，『34 何を学習したか自分の言葉で表現します』，『36 考察と研究の結果を図や表で適切に要約します』を修得することが予選合格の必要条件となっている」ということを示唆している．

次に質問項目「43 『数学』とは何かについて自分の考えをもっています」について，この結果は，「『数学』に対して『固定的な見方・イメージ』をもつことが，数学的な事象に対して何らかの固定観念をもたらす場合があり，自分独自の考えから離れられなくなる可能性がある．数学を学ぶ際に，そのような固定観念を払拭し柔軟性をもつことが数学の能力の向上の必要条件となる」ということを示唆している．G1 と G2 の差異を，一言で

言えば「固定観念の有無」と筆者は解釈した.

この視点について［栗田 12］に，小学生段階の例であるが分かりやすい問題が示されていたため以下に引用する.

> 1000 点満点のテストが何回かあった. A 君は最後の 1 回を残した時点でそれまでの平均が 780 点だったが，最後に 900 点をとったために平均点はちょうど 800 点になった. テストは全部で何回あったのか.

この問題は, A 君が最後にとった 900 点のうち 800 点を確保しておき, 残った 100 点を 20 点ずつ 5 回に分配すれば平均が 800 点となるため, この 5 回と最後の 1 回を合わせて 6 回が正答である.

上記の考え方に対して［栗田 12］は,

> 平均の概念は，小学生でも習うが，このように「点数の貸し借りや分け与え」「土を平らに均す」というようなイメージを豊富に駆使できる子どもは苦労しないでもできるようになっていき，逆に，「すべて足して頭数で割る」という平均の定義そのものしか理解していない子どもは，問題を解くのに大変な苦労をする.

と述べている.

この問題を解くにあたって，［栗田 12］は「『想像力』という道具を思考に活かす」ことが重要であると述べている. 平均の捉え方を柔軟に切り替えることによって平易に解決できる問題の例である[xx].

また，P 値が 0.050 以上 0.100 未満の質問項目が 1 つ確認された（**表Ⅳ-2**）. この質問項目「17 長い間, 続けて考えられます」は有意傾向にあると言える.

表 Ⅳ-2 0.05≦P 値＜0.1 の質問項目

質問項目	G1	G2	G1－G2	t 値	P 値
17 長い間，続けて考えられます	3.23	3.00	0.23	1.969	0.052

表 Ⅳ-3 数学オリンピック予選合格者，不合格者の平均値の差が大きい質問項目

質問項目	G1	G2	G1－G2	t 値	P 値
32 考えた結果を分かりやすく説明します	2.66	2.45	0.21	1.572	0.117
33 コンピュータを上手く用います	2.46	2.25	0.21	1.399	0.163

さらに，G1 と G2 の平均値の差の絶対値が 0.15 以上あるものを以下に列挙し，合わせて P 値も記す（表Ⅳ-3）．

表Ⅳ-3 の P 値は統計的に十分有意な値とは言えないが，考察を加えるべき項目であると判断した．表Ⅳ-2，表Ⅳ-3 の結果からは，「予選合格者は，不合格者よりも持続的な思考が可能で高い集中力をもち，修得した事柄の定着率が高い．さらに問題の要点と解く方法を理解し，考察した結果の要点をも掴み，わかりやすく説明することができる．コンピュータを上手に用い，考察の手助けにすることもできる」可能性が高いと考えられる．

つまり，表Ⅳ-2，表Ⅳ-3 の力をもつことが予選合格の必要条件になる可能性を示唆している．

なお，この項で用いた基礎データは巻末の付録 4 に収録している．

3 数学オリンピック予選参加者全体に対する因子分析

数学オリンピック予選参加者全体の 398 人(G0)に対して, ソフトウェア R(ver. 2.15.2) を用い，因子抽出法：最尤法，因子軸回転：プロマックス回転による因子分析を行った. 初期解における固有値の減衰状況から判断して因子数を 3 とした．3 回ずつ回転を行い，その度に因子負荷量が 0.400 未満の質問項目を削除したところ，G0 について以下の 3 つの因子を抽出した.

因子Ⅰ：数学の愛好
因子Ⅱ：豊富な知識
因子Ⅲ：視覚化による表現

各因子の信頼性を確認するため Cronbach の α 係数を求めたところ，因子Ⅰ：0.912，因子Ⅱ：0.916，因子Ⅲ：0.917 であった．したがって各因子で高水準の信頼度が得られたと言える.

プロマックス回転を 3 回行った時点での因子負荷量や因子間相関に関する基礎データを以下に記す（**表Ⅳ-4**）．また，各質問項目の因子負荷量に対して，（最も大きい因子負荷量）－（残りの因子負荷量の絶対値の和）を計算し，その値の大きい順に 4 項目ずつ取り出したものを**表Ⅳ-5** に示す［正田 08］.

表Ⅳ-4 数学オリンピック予選参加者に対する因子分析の基礎データ

質問項目	因子Ⅰ	因子Ⅱ	因子Ⅲ
3 数学の問題を解いて楽しんだり，数独のような数学パズルで遊んだり，テレビゲームをしたりします	**0.571**	0.033	−0.085
4 数学の問題を解くとき，面白い方法を見つけ出します	**0.519**	0.152	0.010
5 数学の問題を解くのを楽しみます	**0.813**	0.020	−0.155
10 その答えが，なぜ正しいか知りたいと思っています	**0.615**	−0.243	0.040
12 数学に興味を示し，質問をします	**0.530**	−0.014	0.059
13 自分の興味のある数学の分野を勉強したり，考えたりすることが好きです	**0.674**	0.099	−0.075
14 数を用いて分析することに興味があります	**0.570**	0.053	0.095
16 数学の内容や問題について考えるときには粘り強く努力します	**0.744**	−0.088	−0.001
17 長い間，続けて考えられます	**0.638**	−0.025	0.013
19 人と同じでない方法でものを考えたり，何かを行ったりすることを気にしません	**0.564**	−0.069	−0.019
20 数学の問題を考えたり解いたりするのに夢中になり，時間を忘れることがあります	**0.712**	0.098	−0.087
21 自ら，自分なりの方法でいろいろなことをしようとします	**0.574**	0.017	0.079
26 簡単に問題を解くことができないとき，別の方法を見つけようとします	**0.524**	−0.014	0.045
38 ある数学的な話題についての知識が豊富です	−0.083	**0.850**	0.019
42 たくさんの数学用語を知っています	−0.012	**0.792**	−0.022
43「数学」とは何かについて自分の考えをもっています	0.154	**0.584**	−0.049
44 教科書の内容を超えた数学について知識が豊富です	0.027	**0.843**	−0.053
45 日常生活の中の数理現象を理解します	0.141	**0.520**	0.205
46 数学の知識と理解に自信があります	0.159	**0.645**	0.011
15 図や表を用いて，自分の考えをまとめようとします	0.156	−0.167	**0.685**
34 何を学習したか自分の言葉で表現します	−0.038	0.146	**0.631**
35 自分のアイデアを図や表で効果的に表現します	−0.153	−0.024	**0.970**
36 考察と研究の結果を図や表で適切に要約します	−0.066	0.062	**0.805**
因子間相関	因子Ⅰ	因子Ⅱ	因子Ⅲ
因子Ⅰ	1	−0.503	−0.582
因子Ⅱ		1	0.531
因子Ⅲ			1

(1) 因子名とその妥当性

ア 因子Ⅰの妥当性

質問項目 5，20 から直接「数学の愛好」が読み取れる．項目 16，17 も数学が好きで数学を楽しむことから生まれる行動であると考えられる．

イ 因子Ⅱの妥当性

すべての質問項目 38，44，42，46 が「豊富な知識」を示している．

ウ 因子Ⅲの妥当性

質問項目 35, 36, 15 は「図や表」による表現や整理を示しており,「視覚化による表現」と言える．項目 34 は,「自分の言葉で表現」となっているが，上位 3 項目の因子負荷量の高さから「視覚化による表現」とすることは問題ないと考えられる．

表 Ⅳ-5 数学オリンピック予選参加者に対する因子分析の結果

質　問　項　目	因子負荷量
因子Ⅰ：数学の愛好	
5 数学の問題を解くのを楽しみます	0.813
16 数学の内容や問題について考えるときには粘り強く努力します	0.744
20 数学の問題を考えたり解いたりするのに夢中になり，時間を忘れることがあります	0.712
17 長い間，続けて考えられます	0.638
因子Ⅱ：豊富な知識	
38 ある数学的な話題についての知識が豊富です	0.850
44 教科書の内容を超えた数学について知識が豊富です	0.843
42 たくさんの数学用語を知っています	0.792
46 数学の知識と理解に自信があります	0.645
因子Ⅲ：視覚化による表現	
35 自分のアイデアを図や表で効果的に表現します	0.970
36 考察と研究の結果を図や表で適切に要約します	0.805
15 図や表を用いて，自分の考えをまとめようとします	0.685
34 何を学習したか自分の言葉で表現します	0.631

(2) 因子間相関の検討

各因子間の相関は**表Ⅳ-4**のようになった．

このことから，「因子Ⅰ：数学の愛好」と「因子Ⅱ：豊富な知識」および「因子Ⅰ：数学の愛好」と「因子Ⅲ：視覚化による表現」はともに負の相関があり，「因子Ⅱ：豊富な知識」と「因子Ⅲ：視覚化による表現」には正の相関がある．

数学オリンピック予選参加者全体（G0）398 人中，予選合格者（G1）は 56 人，不合格者（G2）は 342 人であり，G0 の 398 人に関する因子分析は，G2 の 342 人の影響を強く受けているものと考えられる．実際，上記**Ⅳ-３(1)**の G0 の因子名と，後に示す**Ⅳ-５(1)**の G2 の因子名は全く同じである．

ところが，G0 と G2 とでは，因子間相関が異なる結果となった．因子間相関については，G1 の影響が強く現れたと考えられる．この後，**Ⅳ-５(2)**であらためて述べるが，G2 の因子間相関はすべてが正の値である．「因子Ⅰ：数学の愛好」，「因子Ⅱ：豊富な知識」，「因子Ⅲ：視覚化による表現」が互いに正の相関をもつことは，われわれの経験に基づく認識と一致し，妥当であると思われる．ところが，G0 では，先に述べたようにⅠとⅡ，ⅠとⅢは負の相関をもつ．

ⅠとⅡの関係については，「数学の愛好」が強くなるに連れて，知識よりも思考にウエイトが掛かると考えられる．**Ⅳ-２**において，G1 の生徒は，G2 の生徒よりも有意の差をもって，質問項目「42 たくさんの数学用語を知っています」の平均点が低いことが示された．G1 の生徒は，数学用語を知らないと認識しており，因子間相関は，その影響を強く受けたものと推定できる．

ⅠとⅢの関係については，「数学の愛好」が強くなるに連れて視覚化よりも言語化にウエイトが掛かると考えられる．これは，後の**Ⅳ-６**で詳述するが，G1 の生徒は，視覚化以上に言語化に長けていること，つまり，直観的な理解以上に論理的な理解を求める傾向にあると考えられる．実際，**Ⅳ-２**において，G1 の生徒は，G2 の生徒よりも有意の差をもって，質問項目「28 論理的に推論します」の平均点が高いことが示されている．因子間相関は，その影響を強く受けたものと推定できる．

各グループの人数比からすると，G0 の 3 因子と，G2 の 3 因子が同じであることは妥当である．しかし，因子間相関は，G1 の影響を強く受けたと考えられ，人数比以上に G1 の生徒らの特性の強さが際立つ結果が得られたと言える．

４ 予選合格者に対する因子分析

予選合格者 56 人（G1）に対しても，プロマックス回転を 3 回行った時点での因子負荷量や因子間相関に関する基礎データを以下に記す（表Ⅳ-6）．また，各質問項目の因子負荷量に対して，（最も大きい因子負荷量）－（残りの因子負荷量の絶対値の和）を計算し，その値の大きい順に 4 項目ずつ取り出したものを表Ⅳ-7 に示す［正田 08］．

G1 に対して， G0 と同様にして，以下の 3 つの因子を抽出した．

因子Ⅰ：豊富なアイデア

因子Ⅱ：豊富な知識

因子Ⅲ：高い表現力

各因子の信頼性を確認するため，G1 についても Cronbach の α 係数を求めたところ，因子Ⅰ：0.918，因子Ⅱ：0.916，因子Ⅲ：0.921 であった．したがって各因子で高水準の信頼度が得られたと言える．

表Ⅳ-6　数学オリンピック予選合格者に対する因子分析の基礎データ

質問項目	因子Ⅰ	因子Ⅱ	因子Ⅲ
29 疑問をもったことについての多くのアイデアと解答を思いつきます	**0.853**	−0.110	0.122
20 数学の問題を考えたり解いたりするのに夢中になり，時間を忘れることがあります	**0.826**	0.052	−0.326
24 様々な方法で問題を解きます	**0.767**	−0.128	0.142
16 数学の内容や問題について考えるときには粘り強く努力します	**0.739**	0.180	−0.291
37 間違うことを心配をしないで考えたり，問題を解いたりします	**0.639**	−0.014	−0.097
5 数学の問題を解くのを楽しみます	**0.596**	0.120	−0.124
21 自ら，自分なりの方法でいろいろなことをしようとします	**0.586**	−0.034	0.039
12 数学に興味を示し，質問をします	**0.562**	0.001	0.070
19 人と同じでない方法でものを考えたり，何かを行ったりすることを気にしません	**0.533**	0.016	−0.053
4 数学の問題を解くとき，面白い方法を見つけ出します	**0.510**	−0.051	0.109
44 教科書の内容を超えた数学について知識が豊富です	−0.200	**0.928**	−0.026
38 ある数学的な話題についての知識が豊富です	0.020	**0.826**	−0.005
42 たくさんの数学用語を知っています	−0.121	**0.819**	0.076
1 同級生よりも速く，かつ上手く数学を学べます	−0.045	**0.764**	0.095
46 数学の知識と理解に自信があります	0.216	**0.654**	0.143
7 上級学年の教科書や課題に取り組みたいと思っています/取り組んでいます	0.108	**0.627**	−0.034
2 1回で（反復しないで）新しい数学の内容を学べます	−0.053	**0.590**	0.125
43 「数学」とは何かについて自分の考えをもっています	0.217	**0.578**	−0.161
45 日常生活の中の数理現象を理解します	0.264	**0.563**	0.186
18 同級生とは違うものに興味をもつことがしばしばあります	0.042	**0.508**	−0.046
34 何を学習したか自分の言葉で表現します	−0.255	0.187	**1.005**
32 考えた結果を分かりやすく説明します	0.048	−0.067	**0.872**
35 自分のアイデアを図や表で効果的に表現します	0.148	0.085	**0.545**
47 くわしく理解する前に「全体的な見通し」をつかみます	0.19	0.074	**0.502**
因子間相関	因子Ⅰ	因子Ⅱ	因子Ⅲ
因子Ⅰ	1	0.297	−0.531
因子Ⅱ		1	−0.514
因子Ⅲ			1

(1) 因子名とその妥当性

ア 因子Ⅰの妥当性

表Ⅳ-7 の質問項目 29，24 が「豊富なアイデア」を表している．項目 37 の「間違うことを心配しないで」，21 の「自分なりの方法で」もアイデアを生み出す素地のあることを示している．

イ 因子Ⅱの妥当性

質問項目 44，38，42 が「豊富な知識」を示している．項目 1 は，数学の能力が高いことを示しているが，項目 44，38，42 の高い因子負荷量を考慮すると，因子名として「豊富な知識」が妥当である．予選合格者（G1）は，相当量の知識をもつと推定できるが，表Ⅳ-1 からわかるように数学用語については「たくさん知っている」と認識している者は相対的に少ない．つまり，知識はもちつつ，そのように認識していないと考えられる．

ウ 因子Ⅲの妥当性

質問項目 34 の「自分の言葉で表現」，32 の「わかりやすく説明」，35 の「効果的に表現」という語句から「高い表現力」を表していると言える．項目 47 の「『全体的な見通

表 Ⅳ-7 数学オリンピック予選合格者に対する因子分析の結果

質　　問　　項　　目	因子負荷量
因子Ⅰ：豊富なアイデア	
29 疑問をもったことについての多くのアイデアと解答を思いつきます	0.853
24 様々な方法で問題を解きます	0.767
37 間違うことを心配をしないで考えたり，問題を解いたりします	0.639
21 自ら，自分なりの方法でいろいろなことをしようとします	0.586
因子Ⅱ：豊富な知識	
44 教科書の内容を超えた数学について知識が豊富です	0.928
38 ある数学的な話題についての知識が豊富です	0.826
42 たくさんの数学用語を知っています	0.819
1 同級生よりも速く，かつ上手く数学を学べます	0.764
因子Ⅲ：高い表現力	
34 何を学習したか自分の言葉で表現します	1.005
32 考えた結果を分かりやすく説明します	0.872
35 自分のアイデアを図や表で効果的に表現します	0.545
47 くわしく理解する前に「全体的な見通し」をつかみます	0.502

し』をつかみ」も，より良く表現するための重要な要素と考えられるので，これらの 4 項目から「高い表現力」とすることが妥当である．

(2) 因子間相関の検討

各因子間の相関は**表Ⅳ-6** のようになった．

このことから，「因子Ⅰ：豊富なアイデア」と「因子Ⅱ：豊富な知識」には弱い相関があること，換言すれば，中程度以上の相関がないことがわかる．一見「豊富な知識」が「豊富なアイデア」に寄与しているように思えるが，そのような結果にはならなかった．このことから，以下のことが推察される．

- 因子Ⅰと因子Ⅱの相関が弱いということは，予選合格者にとっては因子ⅠとⅡは，やや概念の異なるものということである．「豊富なアイデア」と「豊富な知識」は互いに寄与する可能性が低いと考えられる．
- 知識からアイデアを創造するためには，単なる知識ではなく，それが自分の理解として深く定着している必要がある．知識だけではアイデアの創造までは到達できない．
- 独自性は，新しく何かを生み出すことであるが，自分の思いついたことについて，それが既知のことであれば独自性にならない．
- 知識がない（定石を知らない）ために，むしろ自由な発想ができると推定できる．ベクトルについての知識を知らない中学生の方が高校生よりも，初等幾何では斬新なアイデアを出す場合があるのは 1 つの例である．

一方，「因子Ⅲ：高い表現力」は，「因子Ⅰ：豊富なアイデア」,「因子Ⅱ：豊富な知識」の両方と負の相関があることがわかる．これらは中程度の相関であるが，負の相関であることが特筆すべきことである．これは以下のように考えられる．

- 「豊富なアイデア」,「豊富な知識」を言語化したり図表化したりするためには高い表現力を含む高度な能力が必要である．したがって，負の相関が示すものは，アイデアや知識が高度化するに連れ，言語化したり図表化したりすることが困難である

と，数学オリンピック予選合格者らが認識しているということである．別の見方をすれば，アイデアや知識の程度が高くなければ，表現するのはさほど困難ではなく高い表現力は必要ないということである[xxi].

5 予選不合格者に対する因子分析

予選不合格者 342 人（G2）に対しても，プロマックス回転を 3 回行った時点での因子負荷量や因子間相関に関する基礎データを以下に記す（表Ⅳ-8）．また，各質問項目の因子負荷量に対して，（最も大きい因子負荷量）－（残りの因子負荷量の絶対値の和）を計算し，その値の大きい順に 4 項目ずつ取り出したものを表Ⅳ-9 に示す［正田 08］．

G2 についても，G0 および G1 と同様にして以下の 3 つの因子を抽出した．

因子Ⅰ：数学の愛好

因子Ⅱ：豊富な知識

因子Ⅲ：視覚化による表現

G2 についても，Cronbach の α 係数を求めたところ，因子Ⅰ：0.913，因子Ⅱ：0.917，因子Ⅲ：0.918 であった．したがって各因子で高水準の信頼度が得られたと言える．

表Ⅳ-8　数学オリンピック予選不合格者に対する因子分析の基礎データ

質問項目	因子Ⅰ	因子Ⅱ	因子Ⅲ
5 数学の問題を解くのを楽しみます	**0.782**	0.056	−0.145
16 数学の内容や問題について考えるときには粘り強く努力します	**0.747**	−0.122	0.044
10 その答えが，なぜ正しいか知りたいと思っています	**0.695**	−0.243	0.022
17 長い間，続けて考えられます	**0.684**	−0.067	0.021
20 数学の問題を考えたり解いたりするのに夢中になり，時間を忘れることがあります	**0.674**	0.146	−0.086
13 自分の興味のある数学の分野を勉強したり，考えたりすることが好きです	**0.662**	0.104	−0.054
19 人と同じでない方法でものを考えたり，何かを行ったりすることを気にしません	**0.610**	−0.079	−0.028
21 自ら，自分なりの方法でいろいろなことをしようとします	**0.568**	0.065	0.050
14 数を用いて分析することに興味があります	**0.567**	0.087	0.081
26 簡単に問題を解くことができないとき，別の方法を見つけようとします	**0.560**	−0.073	0.072
3 数学の問題を解いて楽しんだり，数独のような数学パズルで遊んだり，テレビゲームをしたりします	**0.538**	0.079	−0.072
18 同級生とは違うものに興味をもつことがしばしばあります	**0.523**	0.078	−0.085
12 数学に興味を示し，質問をします	**0.515**	0.031	0.039
38 ある数学的な話題についての知識が豊富です	−0.123	**0.875**	0.018
44 教科書の内容を超えた数学について知識が豊富です	0.032	**0.832**	−0.043
42 たくさんの数学用語を知っています	0.004	**0.800**	−0.028
46 数学の知識と理解に自信があります	0.112	**0.662**	0.013
43「数学」とは何かについて自分の考えをもっています	0.149	**0.600**	−0.040
45 日常生活の中の数理現象を理解します	0.118	**0.524**	0.211
35 自分のアイデアを図や表で効果的に表現します	−0.131	−0.029	**0.971**
36 考察と研究の結果を図や表で適切に要約します	−0.050	0.069	**0.817**
15 図や表を用いて，自分の考えをまとめようとします	0.176	−0.150	**0.677**
34 何を学習したか自分の言葉で表現します	−0.010	0.159	**0.612**
因子間相関	因子Ⅰ	因子Ⅱ	因子Ⅲ
因子Ⅰ	1	0.509	0.580
因子Ⅱ		1	0.490
因子Ⅲ			1

表 Ⅳ-9 数学オリンピック予選不合格者に対する因子分析の結果

質　問　項　目	因子負荷量
因子Ⅰ：数学の愛好	
5 数学の問題を解くのを楽しみます	0.782
16 数学の内容や問題について考えるときには粘り強く努力します	0.747
17 長い間，続けて考えられます	0.684
13 自分の興味のある数学の分野を勉強したり，考えたりすることが好きです	0.662
因子Ⅱ：豊富な知識	
38 ある数学的な話題についての知識が豊富です	0.875
44 教科書の内容を超えた数学について知識が豊富です	0.832
42 たくさんの数学用語を知っています	0.800
46 数学の知識と理解に自信があります	0.662
因子Ⅲ：視覚化による表現	
35 自分のアイデアを図や表で効果的に表現します	0.971
36 考察と研究の結果を図や表で適切に要約します	0.817
15 図や表を用いて，自分の考えをまとめようとします	0.677
34 何を学習したか自分の言葉で表現します	0.612

(1) 因子名とその妥当性

ア 因子Ⅰの妥当性

質問項目 5，13 から直接「数学の愛好」が読み取れる．項目 16，17 も数学が好きで数学を楽しむことから生まれる行動であると考えられる．

イ 因子Ⅱの妥当性

質問項目 38，44，42 は G1 の因子Ⅱにも含まれている．さらに，G2 では項目「46 数学の知識と理解に自信があります」も含まれており，「豊富な知識」とすることは妥当である．

ウ 因子Ⅲの妥当性

G0 の因子Ⅲと全く同じである（Ⅳ-３(1)③）．

(2) 因子間相関の検討

各因子間の相関は**表Ⅳ-8**のようになった．

表Ⅳ-8 の相関はそれぞれが正の相関であり，妥当な結果であると思われる．すなわち，「因子Ⅰ：数学の愛好」，「因子Ⅱ：豊富な知識」，「因子Ⅲ：視覚化による表現」はそれぞれに相関があるのが自然であり，われわれの経験に基づく認識と一致する．つまり，われわれの経験的常識を裏付ける結果が得られたと言える．

6 予選合格者と不合格者の因子分析の結果の差異

予選合格者（G1）と不合格者（G2）の因子分析の結果の差異について考察する．まず，予選合格者も不合格者も数学の「豊富な知識」で特徴づけられる．とくに，G1 の因子Ⅱの上位 4 つの質問項目と，G2 の因子Ⅱの上位 4 つの質問項目のうち，3 つが同じものである（**表Ⅳ-7**，**表Ⅳ-9**）．ただし，**表Ⅳ-1** から分かるように，それぞれのグループの知識についての認識には差異がある．

しかし，特筆すべき点は G1，G2 の因子Ⅰの差異と，因子Ⅲの差異である．

ここで，G1，G2 の抽出された因子一覧表（**表Ⅳ-10**）を示し考察を進める．

表 Ⅳ-10 数学オリンピック予選合格者，不合格者の抽出された因子一覧表

因子	予選合格者（G1）	予選不合格者（G2）
Ⅰ	豊富なアイデア	数学の愛好
Ⅱ	豊富な知識	豊富な知識
Ⅲ	高い表現力	視覚化による表現

まず，因子Ⅰの差異については，「数学が好きであることが，ある種の『固定的な見方・イメージ』を与えるものと考えられ，それが，質問項目「43 『数学』とは何かについて自分の考えをもっています」の結果に対する筆者の解釈（Ⅳ - 2）を補強するものとなる」と推定できる．

因子Ⅲについては，「予選を通過する者は視覚化以上に言語化に長けている．つまり，直観的な理解以上に論理的な理解を求める傾向にあると考えられる．別の角度から見れば，予選を通過できなかった者は言語による表現力が相対的にやや弱く，視覚化に依存する傾

向がある．視覚化することで分かりやすくなる一方，厳密化がやや疎かになり深い考察までたどり着かなくなる可能性がある．視覚化による分かりやすさゆえに，そこで思考が止まってしまい，その先にある深みに想像を働かせる機会を失っている可能性がある」ことが示唆される．

7 本選合格者のプロファイリング

(1) プロファイリングの方法

2013 年 2 月 11 日に行われた第 23 回日本数学オリンピック本選の合格者（以下，本選合格者，G3）のサンプルは，G1 の 56 人のうちの 5 人であったため，G1，G2 との比較や，因子分析等の統計処理は困難である．そこで，G3 の 5 人に共通な特徴・特性，あるいは共通性が認めにくい点を次の方法で検討する．

① 他の項目と比較して，平均が高く分散が小さい質問項目を抽出する．具体的には，(平均)≧3.8，(分散)≦0.2 の質問項目を抽出する．これを表Ⅳ-12 にまとめた．

② 他の項目と比較して，平均がやや高く分散がやや小さい質問項目を抽出する．具体的には，3.0≦(平均)＜3.8，(分散)≦0.3 の質問項目を抽出する．これを表Ⅳ-13 にまとめた．

③ 他の項目と比較して，分散が大きい質問項目を抽出する．具体的には，(分散)≧1.3 の質問項目を抽出する．これを表Ⅳ-14 にまとめた．

上記の 3 種の質問項目が，［Renzulli 78］の才能の三輪概念（Ⅱ－1 (4)）および［Andrews 09］の示した才能者の基本的特性，［Dąbrowski 77］の知性的過度激動をどの程度満たすか検討する．

表 Ⅳ-11 才能者に共通する特性の概念

上位概念	才能の三輪概念［Renzulli 78］
	才能者の基本的特性［Andrews 09］
下位概念	知性的過度激動［Dąbrowski 77］

表 Ⅳ-12 平均値が高く分散が小さい項目（平均 3.8 以上，分散 0.2 以下）

質 問 項 目	平均	分散	適する基本的特性（基）・ 過度激動（OE）・三輪概念（三）
1 同級生よりも速く，かつ上手く数学を学べます	3.8	0.2	高度な知能（基） 普通より優れた能力（三）
6 新しい数学の内容を思い出して簡単に使う ことができます	3.8	0.2	高度な知能（基） 普通より優れた能力（三）
17 長い間，続けて考えられます	3.8	0.2	高度な集中力（基）・ 持続的な知的努力（OE）

(2) プロファイリングの検討

Ⅱ－１(3)(4)の才能の三輪概念と才能者の基本的特性，知性的過度激動を考え合わせると，才能者に共通する特性の上位概念として，才能の三輪概念と才能者の基本的特性があり，下位概念として知性的過度激動があると考えられる（表Ⅳ-11）.

① 平均が高く分散が小さい質問項目

表Ⅳ-12 に抽出された質問項目から，G3 の生徒らは才能者の基本的特性のうち「高度な知能」と「高度な集中力」をもつと推定できる．また，知性的過度激動のうち「持続的な知的努力」を有すると考えられ，さらに，才能の三輪概念のうち「普通より優れた能力」をもつことがわかる.

② 平均がやや高く分散がやや小さい質問項目

表Ⅳ-13 に抽出された質問項目のうち，上から 3 つの質問項目，すなわち「5 数学の問題を解くのを楽しみます」，「7 上級学年の教科書や課題に取り組みたいと思っています/取り組んでいます」，「13 自分の興味のある数学の分野を勉強したり，考えたりすることが好きです」は，才能の三輪概念における「課題への傾倒」と捉えることができる．その他の質問項目も多くが，才能の三輪概念・才能者の基本的特性・知性的過度激動のいずれかを満たしていると考えられる（表Ⅳ-13）.

③ 分散が大きい質問項目

分散が大きい質問項目を表Ⅳ-14 に記す．表Ⅳ-14 にある質問項目のうち，才能の三輪概

念・才能者の基本的特性・知性的過度激動に適するものは少ない.

G3 に属する 5 人はⅥ-２(1)で定義する数学的才能者であるが，以上の考察から，才能の三輪概念・才能者の基本的特性・知性的過度激動を数多くもつことが確認できた.

①平均が高く分散が小さい質問項目 については，3 つの質問項目中，才能の三輪概念・才能者の基本的特性・知性的過度激動に適する項目数が 3 つであった．これを 3/3 と表すことにすると，②平均がやや高く分散がやや小さい質問項目 については 15/17 となり，③分散が大きい質問項目 においては 1/8 となった．①，②を合わせると 18/20 であり，数学的才能をもつ生徒は一般的な才能者のもつ特性の多くをもつと言える．また，分散が大きい質問項目，すなわち，生徒によるばらつきが大きい項目は一般的な才能者の特性をほとんど満たしていないことがわかる.

表 Ⅳ-13 平均点がやや高く分散がやや小さい項目(3.0≦平均＜3.8, 0≦分散≦0.3)

質　問　項　目	平均	分散	適する基本的特性（基）・過度激動（OE）・三輪概念
5 数学の問題を解くのを楽しみます	3.6	0.3	課題への傾倒（三）
7 上級学年の教科書や課題に取り組みたいと思っています/取り組んでいます	3.6	0.3	課題への傾倒（三）
13 自分の興味のある数学の分野を勉強したり，考えたりすることが好きです	3.4	0.3	課題への傾倒（三）
14 数を用いて分析することに興味があります	3.4	0.3	分析的思考（OE）
15 図や表を用いて，自分の考えをまとめようとします	3.4	0.3	分析的思考（OE）
16 数学の内容や問題について考えるときには粘り強く努力します	3.6	0.3	持続的な知的努力（OE）
18 同級生とは違うものに興味をもつことがしばしばあります	3.4	0.3	思考の独自性（OE）
19 人と同じでない方法でものを考えたり，何かを行ったりすることを気にしません	3.4	0.3	思考の独自性（OE）
20 数学の問題を考えたり解いたりするのに夢中になり，時間を忘れることがあります	3.6	0.3	高度な集中力（基） 持続的な知的努力（OE）
24 様々な方法で問題を解きます	3.2	0.2	創造性（三）
25 問題を解いた結果に法則性を見つけます	3.6	0.3	分析的思考（OE）
28 論理的に推論します	3.6	0.3	論理的（OE）
31 数学の問題の中にある色々な事柄について詳しく考察します	3.4	0.3	分析的思考（OE）
32 考えた結果を分かりやすく説明します	3.0	0.0	
34 何を学習したか自分の言葉で表現します	3.0	0.0	
39 問題の要点とそれを解く方法を理解します	3.4	0.3	高度な知能（基） 普通より優れた能力（三）
41 数学の授業で学んだ色々な話題どうしを結びつけたり関連付けたりします	3.6	0.3	分析的思考（OE）

表 Ⅳ-14 分散が大きい項目(分散≧1.3)

質　問　項　目	平均	分散	適する基本的特性(基)・過度激動(OE)・三輪概念(三)
4 数学の問題を解くとき，面白い方法を見つけ出します	2.6	1.3	思考の独自性 (OE)
11 自分の能力を伸ばすために教科書の内容を変えて欲しいと思っています	2.8	1.7	
12 数学に興味を示し，質問をします	2.4	1.8	
22 テレビ，新聞，雑誌やインターネットの数学関連の情報に興味をもっています	2.6	1.3	
27 自分の思考過程を振り返ります	2.6	1.3	
30 数学の問題や題材を自然に見つけます	2.4	1.3	
38 ある数学的な話題についての知識が豊富です	3.0	1.5	
47 くわしく理解する前に「全体的な見通し」をつかみます	2.8	1.7	

このことから，数学的才能者の指導に関しては，一般的な才能者の指導について研究されてきた方法論を一部転用できると考えられる．表Ⅳ-12，表Ⅳ-13 に示された項目については，それが可能であると思われる．これは卓越性の放射現象という本研究の基本的方向が可能であることを示唆している．

表 Ⅳ-15 表Ⅳ-12，表Ⅳ-13 の質問項目に適合する特性数

表Ⅳ-12 に適合する特性数

才能の三輪概念	2	上位概念計	5
才能者の基本的特性	3		
知性的過度激動	1	下位概念計	1

表Ⅳ-13 に適合する特性数

才能の三輪概念	5	上位概念計	7
才能者の基本的特性	2		
知性的過度激動	10	下位概念計	10

また，表Ⅳ-12，表Ⅳ-13 を比較してみると，表Ⅳ-12 の 3 つの質問項目に適合する才能の三輪概念・才能者の基本的特性・知性的過度激動はのべ 6 つあるが，そのうち 5 つが上位概念である才能の三輪概念と才能者の基本的特性であり，1 つが下位概念である知性的過度激動である．表Ⅳ-13 でも同様に見てみると，適合する才能の三輪概念・才能者の基本的特性・知性的過度激動はのべ 17 個あるが，そのうち 7 つが上位概念であり，10 個が下位概念である．このことから，平均が高く分散が小さいほど，上位概念に適合すると推察され，才能者の特性を表す指標としてこれらの質問項目が適していることの裏付けとなっている（表Ⅳ-15）．

一方，一般的な才能者にはなく，数学的才能者だけに存在する特性について，一層の考

察が求められる．その点こそが，数学的才能者の更なる飛躍を刺激するキーポイントになると考えられる．

８ まとめ

(1) 予選合格者と不合格者に関する分析のまとめ

予選合格者と不合格者に関する分析から得られた知見を,「予選合格者の特性」,「予選不合格者の特性」,「数学オリンピック予選参加者の特性から見た数学の学習についての示唆」の 3 項目に分類して以下に示す.

ア 予選合格者の特性

- 「新しい数学の内容を思い出して簡単に使うことができる」,「論理的に推論する」,「何を学習したか自分の言葉で表現する」,「考察と研究の結果を図や表で適切に要約する」（質問項目 6，28，34，36）という特性をもち，これを修得することが予選合格の必要条件であると考えられる．
- 数学用語については，不合格者ほど知識をもたないと認識している．
- 「数学」について固定的な見方やイメージをもっていない．
- 持続的な思考が可能で高い集中力をもち，修得した事柄の定着率が高い．
- 問題の要点と解く方法を理解し，考察した結果の要点をも掴み，わかりやすく説明することができる．
- コンピュータを上手に用い，考察の手助けにすることもできる（以上，Ⅳ−２）
- 視覚化以上に言語化に長けている．直観的な理解以上に論理的な理解を求める傾向にある．（Ⅳ−６）
- 予選合格者は以下の 3 つの因子で特徴づけられる．（Ⅳ−４）

因子Ⅰ：豊富なアイデア

因子Ⅱ：豊富な知識

因子Ⅲ：高い表現力

・ 予選合格者にとっては，因子ⅠとⅡは，やや概念の異なるものである．「豊富なアイデア」と「豊富な知識」は互いに寄与する可能性が低いと考えられる．（Ⅳ－４(2)）
・ 豊富なアイデアや知識を言語化するためには，高い表現力を含む高度な能力が必要と考えられる．因子Ⅲは，因子Ⅰ・Ⅱの両方と負の相関があることから，予選合格者は，豊富なアイデアや知識を言語化し表現するのは難しいと認識している．（Ⅳ-４(2)）

すなわち予選合格者は,「能力の高さ」とともに,「固定的な見方をもたない柔軟な思考」,「視覚化以上に言語化に優れる」,「『豊富なアイデア』と『豊富な知識』が互いに寄与しない」こと等が特徴と考えられる．

イ 予選不合格者の特性

・ 言語による表現力が相対的にやや弱く，視覚化に依存する傾向がある．（Ⅳ－６）
・ 予選不合格者は以下の３つの因子で特徴づけられる．（Ⅳ－５）

因子Ⅰ：数学の愛好
因子Ⅱ：豊富な知識
因子Ⅲ：視覚化による表現

・ 各因子には正の中程度の相関がある．この結果は妥当性が高く，われわれの経験的常識を裏付けるものである．（Ⅳ－５(2)）

すなわち予選不合格者は,「能力の高さ」をもちつつも「視覚化に依存する傾向」があることが特徴・特性の１つである．予選不合格者を特徴づける因子には互いに相関があり,数学に強い興味をもっていると考えられる数学オリンピック予選参加者においては妥当な結論と言える．予選不合格者と合格者の差異は,「修得と適用」,「論理性」,「知識や『数学』に対する認識」,「持続性」,「視覚化への依存度」等が挙げられる．

ウ 数学オリンピック予選参加者の特性から見た数学の学習についての示唆

・「数学」に対して「固定的な見方・イメージ」をもつことが，数学的な事象に対して何らかの固定観念をもたらす場合があり，自分独自の考えから離れられなくなる可能性がある．
・数学を学ぶ際に，固定観念を払拭し柔軟性をもつことが数学の能力の向上の必要条件となっていると考えられる．
・多くの知識が頭に入ることで，ある種の満足感を得て数学的な思考が止まってしまう可能性がある．
・知識の多さよりも，論理的な思考や理解をし，それを自分の言葉で表現できるまで咀嚼することが数学の力を向上させるための必要条件と考えられる．（以上，すべてⅣ−２）
・視覚化することで分かりやすくなる一方，厳密化がやや疎かになり，深い考察までたどり着かなくなる可能性がある．視覚化による分かりやすさゆえに，そこで思考が止まってしまい，その先にある深みに想像を働かせる機会を失っている可能性がある．（Ⅳ−６）

数学を学習する際に教師・生徒が留意すべき事柄についての示唆として「固定的な見方（対義語として『柔軟な見方』)」,「知識の扱い方と論理性」,「視覚化の扱い方」を得た．これらは普通教育にも適用できる可能性がある．これについては第Ⅴ章で検討を行う．

(2) 本選合格者に関する分析のまとめ

本選合格者のプロファイリングから得られた知見を以下に述べる．
・本選合格者は数学的才能者である（Ⅵ−２(1)による定義)．
・本選合格者は, 先行研究で示された［Renzulli 78］の才能の三輪概念,［Andrews 09］の才能者の基本的特性および［Dąbrowski 77］の知性的過度激動を数多くもつ.（Ⅳ−７(2)）
・本選合格者に関しては，一般的な才能者の指導について研究されてきた方法論を一部転用できる．表Ⅳ−12，表Ⅳ−13 に示された項目についてはそれが可能であり，卓越性の放射現象という本研究の基本的方向が可能であることを示唆している．(Ⅳ−

７(2))

・ 表Ⅳ-12，表Ⅳ-13 に示した質問項目について，平均が高く分散が小さいほど，才能者に共通する特性の上位概念に適合すると推察され，才能者の特性を表す指標としてそれらの概念が適していることの裏付けとなっている．(Ⅳ-７(2))

本選合格者は数学的才能者であり，一般的な才能者と共通な特性を多くもつが，数学的才能者に独特の特性についても検討を加えていきたい．

以上の結果は“Math for Excellent”の教材開発や数学オリンピック予選参加者の才能伸長に活かすことができると考えられる．

(3) 本章全体のまとめ

本章の分析結果として特筆すべきことを５点挙げたい．

① 予選合格者は，新しい数学を修得し，それを使いこなすことができ，論理的に推論・思考する．学習した内容について，自分なりの咀嚼ができて，思考した結果を視覚的にわかりやすく示すことができる．これらの能力を修得することが，予選合格の必要条件と考えられること．（Ⅳ-２）

② 「数学」に対して「固定的な見方・イメージ」をもつことが，数学的な事象に対して何らかの固定観念をもたらす場合があり，自分独自の考えから離れられなくなる可能性がある．数学を学ぶ際に，固定観念を払拭し柔軟性をもつことが数学の能力の向上の必要条件と考えられること．(Ⅳ-２)

③ 予選合格者にとっては「因子Ⅰ：豊富なアイデア」と「因子Ⅱ：豊富な知識」は，やや概念の異なるものであり，「豊富なアイデア」と「豊富な知識」は互いに寄与する可能性が低いと考えられること．(Ⅳ-４(2))

④ 豊富なアイデアや知識を言語化するためには，高い表現力を含む高度な能力が必要と考えられる．予選合格者は，豊富なアイデアや知識を言語化するのは難しいと認識していること．（Ⅳ-４(2))

⑤ 視覚化することで分かりやすくなる一方，厳密化がやや疎かになり，深い考察までたどり着かなくなる可能性があること．また，視覚化による分かりやすさゆえに，そこで思考が止まってしまい，その先にある深みに想像を働かせる機会を失っている可能性が

あること．（Ⅳ－６）

参考文献

［青木 09］青木繁伸：“R による統計解析”，オーム社, 2009

［Andrews 09］Andrews, L. J : “GIFTED AND TALENTED EDUCATION: Serving the needs of high-ability students, JST 理科教育支援センター才能教育シンポジウム資料「米国の才能教育の現状」”, 2009

［麻生 02］麻生誠 他：“高い才能を有する児童・生徒の実態に関する調査研究”，日本教育社会学会大会発表要旨集録 (54), pp.36-39, 2002

［Barnett 93］Barnett, L.B & Durden W. G : “Education patterns of academically talented youth”, Gifted Child Quarterly 37(4), pp.161–168, 1993

［Bosse 06］Bosse & Rotigel : “Encouraging Your Child's Math Talent”, Prufrock Press, 2006

［Brandl 12］Brandl, M & Barthel, C : “A Comparative Profile of High Attaining and Gifted Students in Mathematics”, 12th International Congress on Mathematical Education Pre-Proceedings, 1429-1438, 2012

［Gardner 83］Gardner, H : “Frames of Mind : The Theory of Multiple Intelligences”, Basic Books, 1983

［House 87］House, P. A (Ed.) : “Providing Opportunities for the Mathematically Gifted, K-12”, National Council of Teachers of Mathematics, 1987

［本多 08］本多泰洋 : “オーストラリア連邦の個別化才能教育－米国および日本との比較”, 学文社, 2008

［市川 05］市川伸一：“教育研究のメソドロジー”，東京大学出版会, pp.97-114, 2005

［認知的個性協会 13］認知的個性協会：“一般社団法人 認知的個性協会ホームページ”, http://www.cilearning.jp/, 2013.6.1 確認

［岩永 97a］岩永雅也 : “才能と才能教育”，麻生誠，岩永雅也編，創造的才能教育，玉川大学出版部，p.21， 1997

［岩永 97b］岩永雅也 : “才能教育の理論と実践”，麻生誠，岩永雅也 編，創造的才能教育，

玉川大学出版部，pp.172-192, 1997

［Kennard 01］Kennard, R : “Teaching Mathematically Able Children”, David Fulton Publishers, 2001

［Kießwetter 92］Kießwetter, K : “Mathematische Begabung” als Element des Weltbildes kompetenter Mathematiklehrer und Schüler- ausgewählte Ergebnisse aus einem DFG-Projekt. MU 38 (1), pp.54-60, 1992

［金 07］金明哲 : “R によるデータサイエンスーデータ解析の基礎から最新手法までー”, 森北出版, 2007

［栗田 12］栗田哲也 : “数学による思考のレッスン”，筑摩書房，pp.73-77, 2012

［松村 03］松村暢隆 : “アメリカの才能教育—多様な学習ニーズに応える特別支援”，東信堂, 2003

［松村 08］松村暢隆 : “本当の「才能」見つけて育てようー子どもをダメにする英才教育”, ミネルヴァ書房, 2008

［松村 10a］松村暢隆 : “心理学的概念としての才能”，岩永雅也，松村暢隆 編，才能と教育ー個性と才能の新たな地平へー，放送大学教育振興会，pp.45-57, 2010

［松村 10b］松村暢隆 : “才能の評価と発見”，岩永雅也，松村暢隆 編，才能と教育ー個性と才能の新たな地平へー，放送大学教育振興会，p.64, 2010

［松村 10］松村暢隆，佐野亮子，小倉正義，石川裕之 : “認知的個性ー違いが活きる学びと支援”，新曜社, 2010

［McClure 07］McClure & Piggott : “Meeting the Needs of Your Most Able Pupils: Mathematics”, David Fulton Publishers, 2007

［Pitta-Pantazi 11］Pitta-Pantazi, et al. : “A Model of Mathematical Giftedness: Integrating Natural, Creative, and Mathematical Abilities”, Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education 11(1), pp.39–54, 2011

［Rezulli 78］Rezulli, J. S : “What makes giftedness? : Re-examining a definition”, Phi Delta Kappan, 1978

［Rezulli 83］Renzulli, J. S, 松村暢隆訳 : “個性と才能をみつける総合学習モデル”，玉川大学出版部, 1983

［Rezulli 02］Renzulli, J. S, et al. : “Scales for Rating the Behavioral Characteristics of Superior Students (Revised Ed.) ”, Mansfield Center, CT : Creative Learning Press,

2002
［小倉 09］小倉正義：“アメリカにおけるギフテッドへの教育”，岡南，小倉正義，杉山登志郎 著，ギフテッド－天才の育て方，学習研究社, 2009
［清水 11］清水克彦，田村篤史：“素養の高い中学生に対する論理的思考の指導”，日本科学教育学会年会論文集 35，pp.82-85, 2011
［Sheffield 94］Sheffield, L. J：“Development of Gifted and Talented Mathematics Students and the National Council of Teachers of Mathematics Standards”, Diane Publishing Co, pp.2-9, 1994
［正田 08］正田良：統計入門－因子分析の意味がわかる, pp.118-138, 2008
［Sumida 10］Sumida, M：“Identifying Twice-Exceptional Children and Three Gifted Styles in the Japanese Primary Science Classroom”, International Journal of Science Education, Vol. 32, No. 15, pp.2097–2111, 2010
［田村 12a］田村篤史：“数学的才能者の思考過程と授業への活用についての研究”，科学教育研究 36(2)，pp.181-189, 2012
［田村 12b］田村篤史：“数学的才能者と高学力者の相互作用から見える数学才能教育の 1 つの可能性 —数学才能教育の意味の明確化—”，第 45 回数学教育論文発表会論文集, pp.1121-1126, 2012
［Tamura 12］Tamura, A：“On A Thought Process of A Mathematically Talented Student, and Interaction with A Class”，12th International Congress on Mathematical Education Pre-Proceedings, pp.1551-1560, 2012
［White 74］White, A (Ed.)：“Identifying Students with Extra-Ordinary Learning Ability (Academically Gifted or "Terman Types")”, Identification of the Gifted and Talented, Connecticut State Dept. of Education, Hartford.Bureau of Pupil Personnel and Special Education Services, pp.71-76, 1974
［山内 12］山内乾史：“才能教育について（概説）－日本における状況－”，比較教育学研究，pp.3-21, 2012

---

xx 高校段階でも次のような例が考えられる．

・ 複素数 $a+bi$ と座標平面上の点（a，b）を同一視することによって複素数を幾何的に

解釈できるようになること．

・ 極座標を導入することで，平面上の曲線や図形の新しい捉え方ができるようになること．

われわれは中学段階で直交座標系を導入し，高校段階で極座標系も導入する．平面の次元は 2 であるが，これは平面上の点が移動できる自由度を表している．自由度が 2 であれば座標系は何でもよいのであって，直交である必然性は本来ない．直交座標を採用したのは，算数・数学を学習する中でその方が人間にとって馴染みやすいことが理由の 1 つであると思われる．しかし，座標系についての固定観念を捨てることで，平面上の曲線や図形の新しい捉え方ができるようになった．これによって螺旋やカージイドなどは，むしろ平易に表現できるようなったのであり，ケプラー問題の解決にも繋がっていくのである．

[xxi] 次のように例えられる．「ある人が，住んでいる市内しか知らなければ，自転車で市内どこにでも行けると考えるだろう．この人が世界の広さを知っていれば，自転車でどこにでも行けるとは考えず，自動車や鉄道，航空機などの手段が必要と考えるだろう」．市内や世界の広さが，アイデアの独自性や知識量に，移動手段が表現力等に相当する例えである．

Ⅴ 質問紙を用いた数学オリンピック予選参加者と一般的な高校生の共通点と相違点の検討

１ 本章の目的

本章の目的は, Ⅲ－４で実施したアンケート調査による日本数学オリンピック予選参加者と一般的な高校生のそれらの特性をクラスタ分析によって検討することである.

なお，本章および**付録 5～付録 9** では質問項目同士，あるいは質問項目とクラスタ，クラスタ同士の平均点の比較を行うため平均点を小数点第 2 位まで表記する.

２ クラスタ分析の方法と解釈

以下では，Ⅲ－４の質問紙によるアンケート調査の数学オリンピック予選合格者（G1），予選不合格者（G2），上位校，中位校，下位校の結果を用いて，質問項目のクラスタ分析による分類を行う．この目的は，数学的能力において，どのようなものが類似しているのかを，G1，G2，上位校，中位校，下位校毎に分類することである．さらに，それら 5 グループの数学的能力の分類に関する共通点・相違点を分析する.

G1，G2，上位校，中位校，下位校のそれぞれについて，**付録 1** の質問紙の質問項目をクラスタに分類した．クラスタ分析に用いたのはソフトウェア R（ver.2.15.2）である．クラスタの結合はウォード法，質問項目やクラスタ同士の距離は，ユークリッド距離の平方を用いて，階層的クラスタ分析を行った.

2 つの質問項目の「距離」が近いということは，それらの質問項目が表す数学的能力が同じカテゴリに属することを示している．例えば質問項目 1 と 2 の距離が近いとは，質問

項目 1 と 2 に対して多くの生徒の反応パターンが類似しているということである.

3 予選合格者に対するクラスタ分析

(1) 予選合格者のデンドログラム

図Ⅴ-1 は予選合格者の調査結果によるデンドログラムである. 図Ⅴ-1 には質問項目の番号のみが記載されている. これに質問項目を記入し横書きに変更したものが付録 5 である. さらに質問項目ごとに 56 人の生徒の回答の平均値と分散を記した. 図Ⅴ-1 と付録 5 の距離の大小は不変であるが, 縮尺は変えてある.

以下, このデンドログラムを分析するために各クラスタに対して図Ⅴ-1 のように名前をつける. すなわち, 直線 A によって分割されたクラスタ (以下, A クラスタ) にⅠ～Ⅳ, 直線 B によって分割されたクラスタ (以下, B クラスタ) にⅰ～ⅳ, 直線 C によって分割されたクラスタ (以下, C クラスタ) に①～⑪と名前をつける.

直線 C によって質問項目 8, 11, 33 は, それぞれ質問項目 1 つだけで単独に分割されているため, C クラスタからは除外し, B クラスタ, A クラスタに組み込むことにする.

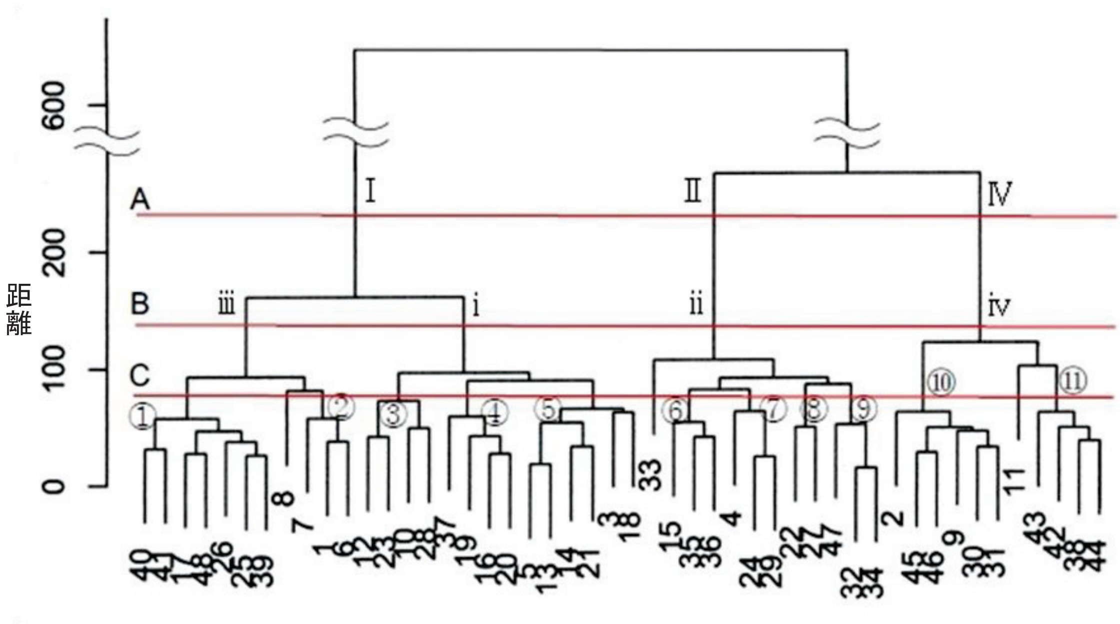


図 Ⅴ-1 数学オリンピック予選合格者のデンドログラム

以下，距離の近い質問項目・クラスタを［　］でくくることにする．例えば，図Ⅴ-1 の一番左の質問項目 40 と 41 は距離が近いが，これを［40，41］と表す．

この記法によれば，A クラスタのⅠは

Ⅰ＝［ⅲ，ⅰ］＝［[①，8，②]，[③，④，⑤]］

のように表すことができる．同様にして A クラスタⅡ，Ⅲは，それぞれ，

Ⅱ＝［ⅱ］＝［33，⑥，⑦，⑧，⑨]，

Ⅳ＝［ⅳ］＝［⑩，11，⑪］

のように書ける．

このあとの分析により，G1，G2，上位校，中位校，下位校の 5 グループの A クラスタの数は 2～3，B クラスタの数は 4 であることがわかっている．混乱を避けるため，5 グループの A，B クラスタの番号と名前を表Ⅴ-1 のように統一しておく．C クラスタの数に関しては，5～11 と幅があるため，デンドログラムの左から順に①，②，…と番号をつけた．グループによって，①の名前が「学習の理解力」であったり「自然な理解力」であったりする．それぞれの名称の由来については，後で説明する．

表 Ⅴ-1 A，B クラスタの番号と名前

A クラスタ	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ
	興味	表現力・視覚化	学習の理解力	自然な理解力
B クラスタ	ⅰ	ⅱ	ⅲ	ⅳ
	興味	表現力・視覚化	学習の理解力	自然な理解力

(2) デンドログラムの単純化

まず，図Ⅴ-2，付録 5 のデンドログラムを単純化した結果を示し（図Ⅴ-2），その理由を次項(3)以下に示す．図Ⅴ-2 の C クラスタに示されている数値は，①～⑪の平均値と分散である．

(3) デンドログラムの分析

まず，①～⑪の 11 のクラスタから成る C クラスタについて検討する．

クラスタ①は，生徒の平均点が相対的に高く，分散が相対的に小さいクラスタである．多くの生徒が類似した反応を示しているが，それが高得点帯で起こっているということになる．つまり，クラスタ①は，G1 の生徒らの数学的能力における特徴・特性を表していると言える．クラスタ①は，[40，41]，[17，48]，[26，[25，39]] で構成されている．これらは [40，41]：授業の修得，[17，48]：学びの姿勢，[26，[25，39]]：問題解決，と名づけることができる．クラスタ①の特徴は，学んだことを十分に生かせる力と捉えることができる．これを本研究ではこれを「学習の理解力」と呼ぶことにする．

クラスタ②は，[8，[7，[1，6]]] という構成になっている．[1，6] は「高い理解力」と名づけることができる．質問項目「1 同級生よりも速く，かつ上手く数学を学べる」と「6 新しい数学の内容を思い出して簡単に使うことができる」の距離が近いのは，一般的に広く認識されている.「高い能力」をもつ生徒らが，上級学年の教科書や課題に取り組みたいと思っていたり，やさしくて反復練習の多い宿題を嫌ったりすることもよく知られている [中村 10]．クラスタ②に関しては，一般的に広く知られた事実がクラスタリングされている．G1 の生徒には，平易な反復練習の多い学習を避け，上級学年の内容を取り入れた教材・授業デザイン等を用意することが好ましいという判断は妥当である．クラスタ②は，数学の秀でた能力を示すクラスタであると言える．本研究では，クラスタ②の示す能力を「自然な理解力」と呼ぶことにする．

クラスタ③は [12，23] と [10，28] の結合したものである．多くの生徒が類似した反応を示しているが，それが高得点帯で起こっているということになる．①と同じく G1 の生徒の数学的能力における特徴・特性を示している．[12，23] は，「12 数学に興味を示し，質問する」ことと「23 問題を簡潔・効率的に解く」ことが同じカテゴリに入ることを示している．数学に興味を示す中で，とくに数学の美しさを注目するならば，問題を必要最小限の文言で解決しようとする姿勢は妥当な姿勢であると言える．この小クラスタは「美的感覚」と名づけられる．[10，28] は，「10 その答えが，なぜ正しいか知りたい」ことと「28 論理的に推論する」ことが同じカテゴリに入ることを示している．これは妥当な事実であり，[清水 11] でも肯定的な結論が出ている（Ⅵ-３(4)）．この小クラスタは「探究心」と名づけられる．クラスタ③は「問題を簡潔・効率的に解く」ことと「根拠

A	I　興味					II　表現力・視覚化				IV　自然な理解力	
B	i　興味			iii　学習の理解力		ii　表現力・視覚化				iv　自然な理解力	
C	⑤	③	④	①	②	⑧	⑨	⑥	⑦	⑩	⑪
	3.24	3.19	3.14	3.09	2.92	2.80	2.71	2.67	2.66	2.50	2.15
	興味	探究心	熱中	学習の理解力	自然な理解力	省察	表現力	視覚化	柔軟性	自然な理解力	知識

平均点の高い順

C	⑤	③	④	①	⑨	⑥	⑧	⑩	②	⑦	⑪
	0.59	0.66	0.69	0.72	0.74	0.75	0.77	0.79	0.84	0.87	0.91
	興味	探究心	熱中	学習の理解力	表現力	視覚化	省察	自然な理解力	自然な理解力	柔軟性	知識

分散の小さい順

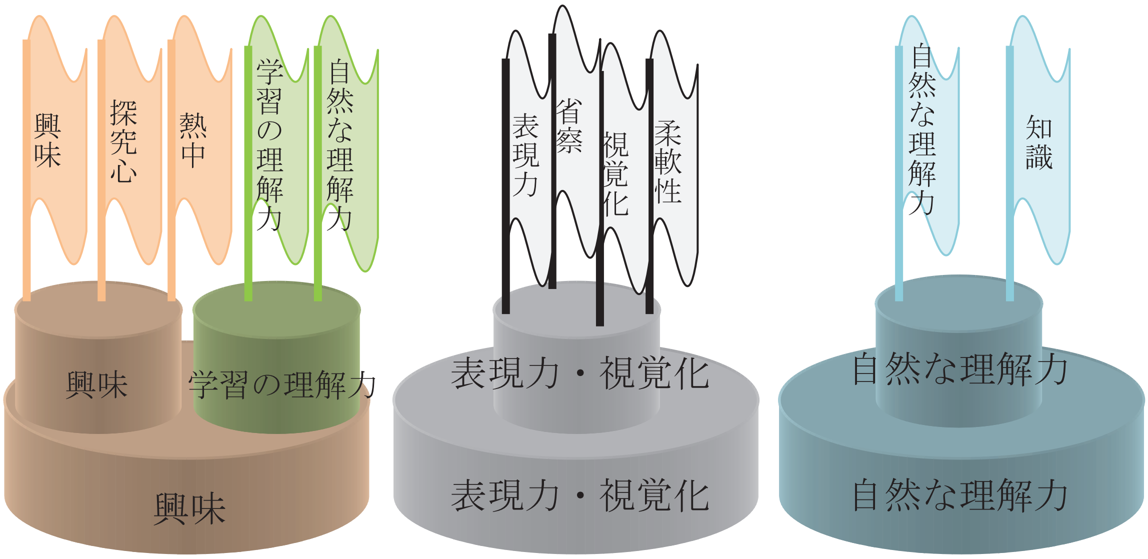


図　V-2　数学オリンピック予選合格者のデンドログラムの単純化

を知りたい」ことの「距離」が近いことを示しており，「探究心」と名づけることができる．

クラスタ④は，［37，［19，［16，20］］］という構成になっている．このクラスタも相対的に平均点が高く，分散が小さい．多くの生徒が類似した反応を示しているが，それが高得点帯で起こっている．［16，20］について，質問項目「16 数学の内容や問題について考えるときには粘り強く努力する」と「20 数学の問題を考えたり解いたりするのに夢中になり，時間を忘れることがある」の距離が近いのは妥当である．数学の問題を考えたり解

いたりするのに夢中になれば，粘り強く努力することにつながるのは自然であると思われる．この小クラスタは「熱中」と名づけられる．［19，［16，20］］および［37，［19，［16，20］］］についても，「19 人と同じでない方法でものを考えたり，何かを行ったりすることを気にしない」ことや，「37 間違うことを心配しないで考えたり，問題を解いたりする」ことも同じカテゴリに入ることを示しており，妥当である．とくに，質問項目 16，19 の（平均，分散）はそれぞれ，(3.21，0.57)，(3.18，0.59) であり，平均値は相対的に高く，分散は相対的に小さい．これは G1 の多くの生徒が質問項目 16，19 に高い点を与えていることを示している．粘り強く考えたり，独自な発想をしたりすることは，G1 の生徒の数学的能力における特徴・特性と言える．クラスタ④は，「熱中」と名づけることができ，G1 の生徒に特徴的な数学的能力・気質を表している．

クラスタ⑤のは，［5，13］，［14，21］および［3，18］の結合したものである．質問項目 5，13 の平均値と分散はそれぞれ，（平均，分散）＝（3.45，0.47)，(3.41，0.46）であり，48 個の質問項目のうち，もっとも平均が高く，分散が小さい組み合わせである．この 2 つの質問項目に関しては, ほとんどの生徒が 3 点または 4 点を付けたと言える. そして，この 2 つの質問項目，「5 数学の問題を解くのを楽しむ」と「13 自分の興味のある数学の分野を勉強したり，考えたりすることが好き」の距離が近いのはごく自然なことである．この少クラスタは「数学を楽しむ」と名づけられる．次に［14，21］であるが，「14 数を用いての分析に興味をもつ」ことと「21 自分なりの方法を用いる」ことが同じカテゴリに入ることが示されている．この 2 項目 14, 21 における（平均, 分散）はそれぞれ (3.23, 0.58)，(3.11，0.53）であり，ほとんどの生徒が高い点をつけている．［14，21］も G1 の生徒の嗜好・気質を表している．この 2 項目が同じカテゴリに入ることについては，例えば，整数論は現行教科書に記載がなく，整数論を考えることはオリジナリティーにつながることがその理由の 1 つと考えられる．この少クラスタは「興味」と名づけられる．［3，18］は，「数学の問題を解いて楽しんだり，パズルで遊んだりする」ことと「人と違うことに興味をもつ」ことの近さを示している．パズルの楽しさは，解けたことによる達成感とその解法にオリジナリティーがあったときの満足感にあると思われる．パズルはオリジナリティーを主張しやすいツールである．この少クラスタは「好奇心」とすることが妥当であると思われる．以上の考察から，クラスタ⑤の特徴・特性は端的に「興味」と言える．

クラスタ⑥は，［15，［35，36］のように構成されている．［15，［35，36］］は，「視覚化することで自分の考えをまとめたり，効果的に表現したり，適切に要約する」ことを示

している．したがって，クラスタ⑥は，「視覚化」と名づけることができる．

クラスタ⑦は，［4，［24，29］］のように構成されている．［4，［24，29］］は，「豊富なアイデアや柔軟性の高い思考をもつ」ことを示している．クラスタ⑦は，「柔軟性」と名づけることができる．G1 については，クラスタ⑥と⑦が同じカテゴリに属するのであるが，このことの事例の 1 つをいかに示す．

クラスタ［⑥，⑦］の例

問題　xy 平面における直線 $l_a : y=ax-a^2$ において a の値が変わるとき，この直線 l_a の通過する領域を図示せよ．

この問題の答えは $y \leqq \frac{1}{4}x^2$ である．高校では，l_a を a について整理し，$a^2-xa+y=0$ が実数解をもつことから，判別式 $D=(-x)^2-4y \geqq 0$ に帰着させる．

一方，$y=ax-a^2$ の陰関数表示を $f(x, y, a)=0$ と書くと，求める領域の境界線 $y=\frac{1}{4}x^2$ は，連立方程式 $f(x, y, a)=0$，$\frac{\partial f}{\partial a}=0$ の解である[xxii]．これを G1 の 1 人は次のように考えた．

「xya 空間を導入すると，$f(x, y, a)=0$ は空間内の曲面である．連立方程式の解は，パラメータ a が少し変わっても 1 次近似では境界線上に乗っている点 (x, y)，と解釈できる．つまり，空間内の点 (x, y, a) が，境界線上にあるための条件は，x，y を固定して a 軸方向に移動させたとき，$f(x, y, a)=0$ が変化しない（ $f=0$ が保たれる）ことである」

3 次元化することによって包絡線を求めることができた例である．これは視覚化と柔軟性が上手く噛み合った例でもある．このアイデアを提示したのは，数学オリンピック予選を通過した高校 2 年生の 1 人であった．しかし，上の例は，一般の高校生にとってはかなり高度な発想であり，このようなアイデアをもつ生徒は，筆者の経験上稀である．その意味でも G1 における特徴・特性として，視覚化と柔軟性が同じクラスタに属するのは妥当である．

クラスタ⑧は，［22，27］である．［22，27］は，「メディアの数学関連の情報に興味をもつ」，すなわち，数学に興味や意欲をもつことと，「自分の思考過程を振り返る」，すなわち，思考の妥当性，真偽等について確認作業を行うことが類似の能力であると考えられる．

これらを総合して，クラスタ⑧は「省察」と名づけられる．

クラスタ⑨は，[47，[32，34]] のように構成されている．[47，[32，34]] は，「大局的に俯瞰し，全体的な見通しをつかむことができる」ことと「学んだことを咀嚼し，自分の言葉で表現できる」ことの距離が近いことを示している．クラスタ⑨は「表現力」と名づけられる．

したがって，クラスタ [⑧，⑨] は，「『全体的な見通し』をつかむことで，自分の考えたことをわかりやすく説明できたり，学んだことを自分の言葉で表現できたりするようになること．また，色々なメディアに触れ，情報を入手することで自分の思考を振り返るヒントが得られるようになる」ことによって結合していると考えられる．

クラスタ⑩の構成は，[2，[[45，46]，[9，[30，31]]]] である．[45，46] は，「45 日常の数理現象を理解する」ことと「46 数学の知識・理解に自信をもつ」ことの近さを示しており，「高い理解力」と呼ぶことができる．[9，[30，31]] は，「30 数学的な問題の発見」と「31 数学の問題の詳察する」の近さ，さらにそれらと「9 鋭い質問をする」ことが近いということを述べている．「問題の発見と詳察」と呼ぶことができる．クラスタ⑩は，総じて「自然な理解力」を示すクラスタであると言える．これらの質問項目の近さは，われわれがもつ経験的事実と合致しており，その結合は妥当である．

クラスタ⑪は，総じて「知識」を示している．総じて平均が低く，分散がやや大きい．数学に知識に関しては，全体的にあまりもっていないと認識する傾向が強い反面，生徒による違いが大きいと言える．数学を学べば学ぶほど，わからないことが増えることや，上には上がいるという認識から生じるものと思われる．

次に B クラスタについて検討する．B クラスタはⅰ～ⅳの 4 つから成る．

クラスタ①と②，すなわち，「学習の理解力」と「自然な理解力」が結合したものがクラスタⅲである．①の方が，距離の小さい結合が多く，さらに，平均が高く分散も小さい．したがって，クラスタⅲを代表する概念として「学習の理解力」を選択することが妥当である．

クラスタⅰは，クラスタ③，④，⑤，すなわち，「探究心」，「熱中」，「興味」の結合であり，総じて，「興味」に関するクラスタということができる．「探究心」も「熱中」も「興味」に基づいて起こる行動であると考えられるからである．また，C クラスタ「⑤ 興味」は C クラスタの中で最も平均点が高く，分散が小さいクラスタであり，クラスタⅰを代表する C クラスタであると考えられる．この意味でもクラスタⅰを「興味」と名づけること

が妥当である.「指導者が生徒に対して，常に根拠を問う姿勢をもつことで，生徒が論理的に思考し，問題を簡潔・効率的に解くようになる可能性があること．さらに，生徒が間違えることに関して指導者が過敏にならず，また個性的な解答を認めその長所を褒める等の指導を行うことで，生徒の思考の持続力や集中力の伸長に寄与できること．さらに数学を楽しめるような教材の工夫，教材のパズル化等により，生徒の興味の幅が広がる可能性があること」を示唆している．

クラスタⅱの構成は，[33，[[⑥，⑦]，[⑧，⑨]]] となっている．[[⑥，⑦]，[⑧，⑨]] と質問項目「33 コンピュータを上手く用いる」の結合したものである．[⑥，⑦] の例で示したように，視覚化と柔軟性が数学的能力として近い概念であるということは妥当であると思われる．「⑥ 視覚化」と「⑦ 柔軟性」を比較した際，双方の距離の小ささは，ほぼ同等である．ところで，「⑥ 視覚化」の方が，平均点が高く分散が小さいので，[⑥，⑦] については⑥が代表していると考えるのが妥当である．[⑧，⑨] は「省察」と「表現力」の近さを示している．省察することにより，よりよい表現ができるし，より正しく効果的な表現をすることで省察が進むと考えられこれも妥当である．「⑧ 省察」と「⑨ 表現力」を比較した際，⑨の方が距離が小さく，⑨で代表できると考えられる．つまり，[[⑥，⑦]，[⑧，⑨]] = [視覚化，表現力] と捉えることができる．⑥，⑨は平均点と分散がほぼ同等であるため，クラスタⅱは「表現力・視覚化」と併記することにする．

「⑩ 自然な理解力」と「⑪ 知識」を比較した際，⑩の平均点が高く，分散が小さいことや，数学の知識を頭に入れるにも「自然な理解力」が必要なことを鑑みれば，クラスタⅳを「自然な理解力」と呼ぶのが妥当であると思われる．

最後にⅠ，Ⅱ，ⅣのＡクラスタについてであるが，Ⅰ＝[ⅲ，ⅰ]，Ⅱ＝[ⅱ]，Ⅳ＝[ⅳ] と書けるから，Ⅱは「表現力・視覚化」であり，Ⅳは「自然な理解力」である．Ⅰについては，ⅲの結合の近さとⅰの結合近さは，ほぼ同等と考えられる．一方，ⅲよりもⅰの方が平均点も高く分散も小さいためⅰがⅠを代表していると考えられる．したがって，Ⅰは「興味」と呼ぶのが妥当であると判断した．

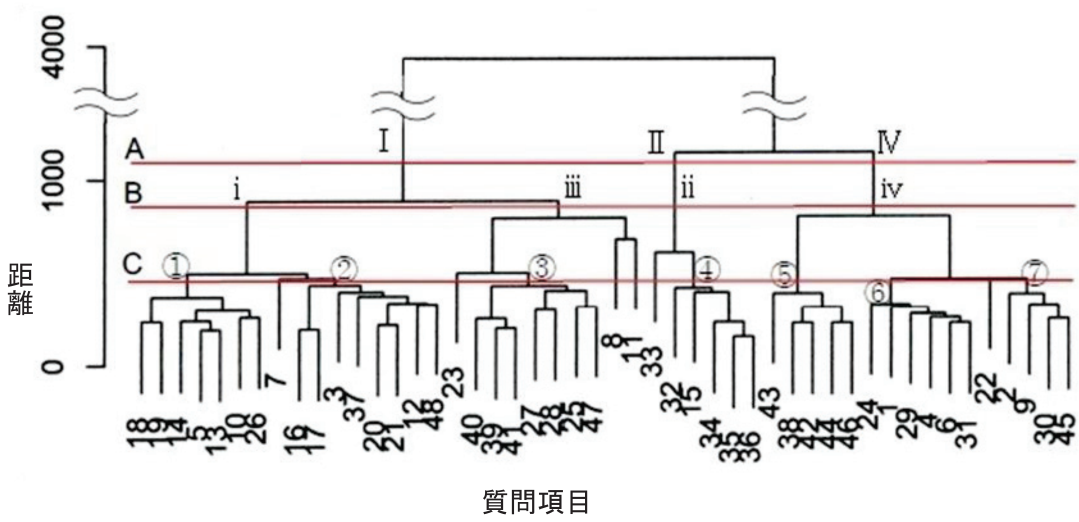


図 Ⅴ-3 数学オリンピック予選不合格者のデンドログラム

４ 予選不合格者に対するクラスタ分析

(1) 予選不合格者のデンドログラム

図Ⅴ-3 は予選合格者の調査結果によるデンドログラムである．**図Ⅴ-3** には質問項目の番号のみが記載されている．これに質問項目を記入し横書きに変更したのが **付録 5** である．さらに質問項目ごとに 342 人の生徒の回答の平均値と分散を記した．**図Ⅴ-3** と **付録 5** の距離の大小は不変であるが，縮尺は変えてある．

以下，このデンドログラムを分析するために各クラスタに名前をつける（**図Ⅴ-3**）．すなわち，A クラスタⅠ，Ⅱ，Ⅳ，B クラスタ i ～iv，および C クラスタ①～⑦である．**Ⅴ-３(1)** による表記法を用いれば，

Ⅰ＝［ i ， iii］＝［[①，7，②]，[23，③，8，11]]，

Ⅱ＝［ ii ］＝［33，④］

Ⅳ＝［iv］＝［⑤，⑥，22，⑦］

A	I 興味			II 表現力・視覚化	IV 自然な理解力		
B	i 興味		iii 学習の理解力	ii 表現力・視覚化	iv 自然な理解力		
C	①	②	③	④	⑥	⑦	⑤
	3.28	3.04	2.87	2.47	2.66	2.35	2.32
	興味	熱中	学習の理解力	表現力・視覚化	柔軟性	自然な理解力	知識

C	①	②	③	⑥	④	⑦	⑤
	3.28	3.04	2.87	2.66	2.47	2.35	2.32
	興味	熱中	学習の理解力	柔軟性	表現力・視覚化	自然な理解力	知識

平均点の高い順

C	①	⑥	③	②	⑦	④	⑤
	0.62	0.74	0.75	0.77	0.82	0.84	0.97
	興味	柔軟性	学習の理解力	熱中	自然な理解力	表現力・視覚化	知識

分散の小さい順

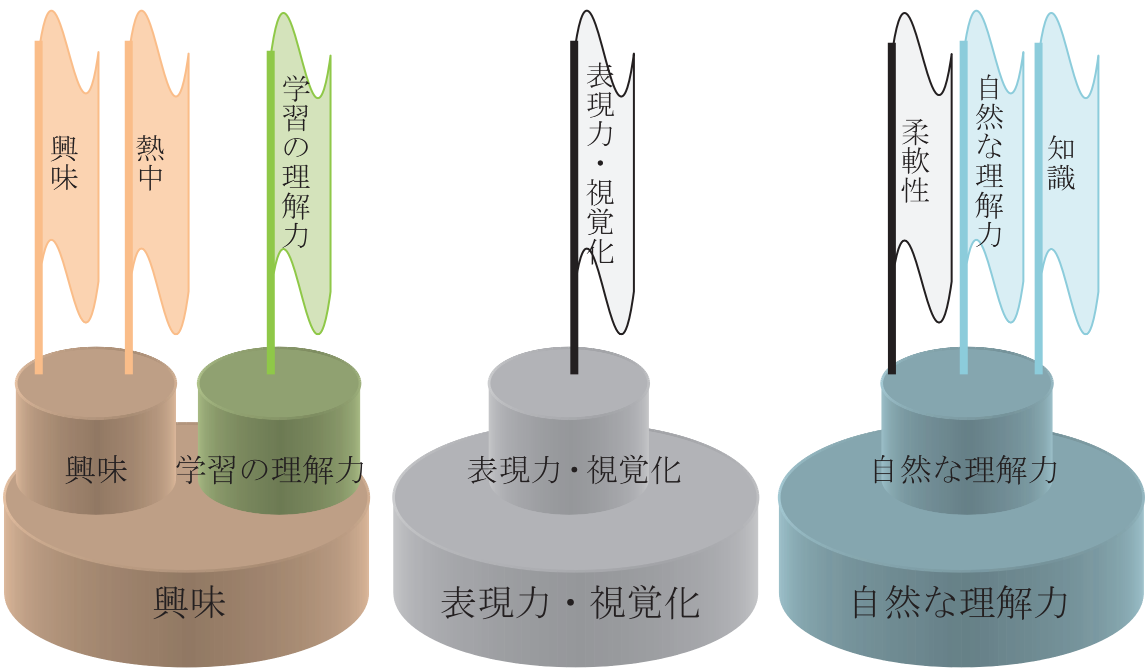


図 V-4 数学オリンピック予選不合格者のデンドログラムの単純化

と書ける．

直線Cによって質問項目7，23，8，11，33，22は，それぞれ質問項目1つだけで単独に分割されているため，Cクラスタからは除外し，Bクラスタ，Aクラスタに組み込むことにする．

(2) デンドログラムの単純化

まず，**図Ⅴ-3**，**付録5**のデンドログラムを単純化した結果を示し（**図Ⅴ-4**），その理由を次項(3)以下に示す．**図Ⅴ-4**のCクラスタに示されている数値は，①～⑦の平均値と分散である．

(3) デンドログラムの分析

Cクラスタは①～⑦の7つから成る．

クラスタ①は，［18，19］，［14，［5，13］］および［10，26］の結合として構成されている．平均は相対的に高く，分散は相対的に小さい．多くの生徒が3点または4点を選んだと言える．［18，19］は，いずれも人と異なる興味・考え方に関する項目であり，質問項目18, 19の距離が近いのは妥当である. これは「興味」と名づけること妥当である. ［14,［5，13］］は，「数学に興味をもち，楽しむ」ことを表しており，これも妥当な結合である．これも「興味」と名づけること妥当である．［10，26］は，「根拠を見つけたり，試行錯誤したりする」ことを示す．根拠を見つける活動と試行錯誤する活動は，同じカテゴリに属する.「探究心」と名づけることができる．［10，26］に属する質問項目10は（平均,分散）＝（3.51，0.48）であり，48個の質問項目のうちで最も平均が高く，最も分散が小さい.「その答えが，なぜ正しいか知りたい」という項目はG2の生徒の典型的な数学的特性であると言える．以上の考察から，クラスタ①の特徴は端的に「興味」と言える．

クラスタ②は，［7］，［16，17］および［3，［37，［［20，21］，［12，48］］］］の結合として構成されている．［16，17］は，「16 粘り強く考えられる」ことと「17 長い間，考えられる」ことが近いことを示す．これらの結合は，われわれの知る経験的事実と合致する．これは「まなびの姿勢」を表す．［20，21］は，「20 数学に夢中になり時間を忘れる」ことと「21 自分なりの方法で試行錯誤する」ことが近いことを示す.「熱中」と呼ぶことが妥当である．［12，48］は，「数学に興味をもち，質問する」ことと「能動的に学習する」

ことの近さを表す．これも「学びの姿勢」と表す．数学に興味をもてば能動的に学習することは妥当な推論である．以上の考察から，クラスタ②の特徴は端的に「熱中」と言える．

クラスタ③は，［23］，［40，［39，41］］，［27，28］および［25，47］の結合として構成されている．［40，［39，41］］は，まず，「41 授業で学んだことどうしを結びつけたり関連付けたりする」ことで「39 問題の要点とそれを解く方法を理解する」のだと考えられる．また，そのようにして問題を解いたことから「40 授業で学んだことが長く記憶に残る」ことが推定できる．「授業の修得」と呼ぶことが妥当である．［27，28］は，「27 自分の思考過程を振り返る．すなわち自分の思考過程の妥当性を検証する」と「28 論理的推論をする」が同じカテゴリに入っていることを示している．これは「省察」と名づけることができる．［25，47］は，「解いた問題に法則性を見つける」ことと「「全体的な見通し」をつかむ」ことが同じカテゴリに属すると述べている．「問題解決」を示していると言える．［40，［39，41］］と［［27，28］，［25，47］］は，それぞれ「数学の授業で学んだ色々なことどうしを結びつけたり，関連付けたりする」，「「全体的な見通し」をつかむ」で代表される．

クラスタ③は，［40，［39，41］］，［27，28］および［25，47］と，質問項目 23 との結合である．クラスタ③の特徴は G1 のクラスタ①と同じく「学習の理解力」と言える．

④の構成は，④＝［32，［15，［34，［35，36］］］］となっている．［34，［35，36］］は，34 の何を学習したか自分の言葉で表現できることと，［35，36］の図や表などの視覚化による表現を用いることが，同じカテゴリに属することを述べている．［32，［15，［34，［35，36］］］］は，表現力を表す小クラスタと，視覚化を表す小クラスタが明確に分割されておらず，入れ子状の構造になっている．これは，G2 の生徒における数学的能力として，表現力と視覚化が不可分であることを示している．図や表を用いて自分の考えをまとめることで考えが整理され，考えた結果を分かりやすく説明できるものと推定できる．以上から④は「表現力・視覚化」と名づけられる．

クラスタ⑤は，［38，42］が，知識の豊富さについて，［44，46］は，高度な知識と知識や理解に関する自信の結合であり，この両者が近い関係にあるのは自然である．このように豊富な知識をもつことにより，「数学」についての考えが芽生えてくることも妥当性が高いと言える．したがって，クラスタ⑤の特徴は端的に「知識」と言える．

クラスタ⑥は，自然な理解力と柔軟性を示す 6 つの質問項目が結合し構成されるクラスタである．クラスタ⑥の特徴は，「柔軟性」と言える．

クラスタ⑦は，主に数学の理解力，とりわけ「自然な理解力」と数学についての興味が結合してできたクラスタである．

次にBクラスタを検討する．

クラスタⅰは［①，7，②］と書けるから，「興味」を示すクラスタである．根拠を追究するような教材・授業デザインによって，生徒が試行錯誤し，数学に興味をもち問題を楽しまるようになり，人とは異なるオリジナリティーのある思考を展開できること．また，上級学年の教科書や課題に取り組ませることや数学やパズルを楽しむことで，間違うことを心配しないで考えたり問題を解いたりすることが予想され，能動的な学習や試行錯誤に結びつき，ひいては持続的な学習につながることが推定される．

クラスタⅲの構造は［23，③，8，11］のように書ける．クラスタⅲは総じて，生徒の「学習の理解力」に関するクラスタである．「平易な反復練習を避け，高度な内容を提示しつつ，生徒に「全体的な見通し」をつかむよう指導することで，生徒が問題を解いた結果に法則性を見つけたり，思考過程を振り返ったりでき，学んだ事柄どうしを結びつけたり関連付けたりさせ，学んだことを長く覚えられるようになる」ことを示唆している．

クラスタⅱは，④と33のコンピュータを上手く用いることとの結合であるから，「表現力・視覚化」のクラスタと言える．

クラスタⅳは「⑤ 知識」，「⑥ 柔軟性」，「⑦ 自然な理解力」の結合であるが，⑥は「柔軟性」と「自然な理解力」が入れ子の構造になっており，「柔軟性」に「自然な理解力」が影響を与えていることが示されている．また，⑤にも「理解力」の要素が含まれている．このことを勘案するとクラスタⅳは「自然な理解力」を示すクラスタと考えるのが妥当である．

最後にAクラスタであるが，Ⅰ＝［ⅰ，ⅲ］，Ⅱ＝［ⅱ］，Ⅳ＝［ⅳ］であるから，Ⅱは「表現力・視覚化」であり，Ⅳは「自然な理解力」である．Ⅰについては，ⅰの結合の近さとⅲの結合近さは，ほぼ同等と考えられる．一方，ⅲよりもⅰの方が平均点も高く分散も小さい．さらに，ⅰ，ⅲを構成する質問項目はⅰの方が多い．以上から，ⅰがⅠを代表していると考えられる．したがって，Ⅰは「興味」と呼ぶのが妥当であると判断した．

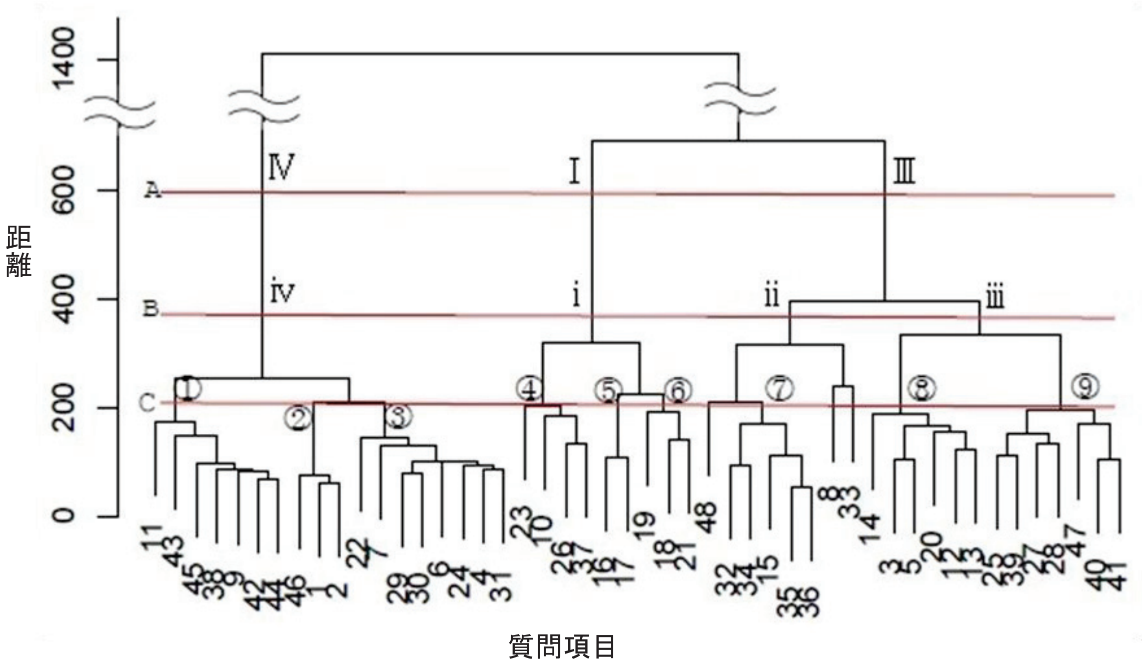


図 Ⅴ-5 上位校のデンドログラム

5 上位校に対するクラスタ分析

まず，図Ⅴ-5，付録 7 のデンドログラムを単純化した結果を示し（図Ⅴ-6），その理由を以下に示す．図Ⅴ-6 の C クラスタに示されている数値は，①～⑨の平均値と分散である．

C クラスタは，①～⑨の 9 つのクラスタである．

このうち，①は「自然な理解力」と「知識」の 2 つの要素から成るが，より距離が近いことから「知識」のクラスタと考えられる（*1）．（*1）～（*6）は図Ⅴ-6 の中にある．

③は「自然な理解力」と「柔軟性」の 2 つの要素からなるが，より距離が近いことから「柔軟性」のクラスタと考えられる（*2）．

⑦は「表現力」と「視覚化」の 2 つの要素からなるが，2 要素の平均点と分散は，それぞれほぼ同等であるため，併記して「表現力・視覚化」とするのが妥当である（*3）．

A	Ⅰ 興味			Ⅲ 学習の理解力				Ⅳ 自然な理解力		
B	ⅰ 興味（*5）			ⅲ 学習の理解力（*6）		ⅱ 表現力・視覚化		ⅳ 自然な理解力（*4）		
C	④ 2.72	⑤ 2.57	⑥ 2.52	⑨ 2.24	⑧ 2.19	⑦ 2.02 (*3)		③ 1.85 (*2)	② 1.77	① 1.60 (*1)
	探究心	熱中	興味	学習の理解力	興味	表現力 視覚化		柔軟性	自然な理解力	知識

C	④ 2.72	⑤ 2.57	⑥ 2.52	⑨ 2.24	⑧ 2.19	⑦ 2.02 (*3)		③ 1.85 (*2)	② 1.77	① 1.60 (*1)
	探究心	熱中	興味	学習の理解力	興味	表現力		自然な理解力	自然な理解力	自然な理解力
						視覚化		柔軟性		知識

平均点の高い順

C	① 0.60	③ 0.70	② 0.74	⑦ 0.77	⑨ 0.89	⑤ 0.95	⑧ 0.95	⑥ 0.96	④ 0.98
	自然な理解力	自然な理解力	自然な理解力	表現力	学習の理解力	熱中	興味	興味	探究心
	知識	柔軟性		視覚化					

分散の小さい順

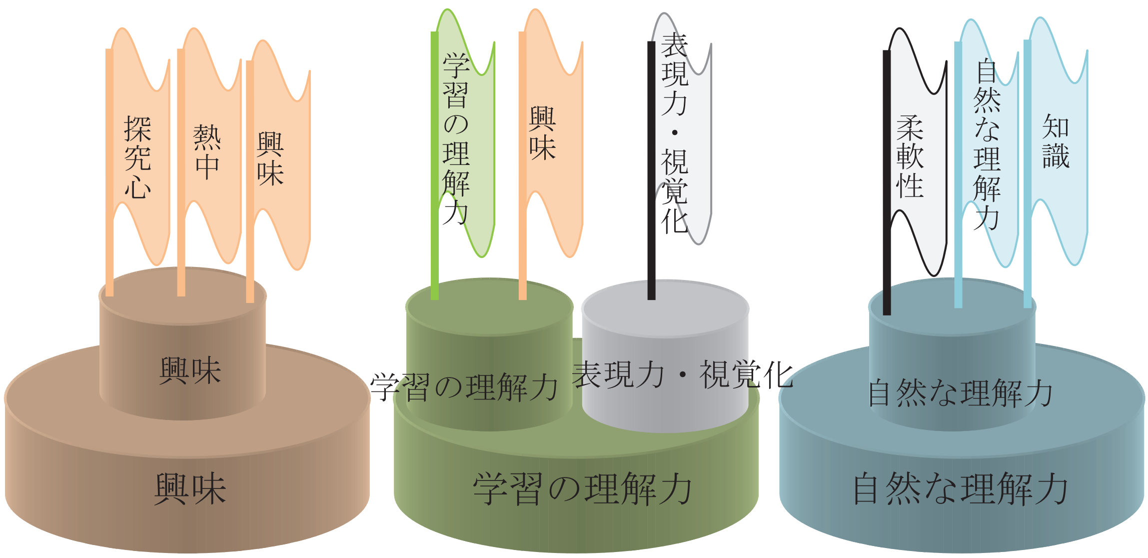


図 Ⅴ-6 上位校のデンドログラムの単純化

B クラスタは，ⅰ～ⅳの 4 つのクラスタから成る．

ⅳは［①，②，③］で構成される．①：知識，②：自然な理解力，③：柔軟性であるが，先に記したように，①，③は「自然な理解力」の要素を含んでいる．つまり，①，②，③はすべて「自然な理解力」を含んでいる．さらに①，②，③の中で質問項目が最も近い距離で結合しているのが②であることも考慮すると，ⅳは「自然な理解力」と名づけるのが妥当である（*4)．

ⅰは［④，⑤，⑥］で構成される．④：探究心，⑤：熱中，⑥：興味と名づけられるが，④，⑤，⑥は，いずれも数学への興味が根底にあると考えられ，ⅰは「興味」と呼ぶのが妥当である（*5)．

ⅱは，［⑦，8，33，48］と書けるが，主たるクラスタは⑦である．したがって，ⅱは「視覚化」と名づけられる．

ⅲ=［⑧，⑨］であり，⑧は「興味」を，⑨は「学習の理解力」を示す．⑧，⑨を構成する質問項目の距離の近さはほぼ同等であるから，⑧，⑨の平均，分散を考慮した．⑨の方が平均が高く分散が小さいことから，ⅳは⑨によって代表されていると考えることができる．したがって，ⅲは「学習の理解力」ということになる（*6)．

最後に A クラスタである．A クラスタは，Ⅰ，Ⅲ，Ⅳの 3 つから成る．Ⅳ＝［Ⅳ]，Ⅰ＝［ⅰ］，Ⅲ＝［ⅱ，ⅲ］と書けるから，Ⅳ，Ⅰは，それぞれ「自然な理解力」，「興味」と呼んで問題ない．Ⅲ＝［ⅱ，ⅲ］＝［視覚化，学習の理解力］であるが，ⅲの方が平均点が高く，クラスタを構成する質問項目の数も多いことから，Ⅲは「学習の理解力」呼ぶのが妥当であると判断した．

6 中位校に対するクラスタ分析

まず，**図Ⅴ-7**，**付録 8** のデンドログラムを単純化した結果を示し（**図Ⅴ-8**)，その理由を以下に示す．**図Ⅴ-8** の C クラスタに示されている数値は，①～⑧の平均値と分散である．

中位校についても，まず C クラスタから検討する．C クラスタは，①～⑧の 8 つのクラスタから成る．

①は「自然な理解力」と「知識」の 2 つの要素から成る．①=［[[[44，45]，[42，46]]，[9，38]]，[22，43]］と書けて，［44，45]，［42，46］や［9，38］が，それぞれ「自

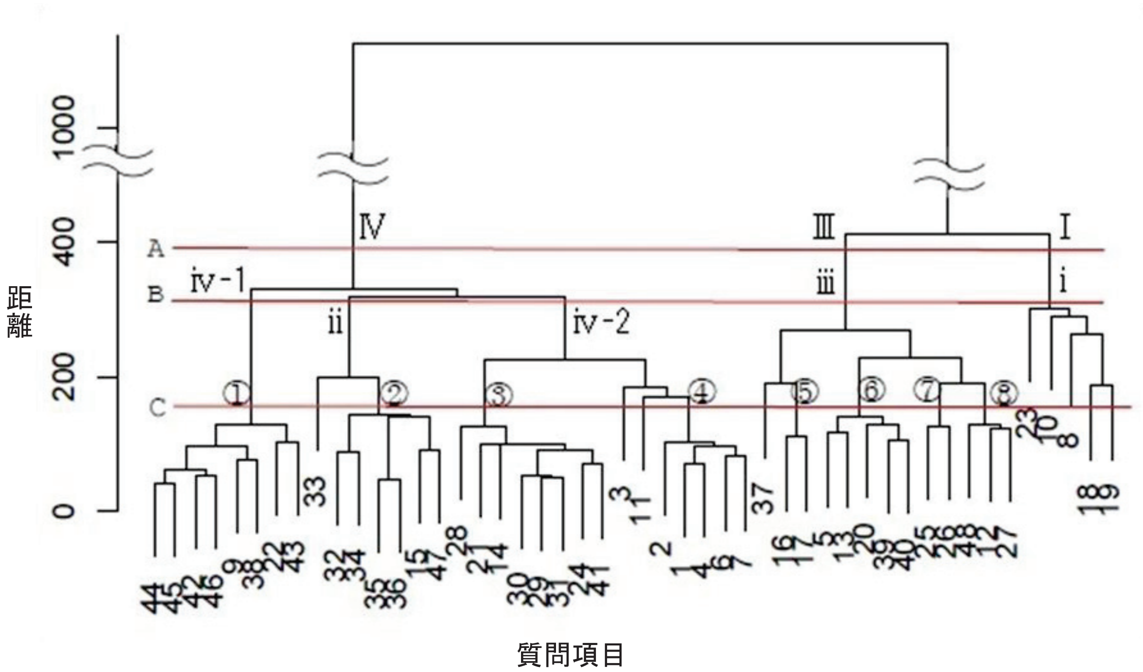


図 Ⅴ-7 中位校のデンドログラム

然な理解力」と「知識」の結合になっており，「自然な理解力」と「知識」に分解することはできない．「知識」を吸収するためには「理解力」が必要なことを考慮すると，①は「自然な理解力」を表すクラスタと考えるのが妥当である（*7）．（*7）～（*12）は図Ⅴ-8 の中にある．

②は「表現力」と「視覚化」の要素から成るが，「視覚化」の要素の方が近い距離で結びついていることを考慮して「視覚化」と名づけるのが妥当である（*8）．

③は「自然な理解力」，「柔軟性」，「興味」の要素から構成されるが，この順に距離が近いことから③を代表する要素は「自然な理解力」と考えられる（*9）．

⑥は「学習の理解力」と「興味」の 2 つの要素から成る．「学習の理解力」の方が近い距離で結合していることから，⑥は「学習の理解力」で代表される（*10）．

B クラスタは，ⅳ-1=［①］，ⅱ=［②］，ⅳ-2=［③，④］，ⅲ=［⑤，⑥，⑦，⑧］，ⅰ=［[[[18，19]，8]，10]，23］の 5 つのクラスタで構成されている．

ⅳ-1，ⅱは，それぞれ①，②のみから成るので，ⅳ-1 は「自然な理解力」，ⅱは「視覚化」と名づけられる．ⅳ-2=［③，④］であるが，③，④ともに「自然な理解力」を示しているので，ⅳ-2 は「自然な理解力」である．ⅲを構成する 4 つの C クラスタのうち，図Ⅴ-7 から分かるように⑦と⑧は結合する．クラスタ⑦は「学習の理解力」を示しており，⑧

は「学習の理解力」と「興味」から成るので，これらの構成要素から［⑦，⑧］は「学習の理解力」とするのが妥当である（*11）．クラスタⅳを［⑤，⑥，［⑦，⑧］］とみなすと，ⅲ＝［⑤，⑥，［⑦，⑧］］＝［熱中，学習の理解力，学習の理解力］と書けるので，ⅲは「学習の理解力」と呼ぶのが自然である．ⅰは B クラスタではじめて抽出されたもので，ⅰ= ［[[[18，19]，8]，10]，23］と書けるが，これらの構成要素は，「探究心」，「熱中」，「興味」を示すものであり，ⅰは「興味」と呼ぶことがふさわしい．

A クラスタは，Ⅳ＝［ⅳ-1，ⅱ，ⅳ-2］＝［自然な理解力，視覚化，自然な理解力］，Ⅲ＝［ⅲ］＝［学習の理解力］，Ⅰ＝［ⅰ］＝［興味］という構成になっている．したがって，Ⅳは「自然な理解力」，Ⅲは「学習の理解力」，Ⅰは「興味」と名づけられる．

A	Ⅰ 興味	Ⅲ 学習の理解力				Ⅳ 自然な理解力			
B	ⅰ 興味	ⅲ 学習の理解力（*12）				ⅱ 視覚化	ⅳ−2 自然な理解力		ⅳ−1 自然な理解力
C		熱中	学習の理解力（*11）		学習の理解力	視覚化	自然な理解力	自然な理解力	自然な理解力
		⑤ 2.14	⑦ 2.03	⑧ 1.97	⑥ 1.90	② 1.677	③ 1.676	④ 1.666	① 1.43
		熱中	学習の理解力	学習の理解力 興味	学習の理解力（*10）	視覚化（*8）	自然な理解力（*9）	自然な理解力	自然な理解力（*7）

②，③，④は数値の大きさを確認するため，小数点第 3 位まで記す

C		⑤ 2.14	⑦ 2.03	⑧ 1.97	⑥ 1.90	② 1.677	③ 1.676	④ 1.666	① 1.43
		熱中	学習の理解力	学習の理解力	学習の理解力	表現力	自然な理解力	自然な理解力	自然な理解力
				興味	興味	視覚化	柔軟性 興味		知識

平均点の高い順

C	① 0.53	④ 0.70	② 0.72	③ 0.75	⑧ 0.96	⑥ 0.99	⑦ 1.00	⑤ 1.11
	自然な理解力	自然な理解力	表現力	自然な理解力	興味	学習の理解力	学習の理解力	熱中
	知識		視覚化	柔軟性 興味		興味		

分散の小さい順

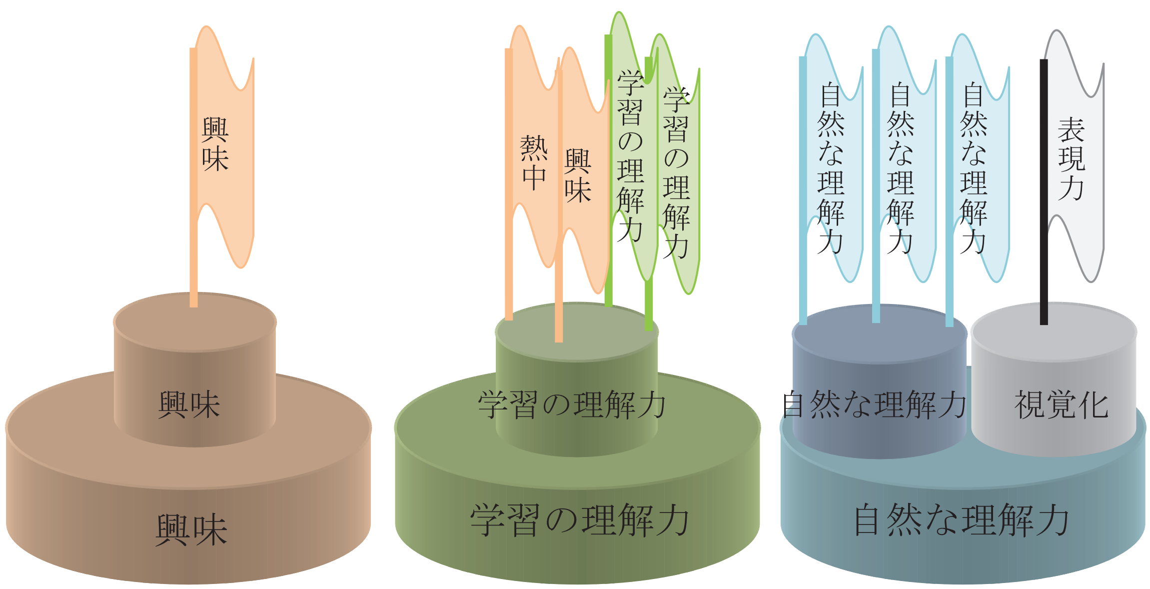


図 Ⅴ-8 中位校のデンドログラムの単純化

7 下位校に対するクラスタ分析

まず，図Ⅴ-9，付録 9 のデンドログラムを単純化した結果を示し（図Ⅴ-10），その理由を以下に示す．図Ⅴ-10 の C クラスタに示されている数値は，①～⑨の平均値と分散である．

下位校の C クラスタは，①～⑨の 9 つである．

⑦は，「自然な理解力」と「知識」の 2 つの要素から成るが，中位校の①のように，質問項目レベルで「自然な理解力」と「知識」が結合している．したがって，中位校の①と同じ理由で，下位校の⑦を「自然な理解力」と名づける（*13）．（*13）～（*19）は図Ⅴ-10 の中にある．

⑧は「自然な理解力」，「柔軟性」，「興味」の 3 つの要素から成る．「自然な理解力」の距離が最も小さく，また，多くの質問項目から成る．したがって，「自然な理解力」と呼ぶのが妥当である（*14）．

⑨は「興味」と「柔軟性」の 2 つの要素から成る．両方の要素の距離も平均値も同等である．したがって，構成する質問項目の多さから⑨は「興味」と名づける（*15）．

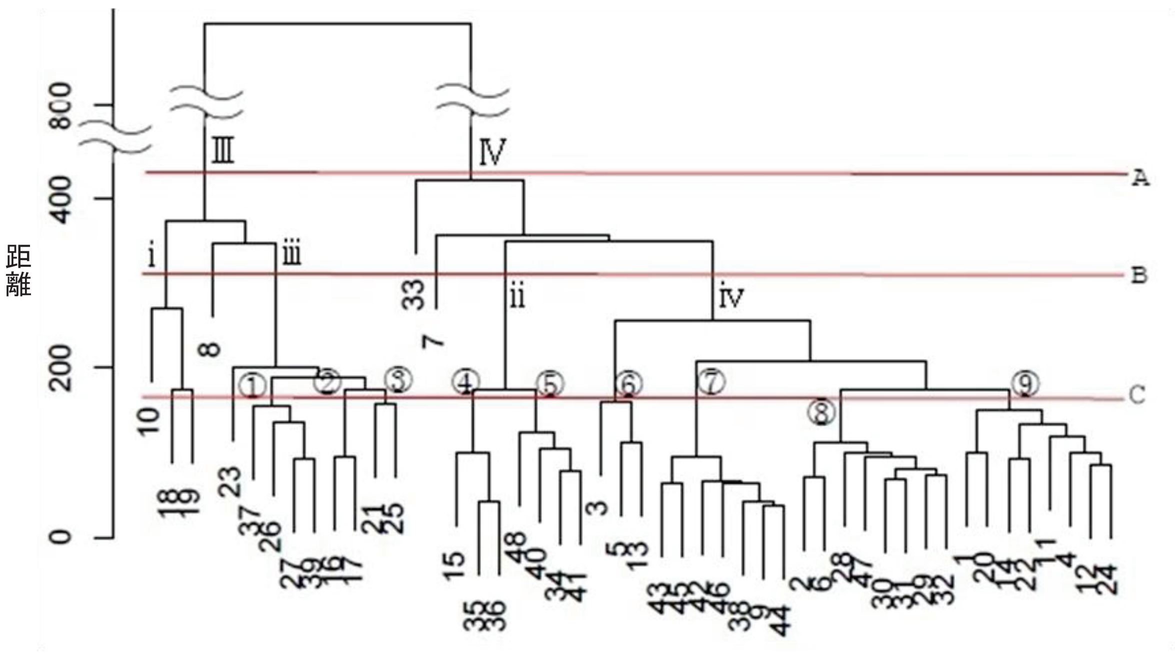


図 Ⅴ-9 下位校のデンドログラム

A	Ⅲ 学習の理解力（*19）				Ⅳ 自然な理解力（*20）					
B	i 興味	iii 学習の理解力（*16）			ii 視覚化（*17）		iv 自然な理解力（*18）			
C		① 2.05	③ 1.93	② 1.91	⑤ 1.75	④ 1.68	⑥ 1.85	⑨ 1.65（*15）	⑧ 1.63（*14）	⑦ 1.42（*13）
		学習の理解力	学習の理解力	熱中	学習の理解力	視覚化	興味	興味	自然な理解力	自然な理解力

C		① 2.05	③ 1.93	② 1.91	⑥ 1.85	⑤ 1.75	④ 1.68	⑨ 1.65	⑧ 1.63	⑦ 1.42
		学習の理解力	学習の理解力	熱中	興味	学習の理解力	視覚化	興味	自然な理解力	自然な理解力
								柔軟性	柔軟性 興味	知識

平均点の高い順

C		⑦ 0.47	⑧ 0.60	⑨ 0.66	⑤ 0.69	④ 0.73	② 0.78	① 0.86	⑥ 0.88	③ 0.92
		自然な理解力	自然な理解力	興味	学習の理解力	視覚化	熱中	学習の理解力	興味	学習の理解力
		知識		柔軟性						

分散の小さい順

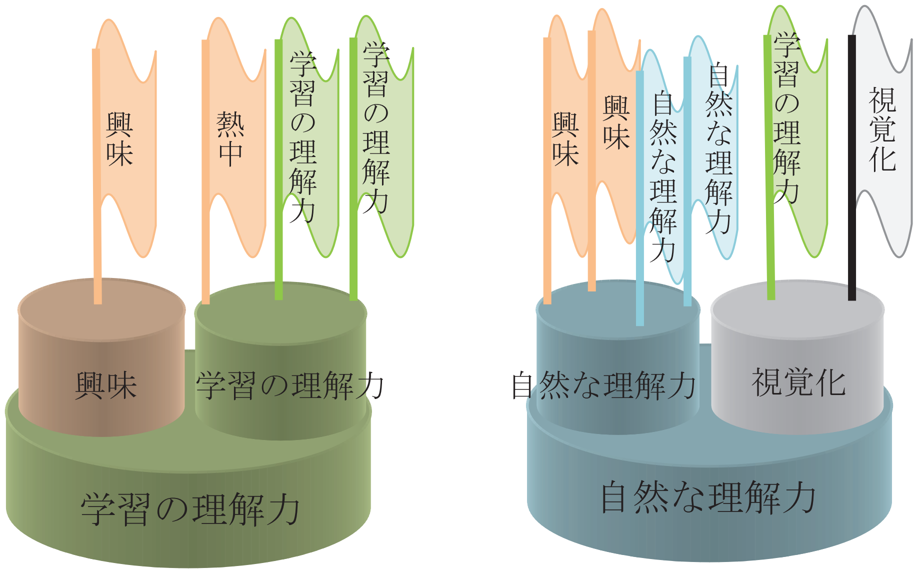


図 Ⅴ-10 下位校のデンドログラムの単純化

Bクラスタは，ⅰ～ⅳの4つである．ⅰは，Bクラスタレベルで初めて結合し，誕生したクラスタである．ⅰ＝［10,［18，19］］であり，構成要素は，探究心，好奇心，熱中と呼べるものである．

これらを総合してⅰを「興味」と名づける．ⅲ=［①，②，③］であるが，Cクラスタのうち①,③が「学習の理解力」であるため，ⅲも「学習の理解力」と名づけられる（*16）．ⅱ=［④，⑤］=［視覚化，学習の理解力］であるが，④の方が距離が小さく，しかも，④=［15，［35，36］］のうち，［35，36］は全48質問項目中，最も距離が小さい．また，15と［35，36］の距離もデンドログラムおいて最も小さい部類に入る．したがって，ⅱは視覚化を表すクラスタと考えられ，「視覚化」と記すことにする（*17）．ⅳ=［⑥，⑦，⑧，⑨］である．ⅳを構成する4つのDクラスタを距離の小さい順に並べると⑦：自然な理解力，⑧：自然な理解力，⑨：興味，⑥：興味であり，とりわけ⑦，⑧のほうが⑨，⑥のよりも距離が小さい．したがって，ⅳは「自然な理解力」と名づけるのが妥当である（*18）．

Aクラスタは，Ⅲ=［ⅰ，ⅲ］，Ⅳ=［ⅱ，ⅳ］の2つである．Ⅲについては，ⅲの方が質問項目の距離が小さく，項目数も多い．「学習の理解力」とするのが妥当である（*19）．ⅣもⅢと同じく，距離の小ささと，質問項目数の多さから「自然な理解力」とする（*20）．

8 クラスタ分析による知見

(1) 予選合格者と不合格者の共通点

G1とG2は，Aクラスタ，Bクラスタの構成に関して同じであり，Cクラスタの構成に違いが出る．BクラスタからAクラスタに統合される際，「表現力・視覚化」と「自然な理解力」は，他のクラスタと結合せず独立している．一般的に，複数個のクラスタが結合するよりも，独立したクラスタの方がより強くそのクラスタの特徴を表していると考えられる．したがって，G1とG2は，とりわけ「表現力・視覚化」と「自然な理解力」で特徴づけられる．

「興味」と「学習の理解力」が結合して，「学習の理解力」は「興味」に吸収される．

また，G1，G2のみがAクラスタに「表現力・視覚化」が現れる．

G1，G2ともにCクラスタにおいて「知識」と「自然な理解力」が同じカテゴリに属しており，Bクラスタで「自然な理解力」に統合されている．興味深いことは，実は，G1

表　V-2　予選合格者，不合格者，上位校，中位校，下位校のクラスタの相違点

	G1	G2	上位校	中位校	下位校
A クラスタ数（種類）	3	3	3	3	2
A クラスタ構成	興味	興味	興味	興味	
	表現力・視覚化	表現力・視覚化			
			学習の理解力	学習の理解力	学習の理解力
	自然な理解力	自然な理解力	自然な理解力	自然な理解力	自然な理解力
B クラスタ数（種類）	4	4	4	4	4
B クラスタ構成	興味	興味	興味	興味	興味
	表現力・視覚化	表現力・視覚化	表現力・視覚化	視覚化	視覚化
	学習の理解力	学習の理解力	学習の理解力	学習の理解力	学習の理解力
	自然な理解力	自然な理解力	自然な理解力	自然な理解力	自然な理解力
C クラスタ数（種類）	10	7	8	5	5
C クラスタ構成	興味	興味	興味	興味	興味
	熱中	熱中	熱中	熱中	熱中
	探究心		探究心		
	視覚化	表現力・視覚化	表現力・視覚化	視覚化	視覚化
	柔軟性				
	省察				
	表現力				
	学習の理解力	学習の理解力	学習の理解力	学習の理解力	学習の理解力
	自然な理解力	自然な理解力	自然な理解力	自然な理解力	自然な理解力
	知識	知識	知識		
		柔軟性	柔軟性		

と G2 だけでなく，全 5 グループにおいて，いずれは「知識」が「自然な理解力」に吸収されてしまうのであるが，あるレベルでは，「知識」と「自然な理解力」が同じカテゴリ内に共存することである．「自然な理解力」は，学習の成果ではなく先天的な能力として定義したものである．一方，「知識」は学習の成果に基づく後天的なものと考えられる．相反する 2 つの概念が同じカテゴリを構成するのは意外な感もあるが，無から何かを考え生み出すのは困難であり，先天的な能力「自然な理解力」も後天的に形成される「知識」があってこそ発揮される．また逆に「自然な理解力」をもってより高度な「知識」を獲得することができるものと思われる．この 2 つの能力は互いに補完しあって数学の力の 1 つを構成していると考えられる．また，「自然な理解力」が高いほど「知識」の修得も早くなるので

あり，この 2 つの能力が同じカテゴリに属するのは自然である.

表 V-3 予選合格者，不合格者の B クラスタの特徴

クラスタ番号		B クラスタの名称	C クラスタにおける G1 の特徴	C クラスタにおける G2 の特徴
G1	G2			
i	i	興味	「興味」，「熱中」，「探究心」	「興味」，「熱中」
ii	ii	表現力・視覚化	「省察」，「表現力」，「視覚化」，「柔軟性」	「表現力」と「視覚化」の入れ子構造
iii	iii	学習の理解力	「自然な理解力」，「学習の理解力」	「学習の理解力」のみ
iv	iv	自然な理解力	「自然な理解力」，「知識」	「自然な理解力」と「柔軟性」の入れ子構造，「知識」

(2) 予選合格者と不合格者の相違点

G1，G2 ともに B クラスタは i，ii，iii，ivの 4 つに分類できた．それぞれのクラスタの特徴を以下の**表 V-7** にまとめた. G1, G2 ともに表出した A, B クラスタは同じである. しかし，B クラスタを構成する要素は異なっており，以下に相違点をまとめる.

G1 の特徴・特性として挙げられるのは,「学習の理解力」と「自然な理解力」とが 1 つのクラスタを構成していることである．G1 では，この 2 つの要素が能力として近いことがわかる．これは,「学んだことを活用する力」と「基本的に備えもっている数学の力」が同じカテゴリに入っていることを示しており，学んだことを活用することも，G1 の生徒が基本的に備えもっている力であることを示唆している．一方，G2 では「学習の理解力」と「自然な理解力」が独立している.

C クラスタにおいて，G1 では数学的能力として「柔軟性」が単独の能力として存在しているのに対し，G2 では「自然な理解力」の一部分として「柔軟性」が存在している. G1 における「柔軟性」は,「表現力」や「視覚化」と並列しているが，G2 の「柔軟性」は「自然な理解力」の一部分である．また,「柔軟性」と「知識」も距離が近い．**V-3 (3)** で示したように，G1 において「柔軟性」と「表現力・視覚化」が同じクラスタに属することは妥当性があると思われる．つまり,「柔軟性」の能力が,「表現力・視覚化」と結合して抽出されることが G1 の生徒の特徴・特性の 1 つと考えられる.

質問項目「28 論理的に推論する」は，G1 では A，B クラスタの「興味」，C クラスタの「探究心」に属するが，G2 では A，B，C クラスタともに「学習の理解力」に属する．このことから，G1 の生徒は，論理的に思考すること自体に興味・関心をもっていることがわかる．自ら探求していくうちに論理的思考を身につけていると考えられる．一方，G2 の生徒においては，「学ぶ」ことと「論理的に思考する」ことが距離的に近く，学んだ成果として論理的に思考できるようになると思われる．したがって，G1 の生徒においては，数学に対して「学ぶ」意識は薄く能動的に取り組んでいることが示唆される．

(3) 数学オリンピック予選参加者，上位校，中位校，下位校に関する知見

表V-7 にあるように，B クラスタに関しては，G1，G2，上位校，中位校，下位校の全 5 グループが，同じクラスタに分類されている．すなわち，B クラスタとして「興味」，「学習の理解力」，「表現力・視覚化」（または「視覚化」），「自然な理解力」の 4 つが抽出された．これから，全 5 グループに共通な数学的能力の特性として，

- 数学が好きで，数学に興味をもち，数学を楽しむ力
- 学んだことを活用する力
- 自分の考えたことなどを上手に視覚化し，効果的に表現していく力
- 基本的に備えもっている数学の力

の 4 つが挙げられる．すなわち，この 4 つの能力がどのレベルにおいても高校生が共通に有している数学的能力であり，これらの伸長によって数学の学力の改善が見込まれる．

一般的に下位校よりも上位校の方が，上位校よりも数学オリンピック予選参加者の方が，数学の学力は高いと考えられる．一方，「数学に対する思考・表現等の能力ならびに態度に関する基準尺度測定質問紙」も数学の学力と同じ傾向であることが**図Ⅲ-1** からわかる．すなわち，数学の学力と「質問紙」は相関が高いと考えられる．したがって，「質問紙」から抽出された 4 つの数学的能力を伸長することで，数学の学力の改善が見込まれるのである．ただし，「基本的に備えもっている数学の力」は，その能力の意味合いから，伸長することが困難であるから，実質的には 3 つの能力の伸長を図るべきである．

A クラスタにおいて，下位校に「興味」のクラスタは現れず，下位校においては，まず，

生徒に興味をもたせる指導が必要であることが分かる（表Ⅴ-7）．

Aクラスタのレベルで，数学オリンピック予選参加者は，「興味」，「自然な理解力」，「表現力・視覚化」で特徴づけられるが，高校グループは，「興味」，「自然な理解力」，「学習の理解力」で特徴づけられる（表Ⅴ-7）．数学オリンピック予選参加者と高校グループとの差異は，「表現力・視覚化」クラスタと「学習の理解力」クラスタの違いである．

才能者の基本的特性として，［Andrews 09］は「高度な言語能力」を挙げている．「表現力・視覚化」を構成する質問項目のうち，「考えた結果を分かりやすく説明します」，「何を学習したか自分の言葉で表現します」が対応している．また，［Span 86］においても，数学の能力に優れる生徒は，図式化して問題を解くことが指摘されており，「表現力・視覚化」を構成する質問項目のうち，「図や表を用いて，自分の考えをまとめようとします」，「自分のアイデアを図や表で効果的に表現します」，「考察と研究の結果を図や表で適切に要約します」が対応している．すなわち，数学オリンピック予選参加者は，［Andrews 09］の指摘する才能者の基本的特性や，［Span 86］の指摘する数学の能力に優れる生徒の特性を有していると言える．

ア Aクラスタによる分類

Aクラスタによる分類については，次の2つを示すことができる．すなわち，「表現力・視覚化」による分類（表Ⅴ-4）と，「興味」による分類（表Ⅴ-5）である．「表現力・視覚化」の有無に関して全5グループを「G1，G2」と「上位校，中位校，下位校」の2つに分割できる．G1，G2については，学習の理解力が備わっていると考えられるから，「上位校，中位校，下位校」について，「表現力・視覚化」の強化を図ることが示唆される．

また，「興味」の有無に関しては，「G1，G2，上位校，中位校」と「下位校」の2つに

表 Ⅴ-4 Aクラスタによる分類（表現力・視覚化）

G1	G2	上位校	中位校	下位校
表現力・視覚化		学習の理解力		

表 Ⅴ-5 Aクラスタによる分類（興味）

G1	G2	上位校	中位校	下位校
興味				なし

分割できる.「興味」は，学習の動機付けになるものであり，下位校において，生徒に「興味」を抱かせるよう工夫することが必要である.

イ B クラスタによる分類

B クラスタによる分類は,「表現力・視覚化」と「視覚化」の違いを考慮しなければ，5 つのグループすべてで同じである．すべての能力層に共通な分類であり，すべての生徒に対して刺激すべき能力が分かる.

ウ C クラスタによる分類

C クラスタによる分類は，以下の 4 つを示すことができる．まず,「柔軟性」の有無に関して「G1，G2，上位校」と「中位校，下位校」の 2 つに分割できる（**表 V-6**）．また,「知識」の有無に関しても同様に「G1，G2，上位校」と「中位校，下位校」の 2 つに分割できる（**表 V-7**）.「柔軟性」と「知識」に関しては，同じ分割結果となった.「柔軟性」は，問題解決にあたっていろいろなアイデアの創造に寄与する能力である．本研究におい

表　V-6　C クラスタによる分類（柔軟性）

G1	G2	上位校	中位校	下位校
柔　軟　性			な　し	

表　V-7　C クラスタによる分類（知識）

G1	G2	上位校	中位校	下位校
知　識			な　し	

表　V-8　C クラスタによる分類（「表現力・視覚化」または「視覚化」を構成するクラスタ数）

G1	G2	上位校	中位校	下位校
4	1			

表　V-9　C クラスタによる分類（C クラスタに存在するの柔軟性の B クラスタにおける属性）

G1	G2	上位校	中位校	下位校
表現力・視覚化	自然な理解力		な　し	

て，G1，G2，上位校，中位校，下位校の 5 グループにおける C クラスタの「知識」はすべて，B クラスタの「自然な理解力」と同じカテゴリに属することがわかっている.「知識」と「自然な理解力」が相互作用を起こしていることが示唆されており，「中位校，下位校」において，どのような方法で生徒に「知識」を定着させるか今後の検討が必要である.

さらに，B クラスタで全 5 グループに存在する「表現力・視覚化」または「視覚化」を構成する C クラスタの個数に注目した分割が**表Ⅴ-8** である．これにより 5 グループは，「G1」，「G2，上位校，中位校，下位校」の 2 つに分割される．G1 の「表現力・視覚化」が，多くの要素によって構成され，多様な表現力を有していることが示唆される.

最後に，C クラスタに存在する柔軟性が，B クラスタでどのクラスタに属するのかについて検討した（**表Ⅴ-9**）．これによって，5 グループは，「G1」，「G2，上位校」，「中位校，下位校」の 3 つに分割される．C クラスタの「柔軟性」は，G1 では B クラスタの「表現力・視覚化」に属し，G2，上位校では B クラスタの「自然な理解力」に属している．したがって，**Ⅴ-３(3)**に 1 つの事例を示したように，「柔軟性」と「表現力・視覚化」との関連は，数学的能力の高さと相関をもっている可能性がある．言い換えれば，G1 において「柔軟性」と「表現力・視覚化」は高い相関を有することが示唆される．そこで，課題の 1 つとして，G1 における「柔軟性」と「表現力・視覚化」の因果関係の検討が考えられる. 因果関係が明らかになれば，より効果的な教材開発ができるのは確かであり，今後，共分散構造分析等によって検討を行いたいと考えている.

一般に，柔軟性は創造性を構成する一因子とされ，両者の相関も高い［Guilford 71］，［齋藤 10］．一方，創造性と知能はそれぞれ，拡散的思考（divergent thinking）と収束的思考（convergent thinking）の 1 つであり独立しているとされる［Guilford 71］，［岩崎 71］．また，［齋藤 10］は，柔軟性・創造性と学習成績（到達度テスト）の相関が弱いことも指摘している．知能指数が 120 以上になると，両者の相関は低くなるという報告もある［Torrance 70］．一方，学習成績と知能の相関が高いことも知られている［続 57］．本研究では，G2，上位校において，C クラスタの「柔軟性」が B クラスタの「自然な理解力」に属することがわかった．つまり，C クラスタの「柔軟性」クラスタは，同じ C クラスタ内にある「自然な理解力」に関するクラスタと距離的に近いということである．一方，G1 では，「柔軟性」と「表現力・視覚化」の距離が近い．これが数学的能力の高さを示す指標の 1 つとなる可能性がある，というのが筆者の主張である.

［Guilford 71］は，創造性と知能は全く異なる 2 つの知的能力であると主張しているが，

様々な創造に知能が関与していないと考えることは非現実的である．［Guilford 67］は，知能が高くなるほど，創造性を測定する創造性テストの得点の分散が大きくなると述べている．つまり，高知能者は必ずしも高創造者ではなく，高知能者には創造性テストの点数の高い者から低い者まで広範囲にわたって存在するということである．「自然な理解力」と知能の相関を検討することで，数学的能力と柔軟性・創造性，知能の関係の分析がさらに進むと考えられる．**表Ｖ-6** で示したとおり，「柔軟性」クラスタは中位校，下位校では出現しないのであり，数学的能力の高低との相関は確認できる．一方，数学的能力の最上位層 G1 では，「柔軟性」が距離的に近いのは「自然な理解力」ではなく，「表現力・視覚化」であり，数学的能力と知能を含めた知的能力との関係についてさらに検討を進めたい．

９ まとめ

(1) 数学オリンピック予選参加者に関するまとめ

G1 では，「学んだことを活用する力」と「基本的に備えもっている数学の力」が同じカテゴリに入っており，これは学んだことを活用することも，G1 の生徒が基本的に備えもっている力であることを示唆している．一方，G2 では「学習の理解力」と「自然な理解力」が独立している．

「柔軟性」の能力が，「表現力・視覚化」と結合して抽出されることが G1 の生徒の特徴・特性の 1 つと考えられる．一方，G2 では「柔軟性」が「自然な理解力」（すなわち，基本的に備えもっている数学の力）と結合している．すなわち，「柔軟性」と「表現力・視覚化」との関連は，数学的能力の高さと相関をもっていることが示唆される．

質問項目「28 論理的に推論する」は，G1 では A，B クラスタの「興味」，C クラスタの「探究心」に属するが，G2 では A，B，C クラスタともに「学習の理解力」に属する．このことから，G1 の生徒は，論理的に思考すること自体に興味・関心をもっていることがわかる．自ら探求していくうちに論理的思考を身につけていると考えられる．一方，G2 の生徒においては，「学ぶ」ことと「論理的に思考する」ことが距離的に近く，学んだ成果として論理的に思考できるようになると思われる．したがって，G1 の生徒においては，数学に対して「学ぶ」意識は薄く能動的に取り組んでいることが示唆される．

(2) 数学オリンピック予選参加者，上位校，中位校，下位校に関する知見

上・中・下位校の生徒には，「表現力・視覚化」の強化を図ることが，数学的能力の伸長に関して有効であると考えられる．また，下位校の生徒には「興味」をもたせ，それを維持できるような方略が必要である．中位校，下位校には，「柔軟性」の強化を図り，「知識」の定着を図ることが必要である．とくに，G1，G2，上位校，中位校，下位校の 5 グループにおける C クラスタの「知識」はすべて，B クラスタの「自然な理解力」と同じカテゴリに属していることから，「知識」と「自然な理解力」が相互作用を起こしていることが示唆されている．中位校，下位校において，どのような方法で生徒に「知識」を定着させるか今後の検討が必要である．

数学オリンピック予選参加者については，「表現力・視覚化」が特徴的な能力である．とりわけ，G1 については，B クラスタにおける「表現力・視覚化」または「視覚化」を構成する C クラスタ数が格段に多く，「表現力・視覚化」の能力が，G1 の生徒，あるいは G1 の生徒と同等の能力をもつ生徒の判別に寄与するものと考えられる．

V－8 (3) ウから，「柔軟性」の能力が，「表現力・視覚化」と結合して抽出されるとき，当該生徒がかなり高い数学的能力を有するもの推定できる．

参考文献

[青木 09] 青木繁伸：“R による統計解析”，オーム社, 2009

[Barnett 93] Barnett, L. B & Durden, W. G : “Education patterns of academically talented youth”, Gifted Child Quarterly 37(4), pp.161-168, 1993

[Bosse 06] Bosse & Rotigel : “Encouraging Your Child's Math Talent”, Prufrock Press, 2006

[Brandl 12] Brandl, M & Barthel, C : “A Comparative Profile of High Attaining and Gifted Students in Mathematics”, 12th International Congress on Mathematical Education Pre-Proceedings, pp.1429-1438, 2012

[Greens 81] Greens, C : “Identifying the Gifted Student in Mathematics”, The Arithmetic Teacher 28-6, pp.14-17, 1981

[Guilford 67] Guilford, J. P : “The nature of human intelligence”, McGrow-Hill, 1967

[Guilford 71] Guilford, J. P & Hoepfner, R : "The analysis of intelligence", McGraw-Hill, 1971

[House 87] House, P. A (Ed.) : "Providing Opportunities for the Mathematically Gifted, K-12", National Council of Teachers of Mathematics, 1987

[岩崎 71] 岩崎純子："児童における拡散的思考と知能の関係", 教育心理学研究 19(2), pp.121-125, 1971

[Kennard 01] Kennard, R : "Teaching Mathematically Able Children", David Fulton Publishers, 2001

[Kießwetter 92] Kießwetter, K : "Mathematische Begabung" als Element des Weltbildes kompetenter Mathematiklehrer und Schüler ausgewählte Ergebnisse aus einem DFG-Projekt. MU 38 (1), pp.54-60, 1992

[金 07] 金明哲:"R によるデータサイエンスーデータ解析の基礎から最新手法までー", 森北出版, 2007

[McClure 07] McClure & Piggott : "Meeting the Needs of Your Most Able Pupils: Mathematics", David Fulton Publishers, 2007

[Milgram 89] Milgram, R. M (Ed.) : "Teaching Gifted and Talented Learners in Regular Classrooms", Charles C Thomas Pub Ltd, 1989

[齋藤 06] 齋藤堯幸, 宿久洋 : "関連性データの解析法－多次元尺度構成法とクラスター分析法",共立出版, 2006

[齋藤 10] 齋藤昇, 秋田美代 : "数学における創造性と学習成績の関係－高等学校数学Ⅰ「2次関数」を対象としてー", 日本数学教育学会第 43 回数学教育論文発表会論文集, pp.31-36, 2010

[Silver 97] Silver, E. A : "Fostering Creativity through Instruction Rich in Mathematical Problem Solving and Problem Posing", ZDM The International Journal on Mathematics Education 29(3), pp.75-80, 1997

[Span 86] Span. P & Overtoom-Corsmit. R : "Information processing by intellectually gifted pupils solving mathematical problems", Educational Studies in Mathematics, Volume 17, Issue 3, pp.273-295, 1986

[Sumida 10] Sumida, M : "Identifying Twice-Exceptional Children and Three Gifted Styles in the Japanese Primary Science Classroom", International Journal of Science Education,Vol.

32, No. 15, pp.2097–2111, 2010
[Torrance 70] Torrance, E. P：“Encouraging creativity in the classroom”, W. C. Brown Co, 1970
[Torrance 00] Torrance, E. P & Sisk, D. A, 野津良夫 訳：“才能を拓く－その考え方・見つけ方・伸ばし方”, 文芸社, 2000
[続 57] 続有恒：“中学校卒業時における学業的成功の予見”, 名古屋大学教育学部紀要(3), pp.245-254, 1957

---

xxii xya 空間における曲面 $f(x, y, a)=0$ に対して，その勾配 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial a}\right)$ は曲面の法ベクトルを表している． $\frac{\partial f}{\partial a}=0$ のとき， $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, 0\right)$ は，(0, 0, 1)と垂直となる．このとき，接点の集合は，曲面を a 軸方向から見たときの境界線となっている．

Ⅵ 数学的才能者と高学力者の相互作用に関する事例

１ 本章の目的

本章では，数学オリンピックと数学技能検定の成績をもとに数学的才能者を，中学受験塾の偏差値をもとに高学力者を操作的に定義した上で，数学的才能者の思考過程を分析し，それを授業に生かしたときの高学力者への効果を検討する．さらに，数学的才能者と高学力者の学校内における相互作用についても検討する．また，高学力者の中学生に対する論理指導実践の事例を報告する．本章の結果は卓越性の放射現象のミニ版と呼ぶべきものである（Ⅵ－３）．

２ 数学的才能者と高学力者

(1) 予選合格者の中の「数学的才能者」

ア 定義

Ⅳ－７で検討した，数学オリンピック本選合格者のプロファイリングから，彼ら/彼女らを数学的才能者と呼ぶことが適当であると考えるが，本項ではそれに保証を与えたい．

数学的才能者の精確な定義を述べる前に，アメリカと日本における才能者の定義を再度確認しておきたい．

アメリカの連邦初等中等教育法（ESEA，Elementary & Secondary Educational Amendments of 1978, PUBLIC LAW 95-561，Ⅸ(A)）によれば才能者の定義は以下のとおりである．

（才能者とは）知的，創造的，特定の学問，リーダーシップなどの能力の領域，あるいは舞台・視覚芸術で，高度な遂行能力の根拠となる表出されたあるいは潜在的な能力をもっているものと，幼児・初等・中等教育段階で認定される子どもたちや（該当するなら）青年たちである．そしてそれがゆえに，ふつうは学校で提供されない指導や活動を必要とする者である．……①

一方，日本では，第 16 期中央教育審議会答申（1998）において，「教育上の例外措置の対象者」として次のように規定されている．

（対象者は，数学・物理などの）一分野で突出した才能を保持し，早い時期に専門家から適切な指導を受けることが望まれる者で，将来，学問の新しいフロンティアを開拓する可能性をもつ者である．……②

さらに，

単に特定の科目における学校の試験の成績が優秀である者などのように，各学校に対象者が必ずいるということではなく，全国的に見てもごく少数の者に限られると考えられる．……③

とされる．

この「教育上の例外措置」とは，大学への早期入学や高校でのいわゆる飛び級を指すのであるが，実際に高校生を受け入れている大学は，千葉大学をはじめとする少数の大学であり，答申にも，高校生に大学へのアクセスの機会を与えることについての言及はほとんどない．それに代わって，「中高一貫教育制度」が重要な柱として登場した．……④

先述したように，アメリカにおける才能の発見と認定についての一例として，ジョンズ・ホプキンス大学の才能児センター（CTY）のタレント・サーチの事例がある．CTY では大学入学適性試験（SAT）のスコアについて年齢別の基準を設け，数学分野と言語分野のそれぞれについて別々に CTY の受講資格の有無を認定している．……⑤

以上の点に鑑み本研究では，中等教育における数学的才能者を次のように定める．

（定義）中等教育における数学的才能者（Mathematically Talented Students，MTS）とは, 18 歳以下の日本数学オリンピック本選合格者, または実用数学技能検定(以下, 数学技能検定）1 級の合格者のこととする．

イ 妥当性ーアメリカ連邦初等中等教育法と中央教育審議会答申

表 VI-1 に，数学オリンピック・数学技能検定の 2 カ年の合格状況を示す．数学オリンピックは 4 月～3 月の年度集計，数学技能検定は 1 月～12 月の年集計のため，それぞれ 2009～2010 年度，2010～2011 年の合格状況である．

日本数学オリンピック，および数学技能検定のテストは，ESEA（1978）（①）による 5 つの能力のうち学問的能力を判定するものにあたる．それぞれの合格率は 0.95%～2.22% の範囲にあって「高い達成を示し」ており，ESEA（1978）（①）の定義を満たすと考えられる．ESEA（1972）でも，「(才能者は）学齢児の少なくとも 3～5%」と述べられている．また,「通常の学校教育とは異なる教育訓練を必要」とするとも考えられる．さらに,

表 VI-1 数学オリンピックおよび数学技能検定の合格状況

	数学オリンピック				数学技能検定 1 級			
	2010 年度		2009 年度		2011 年		2010 年	
	受験者	本選合格者	受験者	本選合格者	受験者	合格者	受験者	合格者
高 3	5	0	5	0	24	1	16	0
高 2	1,135	10	1,063	7	8	0	16	0
高 1	984	5	799	10	9	0	6	0
中 3	76	2	37	5	13	0	4	0
中 2	7	4	7	1	1	0	3	1
中 1	0	0	2	1	1	0	0	0
その他	1	0	1	0				
計	2,208	21	1,914	24	56	1	45	1
合格率	0.95		1.25		1.79		2.22	

数学オリンピックのデータは，数学オリンピック財団の HP，数学技能検定のデータは日本数学検定協会 丸岡隆一郎氏の提供による．

第 16 期中央教育審議会答申（②，③）における「一分野で突出した才能を保持し，早い時期に専門家から適切な指導を受けることが望まれる者で，将来，学問の新しいフロンティアを開拓する可能性をもつ者」，「全国的に見てもごく小数の者」にも適合する．

一方，日本の学校現場おける定義としては，CTY（⑤）のように SAT に相当する標準テストの上位者と規定することができない．SAT に相当するのが大学入試センター試験であるとしても，18 歳未満の者が受験することはできないからである．そこで，任意に受験できるテストでかつ具体的な数学能力を測ることができるものであって，ESEA（①）と中教審答申（②，③）を満足するものとしては，日本数学オリンピックおよび数学技能検定 1 級が適正であると考える．

ウ 妥当性－数学オリンピックの出題レベルと参加者のその後の進路

Ⅵ-２(1)アにおいて，数学的才能者を「日本数学オリンピック本選合格者または数学技能検定 1 級合格者」と定義した．**Ⅵ-２(1)イ**ではその妥当性を ESEA（1978）と第 16 期中教審答申を踏まえて検討した．

ここでは，定義の妥当性を日本数学オリンピックの実施目的，出題レベル，参加者のその後の進路等を踏まえて検討する．

日本数学オリンピックの上位大会が，国際数学オリンピックである．

国際数学オリンピック（International Mathematical Olympiad，IMO）は，世界各国の高校生以下の生徒を対象とし，数学的才能に恵まれた人材を見出し，その才能を伸ばすチャンスを与えるとともに，互いに交流を深める場を作り，また，各国チームを引率する数学者たちに，各国の数学教育の実情について情報交換をする機会を提供することを目的として，毎年 1 回開かれる数学コンテストである［伊藤 05］．

そして，日本数学オリンピックは，国際数学オリンピックへの日本選手の派遣と数学教育の振興を目的として，毎年 1 回，予選，本選を行う数学コンテストであり，IMO レベルに近い難問が出題される．［伊藤 05］によれば，2003 年の第 13 回まで，例年 1,000～1,500 人が予選に参加し，そのうち予選合格が約 100 人，本選合格が約 20 人であるとされる．2013 年の第 23 回では，予選参加者は 3,402 人，そのうち予選合格が 183 人，本選合格は 21 人であり，2014 年の第 24 回では，予選参加者は 3,455 人，そのうち予選合格が 219 人，本選合格は 20 人であった．予選参加者・合格者の人数は増加の傾向にあるが，本選

合格者の人数は変化がないように思われる.

ところで,［伊藤 05］は IMO の出題について次のように述べている.

> 出題される問題は難問ぞろいであるが，計算が大変であるとか，多くの予備知識が必要といった種類の難しさではなく，問題の数学的本質に対する鋭い洞察力と，独創的なひらめき，抜群の集中力と根気を要求するような難しさである．従って，数学の能力の卓越した生徒でなければ，良い成績が取れないのは勿論である.

一方，日本数学オリンピックでは,「IMO レベルに近い難問が出題される」のであるから，日本数学オリンピックにおいても「問題の数学的本質に対する鋭い洞察力と，独創的なひらめき，抜群の集中力と根気を要求する」問題が出題されていると考えられる.

以上，日本数学オリンピックの実施目的，出題レベルの考察から数学的才能者の定義の妥当性は保証されると考えられる．IMO および日本数学オリンピックの出題レベル「問題の数学的本質に対する鋭い洞察力と,独創的なひらめき,抜群の集中力と根気を要求する」ことが,［Renzulli 78］の才能の三輪概念「普通より優れた能力＝数学的本質に対する鋭い洞察力」,「創造性＝独創的なひらめき」,「課題への傾倒＝抜群の集中力と根気」と合致することは注目に値する.

一方,［伊藤 05］によれば，IMO を経験した数学者がフィールズ（Field）賞の対象になり始めたのは 1978 年頃であり，それ以降 2005 年までのフィールズ賞受賞者は 25 人程度である．ところで，この 25 人中 6 人が IMO のメダリストであり，ネバンリンナ（Nevanlinna）賞に関しても，1978 年以降の全受賞者 6 人中 IMO のメダリストは 2 人である．ただ 1 つの数学コンテストに対して，IMO のメダリストが占めるこの比率は極めて高いと考えられる．また，これ以外にも数学の各分野で優れた業績を上げ著名になった研究者の多くが，イギリス，アメリカ，フランス，ロシア，ハンガリー，ルーマニアその他の国の IMO 代表選手として活躍した記録が残っている［伊藤 05］ことからも，数学的才能者の定義に IMO の前段階にあたる日本数学オリンピック本選合格を用いるのは妥当であると考えられる.

［伊藤 05］が日本数学オリンピック参加者のその後の進路について次のように述べて

いる.

> 日本の過去 IMO 派遣選手の多くは，一流大学の理学系に進学している．そのすべてがそうである訳では勿論ないが，かなりの人たちが数学者を目指して，学部数学科，大学院数学専攻に籍を置いているし，また何人かは，すでに博士号を取得して，数学研究者の道を歩み始めている．

［中村 05］は，日本数学オリンピックの第 1 回（1990）から第 15 回（2005）までの日本数学オリンピック予選合格者（本研究における G1）1,063 人を対象に，その後の大学進学・就職等の聞き取りを中心にアンケート調査を実施した．実際にアンケートが着信したのは 1,045 人であり，アンケート回収数は 296 で回収率は 28.3%であった．

この結果，大学での専攻について最も多かったのは医学系の 51 人（21.1%）で，理学系（数学）が 48 人（20.0%）でそれに続き，理学系（物理）が 36 人（14.9%），工学系（情報工学を除く）が 30 人（12.4%）であった．つまり，「日本数学オリンピックの成績優秀者の多くは医学部に進学する」という通念があったが，実際は，医学系進学者と理学系（数学）進学者は全体の約 20%ずつでほぼ同数であり，残りの約 60%も大半は理系に進学している．

一方，IMO まで進んだ 17 人の生徒のうち，高校生の 4 人を除く 13 人の中で医学系に進学したのは 1 人のみであり，それ以外はすべて大学で理数系を専攻している．その内訳は理学系（数学）6 人，理学系（物理）1 人，工学系（情報工学を除く）1 人，情報工学系 2 人，東京大学教養学部在籍（数理系学部に進学予定）2 人であった．さらに，医学系に進学した 1 人もアンケート当時は大学院在籍中で，将来は数学の知識を活かし医学研究への従事を希望していると答えている．

このような状況を見ても，数学オリンピックは数学的才能の抽出に成功していると思われる．つまり，この点からも数学的才能者の定義の妥当性は確認されたと考えられる．

(2) 上位校の中の「高学力者」

ア 定義

(定義) 中等教育における高学力者(Academically Advanced Students, AAS)とは,東京都・神奈川県の私立中学校・高等学校のうち,上位 5.0%以内に属する学校に在籍する生徒とする.上位 5.0%の判定には,株式会社日能研の中学入試偏差値を用いる.

イ 妥当性

従来,学力とは教科目標や教科内容をどの程度達成しているかを測ることが多く,その典型が標準学力検査である.一方,平成 10 年 12 月告示の学習指導要領では,従来の学力の中心である「知識・理解」とともに,「意欲・態度・関心」,「思考・判断」,「技能・表現」をも学力として捉えるようになった.しかし,[弓野 01]は,このような学力観には「動機づけ」,「思考過程」,「学習結果の表現」等の側面も含まれ,それらは学習者の内面の問題であるがゆえに測定が難しく,評定者の主観に左右されることになる,と指摘している.実際,国際的に学力を比較する際には,学習指導要領の学力観に立つ学力の比較は難しく,従来の学力観に立った学力と教科に関連した態度のみが比較されている.

以上の観点から,数値として測定することを考慮した場合,従来の学力観に立った定義が望ましく,学校現場において全国的な学力標準テストの上位者を抽出して研究することは困難であるので,中学受験用の偏差値を用いた.東京都・神奈川県の私立中学校・高等学校に絞ったのは,在籍者数の把握が比較的容易であるからである.

ところで[続 57]は,中学生各学年のウェクスラー児童・生徒用知能検査(Wechsler Intelligence Scale for Children,WISC)の結果と学業成績の相関を求めたところ,両者間には 0.44〜0.64 の相関があり,さらに知能と卒業時の基礎学力調査の間にも 0.62〜0.76 という高い正の相関があることを見出した.つまり,従来の学力と知能検査の結果には相関があると認められる.WISC による IQ130 以上の者が人口比上位 2.1%であることを考慮し,本研究では高学力者の定義を便宜的に 5.0%以内とした.

また,日能研は在籍者数を公表していないが,2010 年度の小学 6 年生の在籍者数は約 9,200 人と推定されている.大手と言われる SAPIX の在籍者数は 4,496 人であることから,明らかにトップシェアであると思われるため,日能研の偏差値を用いた.

表 VI-2 数学オリンピック予選参加者の上位校，中位校，下位校および公立，国立，私立に関するクロス集計

	高校数	占有率	公立	国立	私立	人数	占有率	公立	国立	私立
上位	81	86.2	20	4	57	386	95.5	62	91	233
中位	13	13.8	4	1	8	18	4.5	8	1	9
下位	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
計	94	100	24	5	65	404	100	70	92	242

表 VI-3 数学オリンピック予選参加者に占める高学力者の割合

	高校数	占有率	公立	国立	私立	人数	占有率	公立	国立	私立
AAS	13	13.8	1	2	10	182	45.1	2	71	109

(3) 数学オリンピック予選参加者に占める上位校，中位校および高学力者の割合

第Ⅲ章，第Ⅳ章，第Ⅴ章で実施したアンケートに関して，数学オリンピック予選参加者の上位校，中位校，下位校および公立，国立，私立におけるクロス集計を下の表VI-2 に示す. ただし, 統計処理では不適切なデータもクリーニングせずに生かすことにした. また, 高校名を記入していない数学オリンピック予選参加者もいたため，生徒の総数は 404 人となった.

次に，数学オリンピック予選参加者でかつ高学力者である生徒およびその所属校についても同様の表を示す．高学力者はその定義から，すべての生徒の所属校が上位校である．表VI-3 の高校数における占有率は，数学オリンピック予選参加校の総数 94 における占有率である．人数における占有率は，数学オリンピック予選参加者の総数 404 人における占有率である．

これらの表から，G1，G2，上位校，中位校，下位校および数学的才能者（MTS），高学力者（AAS）の包含関係に関する図VI-1 を得る．

表VI-2 によれば，数学オリンピック予選参加者の中に下位校の生徒はおらず，上位校，

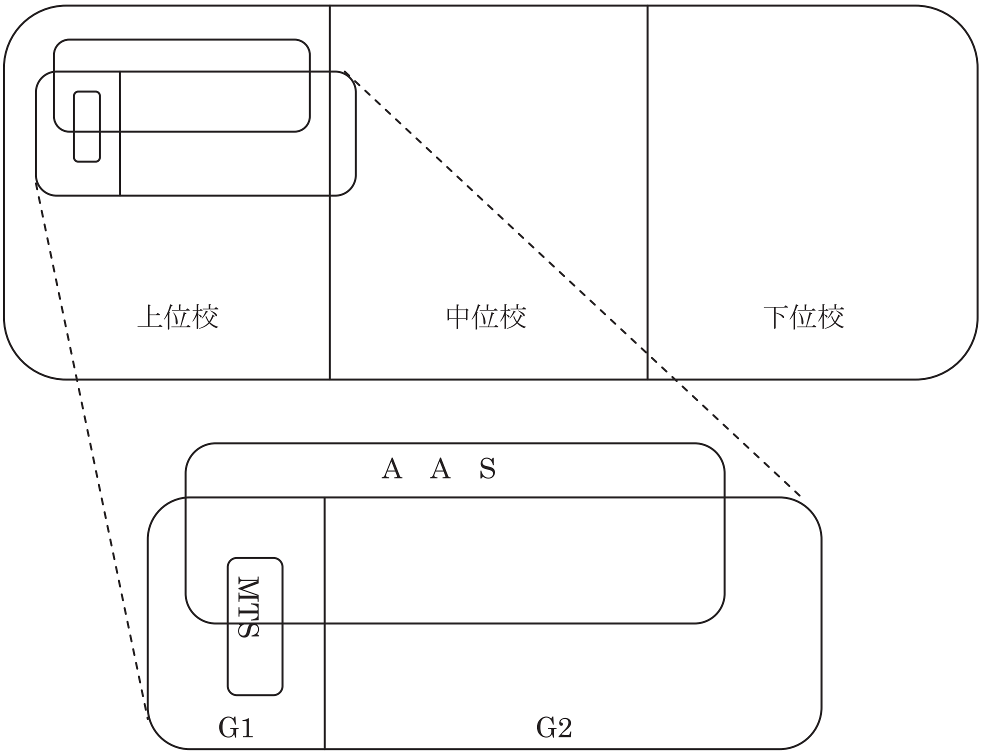


図 Ⅵ-1 数学オリンピック予選合格者，不合格者，上位校，中位校，下位校および数学的才能者，高学力者の包含関係

中位校の割合も，それぞれ 86.2%，13.8%である．しかし，上位校，中位校に属する生徒の割合にすると，それぞれ 95.5%，4.5%であり，上位校からは 1 校あたり多くの生徒が参加しているが，中位校では 1 校あたりの参加生徒が相対的に少ないことがわかる．一方，高学力者に関して，高校数としての占有率は 13.8%であるが，生徒数にすると 45.1%にまで上がる．

一方，数学的才能者に関しては，本研究におけるサンプルが 5 人であるため，人数に関する統計上の価値はないと思われる．参考のため，5 人中，高学力者は 2 人であったことを記す．

３ 数学的才能者と高学力者の相互作用

(1) 数学的才能者の思考過程

筆者の勤務する高等学校の生徒は，前節Ⅵ-２(2)で定義した高学力者であり，1，2 学年に 1 人の割合で，Ⅵ-２(1)で定義した数学的才能者が存在する．

さて， 高等学校の検定教科書に掲載されている $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ の証明に関しては，循環論法であるとの指摘があるが，教科書では教育的配慮からやむを得ずその証明を採用していると思われる．$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ の真の証明については，教育現場ではあまり知られておらず，生徒向けの数学書で正しい解説を与えているものは， 筆者の知りうる限り存在しないように思われる．

数学的才能者，高学力者（以下，「生徒たち」も同義）の中には，証明が循環していることに気づく者も少なくない．筆者の担当するひとりの数学的才能者が，π の再構成を行い，それを用いて $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ の証明における循環論法の回避策を見出したのだが，本節は，約 3 ヶ月間にわたりその過程を追跡し，分析した結果を記すものである．

さらに，その数学的才能者が示した π の再定義と，それを用いての循環論法の回避策を授業で提示した際の高学力者の反応，および授業の効果について検証した．

ア 調査方法および手順

高学力者の属する A 高校（私立男子校）において，数学的才能者と高学力者を対象とした実践ならびに調査を行った．

2010 年度の A 高校 2 年生の理系を目指す生徒は 122 人（実際に文理分けを行うのは高 3 次）であった．

具体的な手順および経過は次の通りである．

① 2010 年 10 月に次の問題を生徒に提示した．締切は 2010 年 12 月下旬．提出は任意．

> 教科書における $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ の証明の正否について考察し，その結果をレポートせよ．

18 人から循環であるとの指摘があった．さらに，その中の 1 人から循環を回避する方法が提示された．この 1 人は数学的才能者である〔理由はⅥ-３(1)ウで述べる〕．

② 数学的才能者から提出された回避策についてのレポートは， 十全ではなかったため問題点を指摘し，修正稿の再提出を指示.

③ 数度の修正によって完成稿（2011 年 3 月上旬完成）が提出された．完成稿を提出した生徒（数学的才能者）の思考過程を検討.

④ 完成稿を含む複数の回避策（循環しない正しい証明）を高 3 の理系に進級した生徒 111 人のうち希望者 47 人（高学力者）に対して提示（2011 年 7 月下旬）.

⑤ 生徒たち（高学力者）にアンケートし（2011 年 7 月下旬），高学力者が回避策を理解する際の反応，および授業の効果を検討.

イ 調査結果（数学的才能者の思考過程に関する検討）

前項に記した，完成稿を提出した生徒（以下，Y と呼ぶ）は，次のような方法で $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ の証明における循環を回避した.

円に内接する正 2^n 角形と外接する正 2^n 角形を考える．図Ⅵ-2 はその一部分（1/4 円）である．いま $f(3)=OC/OA_3$ と定義する．同様に $f(n)=OC/OA_n$ と定義し，さらに $\pi'=2\prod_{n=3}^{\infty} f(n)$ とおく．円の半径を r とすると，このとき，円周の長さは $2\pi' r$ ，円の面積は $\pi' r^2$ で求められる．この π' を用いて角の大きさ x_N を再定義し，それによって $\sin x_N < x_N < \tan x_N$ を得る.

ウ 数学的才能者 Y の知的能力

Y は高 1 以降，科学オリンピックに参加し以下の成績を修めた.

① 地学オリンピック 予選を突破し，合宿の参加権を得る（参加せず）（高校 1 年）.

② 数学オリンピック 予選・本選を突破し，合宿の参加権を得る（参加）（高校 1 年）.

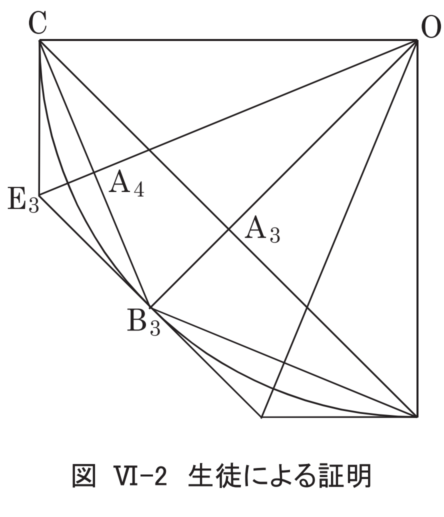


図 Ⅵ-2 生徒による証明

③ 物理オリンピック　レポート提出・筆記試験を突破し，合宿の参加権を得る（参加）（高校 2 年）.

④ 数理の翼大川セミナー参加（高校 2 年）.

②の実績から Y は，Ⅵ-２(1)に記した数学的才能者と認定できる.

エ 数学的才能者 Y が回避策を完成させるまでの過程

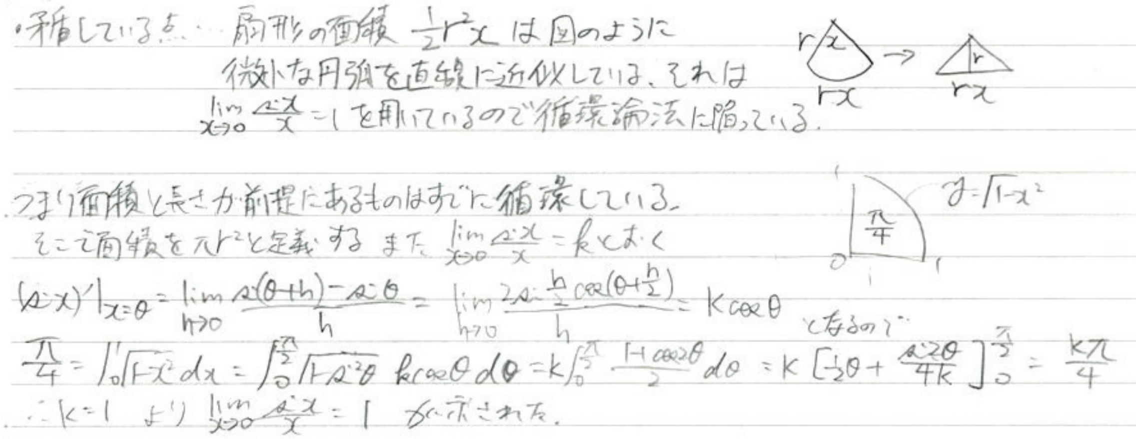
Y は高 2 のときから精力的にこの問題に取り組み，循環論法の回避策を発見した.

回避策のレポートがはじめて提出されてから，論理的に不十分なところなどを修正のため，教師（筆者）との数回のやり取りを経て完成稿となった．長期間（3 ヶ月程度），大分量（A4 用紙で 5 枚）の証明となったが，3 ヶ月の期間というのは，筆者とのやり取りを含めている．また，電車の中，歩きながらなど，常に考えていたと述べている.

① 数学的才能者 Y の提示したレポート第 1 稿と修正指示

Y は 2010 年 10 月の問題提示を受けて，試行錯誤の結果次の（ア）の状態になり，図Ⅵ-3 に示す第 1 稿を提出した．以下，Y の思考過程は（ア），（イ），…で表す．所要時間は（ ）内で示す.

（ア）面積か長さをどちらか一方から定義してみたが，もう一方を求めるときに循環にはまってしまった.（延べ 8 時間）



・矛盾している点… 扇形の面積 $\frac{1}{2}r^2x$ は図のように
微小な円弧を直線に近似している。それは
$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ を用いているので循環論法に陥っている。

∴つまり面積と長さが前提にあるものはすでに循環している。
そこで面積を πr^2 と定義する また $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=k$ とおく

$(\sin x)'|_{x=\theta}=\lim_{h\to0}\frac{\sin(\theta+h)-\sin\theta}{h}=\lim_{h\to0}\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos(\theta+\frac{h}{2})}{h}=k\cos\theta$ となるので

$\frac{\pi}{4}=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\,k\cos\theta\,d\theta=k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta=k\left[\frac{1}{2}\theta+\frac{\sin2\theta}{4k}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{k\pi}{4}$

∴ $k=1$ より $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ が示された。

図 Ⅵ-3 数学的才能者 Y の第 1 稿

問題点　第 1 稿には次の問題点がある.

・$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$ が極限値をもつことは明らかでない.

・$\cos 2\theta$ を積分する際に $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$を用いている.

以上の問題点を踏まえ，Y は以下の考察をした.

（イ）三角関数の微分はすべて循環に陥る.

（ウ）「$\sin x$」を用いると，これは一周の長さを 2π としたラジアンで定義されているため，長さを定義したという前提になるので困難であると思った.（以上延べ 16 時間）

② 数学的才能者 Y の提示したレポート第 2 稿と修正指示

以上の考察を踏まえ,再提出されたものが**図Ⅵ-4**に示した第2稿である.改善点として,次の事柄が挙げられる.

（エ）三角関数をもち出さず，かつ，円の面積と円周の長さをはじめから定義せず，あとで定義しようと考えた（延べ 6 時間）.

（オ）円に内接・外接する正 2^n 角形と,「三角関数の代わりとなる関数 $f(n)$」をそれぞれ定義し，$n\to\infty$ のときの極限を調べた．（次項目と合わせて，延べ 12 時間）

（カ）内接・外接正 2^n 角形の周の長さと面積が，それぞれ同じ値になり，はさみうちの原理で円周の長さを定義した.

問題点　第 2 稿では，Y の定義した関数 $f(n)$の無限積 $\pi' = 2\prod_{n=3}^{\infty} f(n)$ が，有限確定値であることが示されていなかったため，その証明を指示した.

③ 数学的才能者 Y の提示したレポート第 3 稿と修正指示

第 3 稿において $\pi' = 2\prod_{n=3}^{\infty} f(n)$ が上に有界で単調増加であることを次の要領で示した.

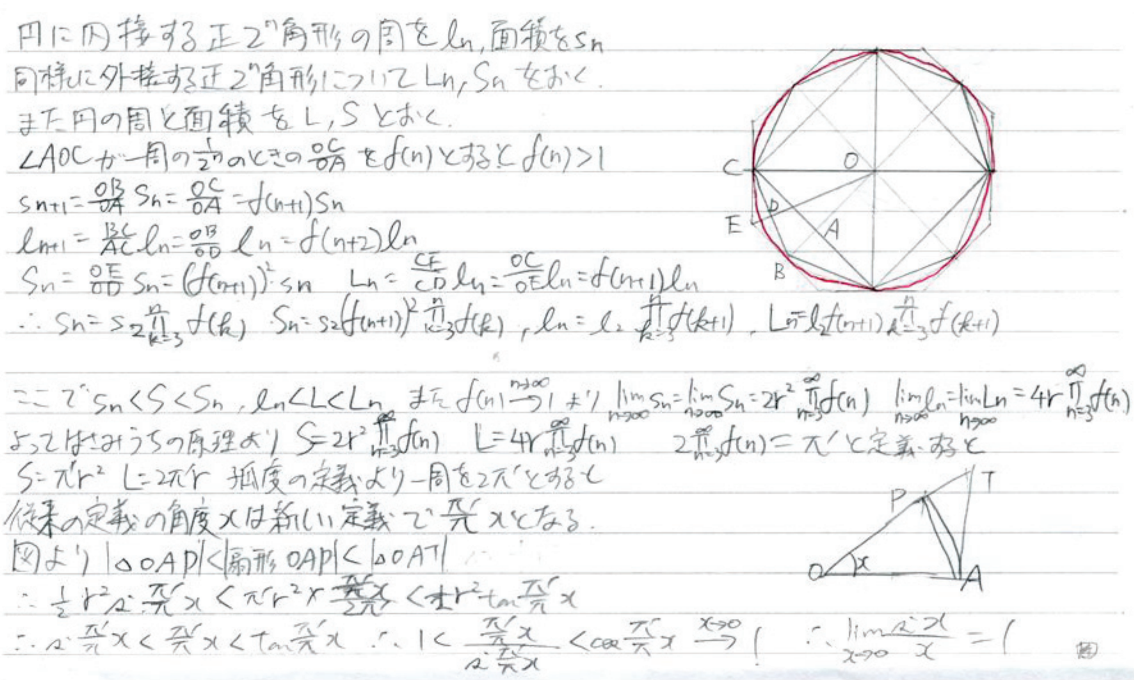

円に内接する正2^n角形の周をl_n，面積をs_n
同様に外接する正2^n角形についてL_n, S_nをおく.
また円の周と面積を L, S とおく.
∠AOC が一周の$\frac{1}{2^n}$のときの$\frac{OC}{OA}$を$f(n)$とすると$f(n)>1$
$s_{n+1} = \frac{OB}{OA} s_n = \frac{OC}{OA} = f(n+1)s_n$
$l_{n+1} = \frac{BC}{AC} l_n = \frac{OB}{OD} l_n = f(n+2) l_n$
$S_n = \frac{OE}{OD} s_n = (f(n+1))^2 s_n$　$L_n = \frac{CE}{CD} l_n = \frac{OC}{OE} l_n = f(n+1) l_n$
∴ $s_n = s_2\prod_{k=3}^{n} f(k)$　$S_n = s_2 (f(n+1))^2 \prod_{k=3}^{n} f(k)$, $l_n = l_2 \prod_{k=3}^{n} f(k+1)$, $L_n = l_2 f(n+1) \prod_{k=3}^{n} f(k+1)$
ここで$s_n<S<S_n$, $l_n<L<L_n$ また$f(n)\xrightarrow{n\to\infty}1$より $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = 2r^2\prod_{n=3}^{\infty} f(n)$　$\lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{n\to\infty} L_n = 4r \prod_{n=3}^{\infty} f(n)$
よってはさみうちの原理より $S=2r^2\prod_{n=3}^{\infty} f(n)$　$L=4r\prod_{n=3}^{\infty} f(n)$　$2\prod_{n=3}^{\infty} f(n) = \pi'$と定義すると
$S=\pi' r^2$　$L=2\pi' r$　弧度の定義より一周を$2\pi'$とすると
従来の定義の角度xは新しい定義で$\frac{\pi'}{\pi}x$となる.
図より$|\triangle OAP|<|扇形OAP|<|\triangle OAT|$
∴ $\frac{1}{2} r^2 \sin\frac{\pi'}{\pi}x < \pi' r^2 \times \frac{\frac{\pi'}{\pi}x}{2\pi'} < \frac{1}{2} r^2 \tan\frac{\pi'}{\pi}x$
∴ $\sin\frac{\pi'}{\pi}x < \frac{\pi'}{\pi}x < \tan\frac{\pi'}{\pi}x$　∴ $1<\frac{\frac{\pi'}{\pi}x}{\sin\frac{\pi'}{\pi}x} < \cos\frac{\pi'}{\pi}x \xrightarrow{x\to 0} 1$　∴ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$　図

図 Ⅵ-4 数学的才能者 Y の第 2 稿

（キ）$f(n)$の満たす漸化式，相加・相乗平均，無限級数などの考え方を駆使して有界であることが示せた.

（ク）無理式が入っていたので，計算が容易でなく不等式による評価が必要だった.

（ケ）$f(n+1)<f(n)^{\frac{1}{4}}$を発見してからはすぐにできた.（以上，延べ 3 時間）

問題点　第 3 稿はほぼ完成稿の形であったが，$f(n)\to 1$（$n\to\infty$）を証明する際に，OA＝1 と仮定して，$A_n C\to 0$（$n\to\infty$）を示した．$OA_n=1$ と仮定すると n の値によって，円の半径の大きさが変わるので $A_n C\to 0$ ($n\to\infty$) が自明ではない．この点を教師（筆者）が指摘し改善を指示した.

④ 数学的才能者 Y の提示した完成稿

以上の過程を経て完成稿を 2011 年 4 月 26 日付で「初等数学」誌に投稿した.

完成稿で修正された部分は $f(n)\to 1$（$n\to\infty$）の証明である．これについて，以下の過程を踏んだ.

（コ）もとを辿れば$f(n)\to 1 \Leftrightarrow 1/\cos\theta$ なので，容易に修正できるとは思っていた.

（サ）θ は使えないので表現に困っていた．少々長い証明になりそうだと思った.（以上，延べ 2 時間）

また，レポートを書く作業を通じて，次のような感想を述べている.

「高 2 のときにはあまり論理的思考がなく，円周より外接多角形の周の方が長いことを当たり前のように使ってしまったり，論理にしばしば破綻があって先生に何回か指摘されたが，今では自分の力だけで論理を展開できるようになった.」

オ 数学的才能者Ｙの思考過程の分析

Ｙが回避策を完成させるまでの過程（ア）～（サ），およびⅥ-３(1)エの下線部分から，Ｙは

- 普通より優れた能力
- 課題への傾倒

および

- 高い集中力
- 持続的な知的努力

をもっていることがわかる．

前者は，［Renzulli 78］の示した才能の三輪概念のうちの２つである．

後者は，［Andrews 09］の言う才能者の基本的特性の１つである「高度な集中力」，［Dąbrowski 77］のいう知性的過度激動の１つである「持続的な知的努力」にあたると推定できる．

さらに，（ア）～（サ）の思考過程を通して，随所に強い「問題解決」志向，「分析的思考」がうかがえ，Ｙは知性的過度激動のうちこの２つをもつと思われる．

以上をまとめると，Ｙは

［Renzulli 78］の才能の三輪概念のうち

- 普通より優れた能力
- 課題への傾倒

［Andrews 09］の才能者の基本的特性のうち

- 高い集中力

［Dąbrowski 77］の知性的過度激動のうち

・持続的な知的努力

・問題解決

・分析的思考

をもつことが確認された．

(2) 授業の効果に関する検討

ア 生徒に提示した証明・アイデア等の概略

2011 年 7 月下旬，完成稿を含む複数の回避策（循環しない正しい証明）を高 3 の理系に進級した生徒 111 人のうち希望者 47 人（高学力者）に対して授業の形態で提示し，授業後，アンケートを実施した（次項）．生徒に提示した証明・アイデア等について概略を示しておく．

回避策 1，2，3 は正しい証明で，アイデア 1，2 は何らかの問題を含み，証明にはなっていないものである．授業の構成上生徒には， 回避策 1，2，アイデア 1，2，回避策 3 の順に提示した．回避策 3 が Y の示した完成稿である．

① 回避策 1（曲線の長さ）

円周を表す関数をその y 座標をパラメータとして表し，被積分関数が単調増加であることを利用して式を評価する，それを用いて $\sin x < x < \tan x$ を導く［松本 11］.

② 回避策 2（Hardy の方法）

単位円の面積を π とし，扇形の面積が $x/2$ のとき，その中心角の大きさを x と定義することによって $\sin x < x < \tan x$ を導く．この定義が well-defined であることも確かめられる［Hardy 93］.

③ アイデア 1（マクローリン展開）

$\sin x$ をマクローリン展開し，その両辺を x で割って $x \to 0$ とするというものであるが，これは循環している（$\sin x$ を微分する際 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ を用いている）．$\sin x$ をマクローリン展開された級数で定義するというものもあるが，項別の極限をとってよいかな

どの問題点がある．

④ アイデア 2（接線の傾き）

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ は曲線 $y=\sin x$ の $x=0$ における接線の傾きと考えることができる．度数法ではこの値が約 0.017 である．この値が 1 になるような新たな角の大きさを定義するというもの．これは $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ と定義しようということである［平田 99］.

⑤ 回避策 3（π の再定義）（Y の完成稿）

Ⅵ-３(1)イに記載した.

表 Ⅵ-4 回避策を理解した人数

	理解	不理解	不明
回避策 1	25	7	3
%	71.4	20.0	8.6
回避策 2	24	6	5
%	68.6	17.1	14.3
アイデア 1	34	1	0
%	97.1	2.9	0.0
アイデア 2	24	8	3
%	68.6	22.8	8.6
回避策 3	25	5	5
%	71.4	14.3	14.3

表 Ⅵ-5 理解者数の重なり

ひとつも理解していない	2
回避策 1 のみ理解	3
回避策 2 のみ理解	2
回避策 3 のみ理解	0
回避策 1 と回避策 2 のみ理解	3
回避策 2 と回避策 3 のみ理解	6
回避策 3 と回避策 1 のみ理解	6
回避策 1，2，3 すべてを理解	13

イ 高学力者への調査

本項で実施したアンケートの質問項目の内容は次の通りである．①，②，③，⑥が多肢選択式，④，⑤，⑦，⑧が記述式である．

① 高校 2 年で問題を提示されたとき興味をもったか.
② 高校 2 年で問題を提示されたとき，循環に気づいたか.
③ 回避策を理解したか.
④ 論理の見方・考え方は変わったか.
⑤ 数学の見方・考え方は変わったか.
⑥ 受験生という立場を忘れて，探求問題と入試問題のどちらに興味をもつか.
⑦ 授業を聞いて気づいたことはあるか.
⑧ 授業の感想.

⑥の探求問題というのは，前項で扱っている $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ の証明，および，それに伴う π の再構成等のことである．希望者 47 人のうち 35 人の回答を得た．

ウ アンケート（多肢選択方式）の結果と分析

①，②，⑥の結果は割愛した．③の回避策を理解したか，のアンケート結果を表Ⅵ-4 に記す．

さらに，回避策 1，2，3 の理解者数の重なり具合は表Ⅵ-5，図Ⅵ-5 の通りである．

表Ⅵ-4 から生徒たちの回避策 3 の理解度は, 回避策 1 や回避策 2 の理解度と同等である．

ところで，回避策 1，2，3 を理解した生徒たちのうち，回避策 3 のみを理解した者は 0 人であるので図Ⅵ-5 のベン図を書くことができる. このことから推定できることの 1 つは, Y の回避策 3 が特殊ではなく妥当な証明だということである．なぜならば，回避策 3 の特殊性が高いほど，同避策 3 のみの理解者数が多くなると推定できるからである．

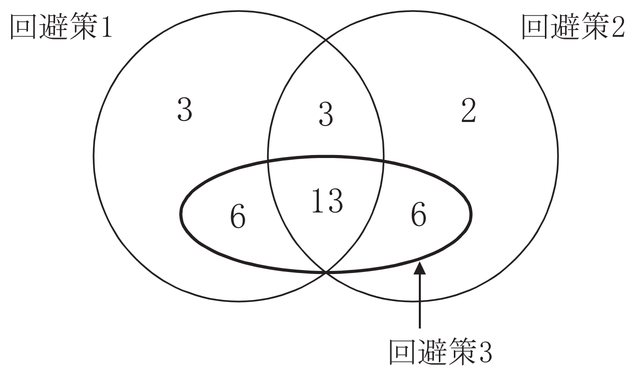


図 Ⅴ-5 理解者数の重なり (1)

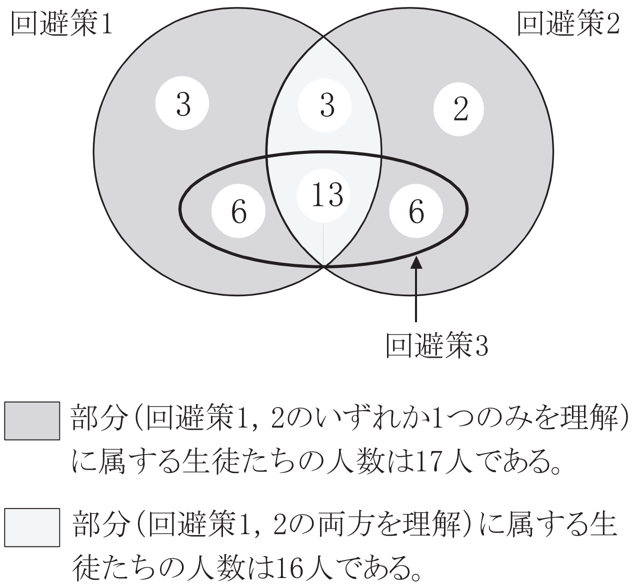


図 Ⅵ-6 理解者数の重なり (2)

回避策 1，2 は以前からある証明であるが，この 2 つだけに目を向けると，**図Ⅵ-6** の濃い網掛け部分のように 1 つの証明しか理解できない生徒たちが 17 人いたことになる．このとき，回避策 1，2 の両方を理解していた生徒たちは 16 人であった．これに回避策 3 が加わることで，**図Ⅵ-7** のように回避策 1，2，3 のうち 1 つしか理解していない生徒たちは 5 人だけになる．その一方， 2 つ以上を理解した生徒たちは 28 人にのぼる．複数の解法を理解することは，一般的に数学の学習を深化させることになり，回避策 3 の存在は，生徒たちの数学の学習の深化に寄与していると考えられる．

エ アンケート（記述式） の結果と分析

生徒に対して実施したアンケート項目のうち④，⑤，⑦，⑧は記述式であり（Ⅵ-３(2)イ），延べ 81 個の意見が寄せられた，以下に代表的な意見を記す．（ ）内は同様の意見の延べ人数である．

・数学の厳密さを再認識することができた．(8)
・学問としての深い数学の片鱗を見た気がした．(23)
・数学は作るものだと感じた．証明のアプローチの多様さに驚いた．(12)
・自ら新たに定義し直し，証明していくという方法があることに驚いた．(12)
・数学者たちのアイデアを知ったり Y 君の証明過程を知ることで感動できたと思う．自分も何かひとつ自然科学について思考を深めたい．(12)
・論理がますます大事というか基本というか．私は数学者には 200%向いていないと確信した（悪い意味ではないです）．(4)

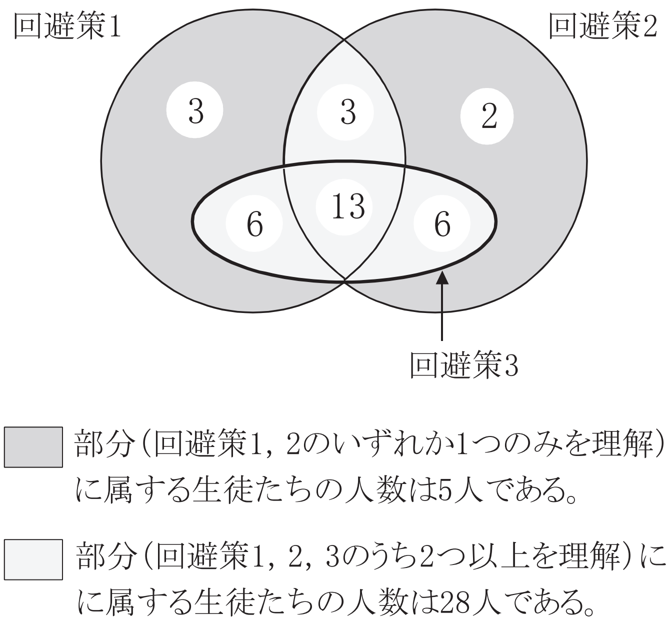


図 Ⅵ-7 理解者数の重なり (3)

それまで生徒たちは数学に対して，与えられた問題を解くものというイメージをもっていたのだが，数学的才能者とともに，その思考を共有することで「学問としての数学」，「数

学は作るもの，再定義可能なもの」であることを知った．そして，それらが生徒たちに向上心を与えていることが読み取れる．

以上から数学的才能者が教室に存在し，高学力者とともに学習することによって，生徒たちは，数学に対する発見・気づき・感動を教室で共有できると考えられる，

また，数学科への適性について考える機会を得ることは，進学を控えた生徒にとってはよい方向に作用しているように思われる．

オ VI－３(1)(2)のまとめ

VI－３(1)オで示したように，［Renzulli 78］の才能の三輪概念，［Andrews 09］の才能者の基本的特性，［Dąbrowski 77］の知性的過度激動が数学的才能者においても確認された．すなわち，数学的才能者が「高度な集中力」をもち，「持続的な知的努力」ができること，さらに知性的過度激動のうち「問題解決」，「分析的思考」をもつことが，Y の思考過程で確認できた．

VI－３(2)ウおよび**VI－３(2)エ**で示したように，数学的才能者の回避策 3 が，高学力者の学習の深化を促していると考えられる点，高学力者の数学に関するイメージを変え，向上心を与えている点から，数学的才能者の思考を授業に取り入れることについては成功したと言える．数学的才能者の思考を授業に用いた先行研究はなく，その点で前項，本項には独自性があると思われる．さらに，**VI－３(2)エ**から高学力者は，数学的才能者の才能を知ることで，自分の可能性についても示唆を得ており，適性について考える機会になりうると思われる．

(3) 数学的才能者と高学力者の相互作用

前項で，数学的才能者が教室に与える影響を考察した．本項では，教室が数学的才能者に与える影響について検討する．

数学的才能者の思考を教室で共有することで，高学力者の理解を深化させたと考えられるが，一方，高学力者が数学的才能者によい影響を与えていることもわかった．2011 年 7 月下旬から段階的に計 6 時間程度のインタビューを数学的才能者 Y に対して行った．その結果，Y については，モチベーションを与える要素が大きく分けて 2 つあることがわかった．1 つは数学オリンピックへの参加とそれに付随して行われた本選合格者の合宿による

刺激である．もう１つは，Ｙの所属する学校における刺激である．

まず，数学オリンピックから得られた刺激を列挙する．

・高校の図書館で数学オリンピックの問題を読み，自分でもできそうだと感じた．
・その結果,数学オリンピックをきっかけに「世界に出たい」と考えるようになった．
・本選に合格し,世界大会出場者選抜のための合宿に参加したが，議論についていけず衝撃を受けた．合宿参加者に勝ちたいと思い，それが刺激となり，モチベーションが上がった．

次に在籍する高校から受けた刺激・モチベーションを確認する．それらは，友人から受けたものと教師から受けたものに分けられる．

ア 友人から受けた刺激・モチベーション

① 競争から受けたモチベーション

・同レベルの生徒が集まっていることに刺激を受けた．
・全教科にわたり校内トップレベルの生徒がおり，刺激を受けた（自分が負ける分野をもっている生徒がいることで刺激を受けた）．
・数学以外の科目でも刺激を受けた（例えば英語のディベート世界大会に出場する生徒に刺激を受けた）．
・他の生徒たちとの競争・比較で向上心が高まった．
・ダントツを目指すことで常に刺激を受けた．
・「数学・物理」は自分が１番になりたいという欲求があった．

② 理解されることで受けた刺激・モチベーション

・一緒に考えてくれる生徒の存在が向上心を与えてくれた．
・自分の考えを理解してくれる生徒の存在が向上心を与えてくれた．

イ 教師から受けた刺激・モチベーション

① 評価から受けたモチベーション

- 学校の数学の授業の問題を一般化・抽象化・拡張し，教員に見てもらうことで向上心が高まった.
- 数学の自分の成果を授業で紹介され，他の生徒たちに賞賛されることで向上心が高まった.
- 数学の授業でタイムプレッシャーを受けることで向上心が高まった.

② 理解されることで受けた刺激・モチベーション

- 一緒に考えてくれる教員の存在が向上心を与えてくれた.
- 自分の考えを理解してくれる生徒の存在が向上心を与えてくれた.

そして，数学オリンピックの世界大会出場者選抜のための合宿に参加したが，議論についていけず衝撃を受けたことよりも,校内において全教科にわたりトップレベルの生徒(自分が負ける分野をもっている生徒）に受ける刺激のほうが強いと語っている．また，自分とレベルの近い生徒集団に身を置くことも強い刺激になるとも述べている．これは数学オリンピックよりも彼の所属する学校およびそれに付随する友人関係，集団教育が数学的才能者Yに刺激とモチベーションを与えていることを意味する.すなわち,数学的才能者と高学力者は，どちらか一方が刺激・影響を与えているのではなく双方向にお互いが刺激を受け合い，影響を与え合っているということである．才能者が一般的な学校に馴染めない事例が報告されているが，高学力者の集団の中では，数学的才能者はその才能を活かしきれている．このことは数学的才能者の思考やその卓抜性を理解しうる高学力者との共存があって成立することであり，高学力者との集団教育が数学的才能者の学習を深化させていると考えられる．つまり，数学的才能者を含む高学力者の集団教育が，互いに相乗効果を与え，それぞれの学習の深化を促していると考えられる.

(4) 高学力者の中学生に対する論理指導実践の事例

中学校・高等学校に勤務して数年経った頃,「自分が書いたこの証明は正しいですか．見てください」という生徒たちの存在に気付くようになった．本来証明とは，ある数学的主

張に対して真偽の結論を下したものの はずであるから，証明が正しいかどうかという議論が教育現場で（できるだけ）起こらないのが理想である．筆者は生徒たちのその疑問が，根拠をしっかりと掴みきっていないことから生じると推定した．思考のステップの度に，いま下した判断の根拠は何か，ということを考える習慣をつけることで，先のような事例は減少すると考えた．生徒らが中学の初年級のうちに根拠を常に意識するよう指導し，論理的思考を身につけることで 6 年間の数学学習はより高いところまで到達し，より緻密な議論ができると考えられる．具体的には，循環論法のような論理的欠陥に注意が向き，それらを見逃さないようになると予想される．

この試みを 2002 年度から 2005 年度にかけて，中学 1 年生と中学 2 年生をもち上がりで 2 回担当した折に，幾何を教材として取り組んだ結果をまとめたものである．

ア 「正しさ」の概念

筆者は，中学 1 年次を担当する際，はじめの時間に「地球が丸い（球体）ことを説明せよ」という問題を出している．

①「港に戻ってくる帆船の帆から先に見えるから」

②「地球上のどこからスタートしても元の場所に戻れるから」

といった意見が次々に出てくるが，それらを例えば「地球が円柱の形だとしても成り立つね」などと反駁して，できるだけやわらかい表現で論破していく．正しい事柄であっても，それを説明できない限り，その事実は存在しないのと同じである．生徒らは，論証し自分以外の人々に納得してもらうことが容易でないことを体験する．また，そのような「人を納得させる」ことに興味をもってもらうことを狙っている．

次の段階は，「君はいま，崖の上に立っている．もし，地球が丸くなく，どこまでも真平らだとしたら水平線は見えるか」という問題について議論する．しばらくは混乱するが，そのうち，「そもそも水平線とは何か」と言い出す生徒が現れるので，水平線の定義を皆で考える（まだ「定義」という術語は使わない）．水平線とは，空と海の境界線のことである，という結論になるが，境界線とは何か，と更に深まることもある．教室は，水平線が見えると主張する生徒たちと，見えないと主張する生徒たちでほぼ等分される．授業も終わり

に近づこうとする頃,「海面と平行な平面で，目の高さにあるものを考える．その平面より上を見ると空しか見えず，下を見ると海しか見えないから水平線は見える」と言う生徒が各クラスに現れる．興味深いのは，このような意見が出てもなお，水平線が見えないという生徒たちが一定数残ることである[xxiii]．実際には確かめられないことを，理屈だけで判断する練習とその体験を目的として行っている[xxiv].

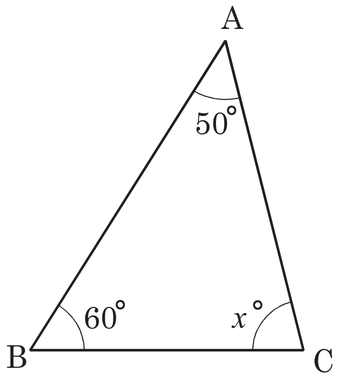


図 VI-8 三角形の内角

上記のような体験を通して，生徒は論理的に思考することに馴染んでいく．この後「数学」の授業に入っていくのだが，はじめに考えるのは「三角形の内角の和は 180° である」ことの証明である．

生徒にはまず,「図VI-8 の三角形の角の大きさ x を求めよ」と出題する．

「70°」とすぐ返ってくるが,「どうして 70° と分かるのか？」と問うと,「底辺 BC と平行な線を頂点 A から引けば分かります」,「それはなぜ？」,「平行線の錯角は等しいから」,「それはなぜ？」,「……」

そこで,「正しいからには説明できるでしょう？」と水を向けると,「そんなことしていたら，説明にキリが無くなってしまいます」という生徒が何人か現れる．これが公理を導入するための伏線になる．この命題は，小学生でもよく知っているものであるが，小学校の教科書に掲載されている「説明」は，三角形の 3 つの角を切り取って張り合わせると一

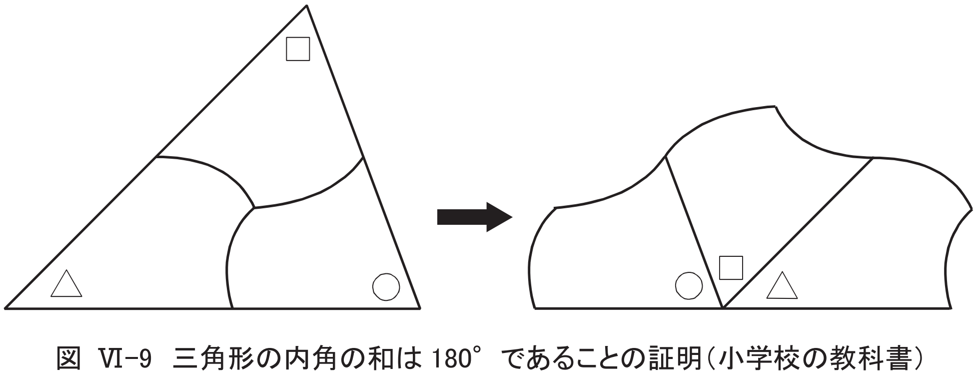


図 VI-9 三角形の内角の和は 180° であることの証明（小学校の教科書）

直線になる，というものである（図Ⅵ-9）.

入学当初は，この説明に疑いをもつ者は少ないのであるが，「人を納得させる」説明を意識するようになると，この説明に一般性がないということに気付くようになる.

生徒は「大岡裁き」については概ね知っているようである．幼児の母親を名乗る女が 2 人現れる．大岡越前は 2 人の女に幼児の腕を引っ張らせ，幼児を手許に引き寄せた方が本当の母親だと宣言する．だが実際は，腕が痛いと泣き叫ぶ幼児の声に，思わず手を離した女こそが本当の母親だと裁定するのである．生徒達をいくつかのグループに分けて，この裁定は妥当か議論してもらう．議論が熱を帯びてきた頃に

① 大岡が判断のための前提にした事柄は何か
② 大岡の判断の前提を変えるとどうなるか

と問いかける.

① 大岡の判断の前提は，「子供が痛がっていることを不憫に思う者こそが母親である」ということである.
② 大岡の判断の前提を，「本当の母親とは，子供の腕がちぎれてしまっても，自分の手許において愛情を注ぐ者である」と変えると，手を離さなかった方が本当の母親ということになる.

さらに，「日本にこれ以上高速道路を造ることはよいことか」と出題する．大岡裁きを経ているので，日本の未来の為に

経済発展こそ重要 ⇒ 造るのはよい
自然保護こそ重要 ⇒ 造るのはよくない

のような意見が出てくる．これらの議論を通して，

・「正しい」ことを判断するためには，前提が必要

・前提によって結論は変わる

ということを体得する．つまり「正しい」という判断は本来，非常に脆いものであって，絶対的なものではないことを学ぶのである．

イ 論理的な思考

先の命題

(P) 三角形の内角の和は 180°である

を次のように示した生徒がいた．

上の図Ⅵ-10 のように△ABC の内部に点 D をおく．

△ABC の内角の和
＝△ABD の内角の和
＋△BCD の内角の和
＋△CAD の内角の和
－($\angle a+\angle b+\angle c$)

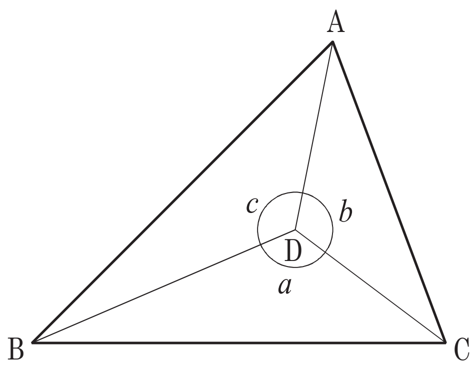


図 Ⅵ-10 命題(P)の証明

つまり，

三角形の内角の和
＝三角形の内角の和×3－360°

よって，

三角形の内角の和×2＝360°　　∴ 三角形の内角の和＝180°

この証明の根拠には

① 1 回転の角度は 360°

② すべての三角形の内角の和は同じ
　（＝一定）

を使っている．根拠②はどのように導出されるのか.

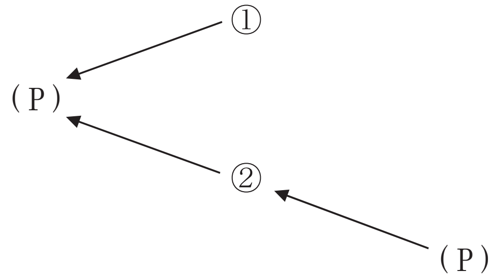


図 Ⅵ-11 循環論法の発見

③ 目標である(P)から導き出される

④ (P)とは関係なく，単独に導き出される

⑤ 証明の必要のない前提（と万人が認めている）

生徒達は，③であることはすぐに理解するのだが，この授業以降，次のような図（図Ⅵ-11）を書くよう指導する．論理の循環が一目でわかり，根拠をはっきりさせることができるからである［佐々木 00］.

後述するが，実際の授業ではいろいろな問題にあたりながら，日本語を正しく使い，日本語で考えることを練習する．公理の選定は 2 学期以降で行うが，先にこの部分について述べる.

角 C の大きさ x を求める問題と大岡裁きについて，再度触れ，「正しい」と結論づけるためには前提が必要で，それをわれわれが定めなければならないことを確認する．グループ学習のスタイルにすると，大体生徒から上記のことは提案される．公理の選定については，生徒主導であると彼らが感じるように誘導するが，次の 4 つを選定する.

Ⅰ 異なる 2 点を通る直線はただ 1 つ引ける

Ⅱ 交わる 2 直線はただ 1 点で交わる

Ⅲ 直線上にない 1 点を通って，この直線に平行な直線がただ 1 つ引ける

Ⅳ 図形はその大きさと形を変えないで，位置を変えることができる

実際はⅠ，Ⅱは同値であるが，この時点では気付く生徒はほとんどいない（後で生徒達に証明をしてもらうこともあるし，定期試験に出題する場合もある）．

また，Ⅳは数学的には全く意味を成さないが，そのことに気付く生徒はいないので，「教育的配慮」を優先して採用している［寺坂 92］．

論理的な思考をするために，以下の 7 つの事柄に注意をしながら授業を進める．

① 定義

言葉の意味を一意的にしておく．これは定義を与えるということであるが，無定義術語についても触れなければならない．ただ，公理を定めることの必要性を生徒は理解しているので，この点は問題なく進められる．何らかの論証をする際，生徒に次々に根拠を聞いて行ったように，定義に含まれる術後についても，その意味を問うていく．

定義 A → 定義 A に含まれる術語 B の定義は？
→ 定義 B に含まれる術語 C の定義は？
→ ……
→ 無定義術語

② 排中律

A でも「not A」でもないものは存在しない「not A」は A の否定と約束するが，否定については⑥の項目であらためて述べる．

③ 命題

「真」または「偽」が確定できる叙述，と約束するが，与えられた文が命題か否か判断するために，多少の練習が必要である．

④ 三段論法

推論の仕方で最も簡単なものだが,「偽」の三段論法を見抜く練習することで，感覚的・直観的な判断から「理屈でものを考える」ことへの転換になる．

⑤ 日常にある非論理性

曽野綾子の著作『太郎物語』に次のような一節がある.

「顔のいい人は，スタイルも悪くないよ」
「それはまちがい」父は言った.
「木村の小母さん，戸田の小母さんを見てごらん．顔はずいぶんまずいが，スタイルはかなりいいぞ」
「そらあまあ，そうだけど」

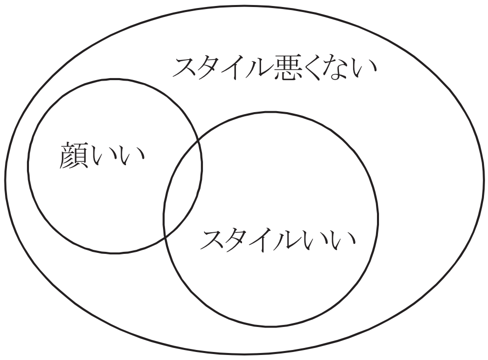


図 VI-12 会話の正しさ

父の発言は，太郎の発言を否定するものにはなっていない（図VI-12）．日常にあるこのような例は，生徒のモチベーションと理解の向上に役立つので，具体例の収集，教材研究は重要である.

次のような問題も同様に，高いモチベーションで取り組める問題である（実際の問題は，もっと中学生に分かりやすい表現にしてある）．松川事件の第 1 回上告審で，ある裁判官が次のような発言をした.

「多数意見は，証言に矛盾があるから信憑性なしとしている．この論法でいうと，矛盾のない証言は信じなければならなくなるではないか」

この裁判官は，論理的な思考をしていると言えるか［森 91］.

⑥ 否定文を作る練習

(a)「ある」と「すべて」の否定

例題「すべての星は赤い」の否定文を作れ

「(少なくとも 1 つは）赤くない星がある」などが答えの 1 つであるが，これは，す

ぐにできるようになる．

(b) 全否定と部分否定の区別

ここは難関である．［細井 85］によると，次の問題は大学生でも意見が分かれるようだ．数学に馴染むと，「白白白」以外の 3 つは可能性がある，と判断をするのが自然に思えるが，そのように答えたのは大学 1 年生の 7.9%に過ぎず，上のような解釈は，数学の方言とも言えるような状況である．

石は黒か白だとする．ここに石が 3 つある．このとき，すべての石が白とは限らないが，

黒黒黒，黒黒白，黒白白，白白白

のどれを表しているか．

われわれには当面，文学的な表現は必要ないし，まずは正しく日本語を使うことを優先するべきであるから，日本語として意味が通じるよう，(かなりくどくなることもあるが) 言い換えたり，言葉を足したりするなどの練習をする．

a，b，c はすべて白くない

という文は，全否定の場合

a，b，c は 3 つとも白くない

部分否定の場合

a，b，c の中に白くないものがある

などと言い換えるのである．

⑦ 日本語の正しい使用

(a) すべての男に対して馬の合う女がいる（2 通りの解釈）

論理記号を使えば「∀男∃女……」の場合と「∃女∀男……」の場合がある．

(b) 白い猫はよく飼い主に馴染む（2 通りの解釈）

これは生徒が見つけてきた例であり，次の 2 通りの解釈ができる．

・「白い猫は良い猫で，しかも飼い主に馴染む」

・「白い猫は，飼い主に馴染みやすい」

(c) 東芝，4 年連続 8 強のがす（2 通りの解釈）

これは，ある新聞の見出しであり，次の 2 通りの解釈ができる．

・「過去 3 年とも 8 強に入っていたが，4 年目はのがした」

・「過去 3 年とも 8 強をのがしており，4 年目も 8 強をのがした」

ここにも日常に潜むあいまいさが隠れている．

ウ 論理指導の効果

問題　直線を 1 本引いて，下の図形（**図Ⅵ-13**）の面積を 2 等分せよ．

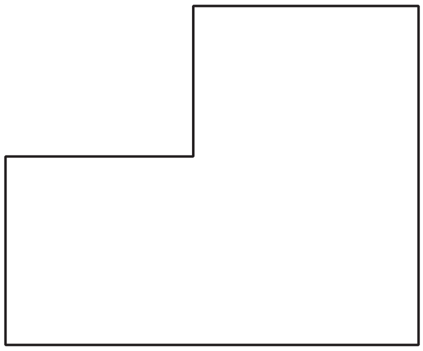


図 Ⅵ-13 面積の当分割

生徒が問題を解く際，必ず根拠を明らかにさせる．下の**図Ⅵ-14** のように，根拠を明示していく．

公理までたどり着けば証明終わりである［佐々木 00］．このような練習を経た後，代表的な事実，定理を証明していく．定理には通し番号をつけ，上図が「絵」ではなく，記号で作れるように指導していく．さらにこれを一般化して**図Ⅵ-15** のようなチャートが作れるようなると，論証にかなりの自信がもてるようになる．

上に示したようなチャート（**図Ⅵ-15**）を書くことは，常に根拠を意識するという点でかなり有効な手段である．しかし一方，定理の度に書かせるのは生徒にとって面倒な作業でもあり，最初の 20 題程度で十分である．この部分は，常日頃から根拠は何か問い続ける姿勢が作れればよいので，証明を 1 行書く度に，「この根拠は何か」と自問するよう指導する．

Ⅵ-３(4)ウ⑥の否定文を作る練習は，やり過ぎるとかえって迷宮に入ってしまうこともある．否定文が原因で生徒が困った状況にあるときに触れる程度でもよいかも知れない．

生徒は論理的思考を身につけたのか 2005 年度に中学 2 年生を担当したのち，その生徒たちを高校 2 年生・3 年生として再度担当した（2008 年度・2009 年度）．

高校 2 年次では $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ の証明を学ぶ. 教科書では扇形の面積をもち出すのだが, 扇形の面積は円の面積から求めている．そして円の面積は（彼らが小学校で学んだ説明では）$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を用いて求めているわけで，論理が循環している．この点に関しては過半数の生徒が気付いた．また,「$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を，ロピタルの定理を用いて示すのは是

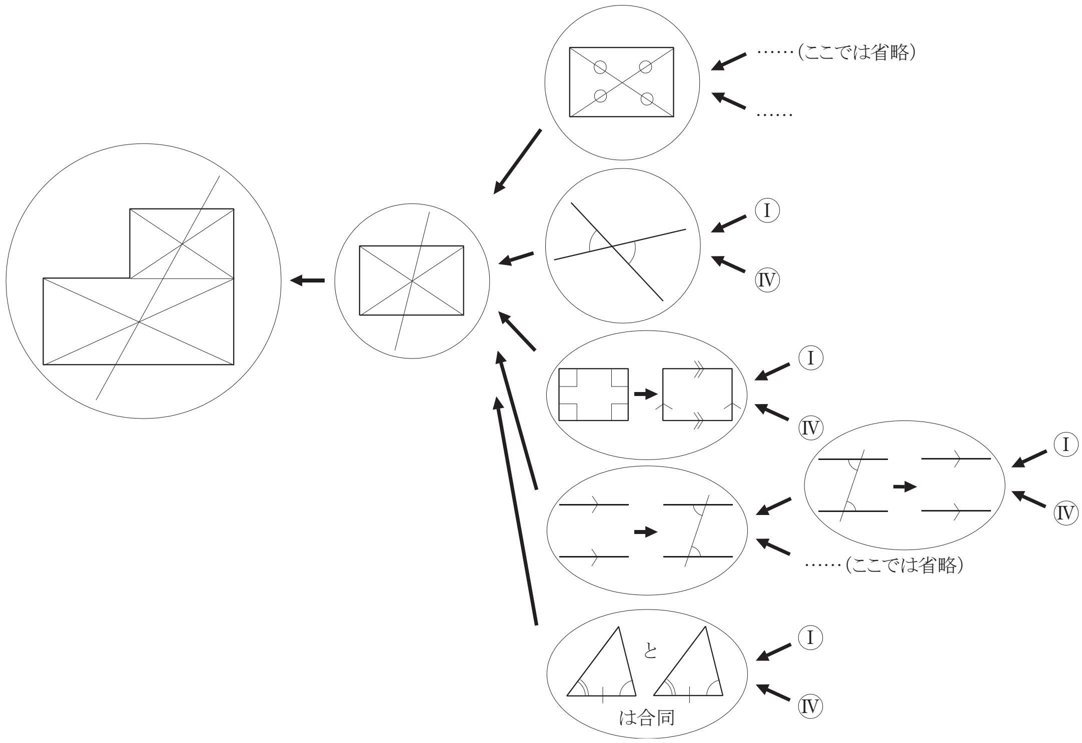


図 Ⅵ-14 明確な根拠

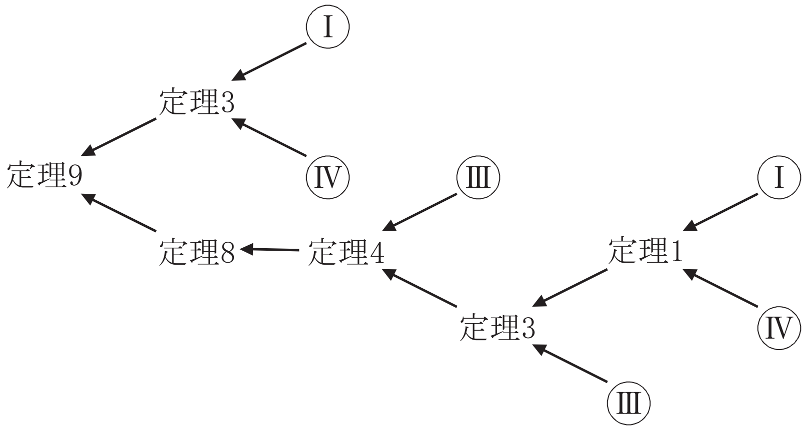


図 Ⅵ-15 証明の進め方

か」という問いに対しては，これも循環論法であるということに，過半数の生徒が気付いた．

証明自体ができていれば，その正しさに自信をもつ生徒が多く，証明の正しさについて質問する生徒は，以前と比べて大きく減少した．

中学の初年級次にこのような学習をしていない生徒達のうち，Ⅵ-３(2)アの 47 人にアンケートをしたところ，有効回答者数 35 人中 11 人が気づいたと答えた．つまり，この指導による効果があったと言える．

参考文献

[Andrews 09] Andrews, L. J : “GIFTED AND TALENTED EDUCATION: Serving the needs of high-ability students, JST 理科教育支援センター才能教育シンポジウム資料「米国の才能教育の現状」”, 2009

[Brown 90] Brown, S. I & Walter, M I, 平林一榮 訳 : “いかにして問題をつくるかー問題設定の技術”, 東洋館出版社, 1990

[Bruner 86] Bruner, J. S, 鈴木 祥蔵, 佐藤 三郎 訳 : “教育の過程”, 岩波出版, 1986

[Gagné 91] Gagné, F. N & Gary, A (Ed.) : “Toward a Differentiated Model of Giftedness and Talent, Colangelo, Handbook of Gifted Education”, Allyn and Bacon, 1991

[Hardy 08] Hardy, G.H : “A Course of Pure Mathematics”, Cambridge University Press, 1908

[平田 99] 平田嘉宏 : “lim[x→0]sin *x*/*x*＝1 を定義としてラジアンを導く試み”, http://izumi-math.jp/Y_Hirata/radian/radian.htm, 2011. 9. 28 確認

[本間 97] 本間勇人 : “中学受験教育にみる才能教育—大手進学塾の事例から”, 麻生誠, 岩永雅也 編, 創造的才能教育, 玉川大学出版部, pp.193-210, 1997

[細井 85] 細井勉 : “日本語と数理”, 共立出版, pp.91-94, 1985

[伊藤 05] 伊藤雄二 : “国際数学オリンピックの運営の状況とその数学教育的価値について”, 教育開発 1, 53-73, 2005

[岩永 97a] 岩永雅也 : “才能と才能教育”, 麻生誠, 岩永雅也編, 創造的才能教育, 玉川大学出版部, pp.16-49, 1997

［岩永 97b］岩永雅也："才能教育の理論と実践", 麻生誠, 岩永雅也 編, 創造的才能教育, 玉川大学出版部, pp.50-117, 1997

［岩永 97c］岩永雅也："才能教育をめぐる状況", 麻生誠, 岩永雅也 編, 創造的才能教育, 玉川大学出版部, pp.172-192, 1997

［小平 91］小平邦彦："幾何への誘い", 岩波書店, 1991

［Koshy 01］ Koshy, V : "Teaching Mathematics to Able Children", David Fulton Publishers, 2001

［Kruteskii 69］Kruteskii, V. A : "数学的能力の構造", 明治図書出版, 1969

［Kruteskii 76］Kruteskii, V. A : "The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren", University of Chicago Press, 1976

［松本 11］松本圭司 : "円周率πについて", www.math.sci.hokudai.ac.jp/~matsu/pdf/syoutai.pdf, 2011.9.28 確認

［森 91］森毅："数学的思考", 講談社, p.130, 1991

［両角 11］両角達男："スパイラルによる中高連携を重視した数学的活動", 日本数学教育学会誌第 93 巻第 11 号, pp.31-34, 2011

［中村 06］中村隆史, 今井寛, 渡辺政隆："理数系コンテスト・セミナー参加者の進路等に関する調査", 文部科学省科学技術政策研究所 調査資料 129, pp.1-31, 60-63, 67-124, 2006

［野崎 11］野崎昭弘："πの話", 岩波書店, p.62, 2011

［Pitta-Pantazi 11］ Pitta-Pantazi, et al. : "A Model of Mathematical Giftedness: Integrating Natural, Creative, and Mathematical Abilities", Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education 11(1), pp.39–54, 2011

［佐々木 00］佐々木重雄："幾何入門", 岩波書店, pp.93-95, 2000

［清水 11］清水克彦, 田村篤史 : "素養の高い中学生に対する論理的思考の指導", 日本科学教育学会年会論文集 35, pp.82-85, 2011

［田村 12］田村篤史："数学的才能者の思考過程と授業への活用についての研究", 科学教育研究 36(2), pp.181-189, 2012

［Tamura 12］Tamura, A : "On A Thought Process of A Mathematically Talented Student, and Interaction with A Class", 12th International Congress on Mathematical Education Pre-Proceedings, pp.1551-1560, 2012

［寺坂 92］寺坂英孝："幾何とその構造", 日本評論社, pp.10-11, 1992
［続 57］続有恒："中学校卒業時における学業的成功の予見", 名古屋大学教育学部紀要(3), pp.245-254, 1957
［弓野 01］弓野憲一："総合的学習の学力－測定と評価技法の開発", 明治図書, pp.11-26, 2001

---

xxiii おおよそ教室の 1/ 3 程度である．生徒たちは,「見える」=「実在する」という観念を強くもっているものと思われる．

xxiv この問題は次のように発展させられる．

「真平らな海面に，下が凸になるように放物線が描かれている．崖の上の人には，この放物線がどのように見えるか」

答えは楕円であるが，遠近法や 2 次曲線が題材であるから中学生では難しい．高校生には面白い教材である．

Ⅶ 才能教育から才能伸長へ

1 学校教育の一部としての才能伸長モデル

第 16 期の中央教育審議会（以下，中教審，1997）において「教育上の例外措置」の対象者についての言及があり，いわゆる飛び入学等が可能になった．

2012 年 7 月現在では，高校の卒業資格が得られないことや，全人格的成長に対する不安，受験競争の低年齢化を招くといった懸念もあり，浸透していないのが現状である．本節では，日本の数学才能教育の可能性の 1 つについて，数学的才能者と高学力者の相互作用の面から論じていきたい．

(1) 日本の才能教育の現状の再検討

1989 年の第 14 期中教審において，「特定の分野などにおいて特に能力の伸長が著しい者について大学入学年齢制限緩和など教育上の例外措置を講ずることの可否について検討する」との文言が盛り込まれた．それから 8 年を経た 1997 年，先に述べたように第 16 期中教審において，飛び入学が認められた．

これについて，［岩永 97c］は，「すでに先の第 14 期中教審答申以前からある種の才能教育を実践してきていた教育機関があった．私立進学校とよばれる，いわゆる私立中高一貫校がそれである．（中略）開成，麻布，灘，桜蔭などの私立中高一貫校は，「受験教育」というよりむしろ「高度の進学準備教育」あるいは「才能教育」といった方がふさわしい」と述べている．

一方，［山内 12］は，「公教育の中でも私立学校の一部において，学習指導要領の枠を超えたアクセレレーションやエンリッチメントが行われていたことは［岩永 97c］の指摘するとおりであるし，学校外の進学塾においても［本間 97］の指摘するような才能教育の試みがあったことは事実である．しかし，それは，一部の私立学校を除くと，概ね学校外での私的・個別的な試みであり，学校内では少数の例外に過ぎなかった」と述べてい

る.

しかし，上記の私立学校は 2010 年度の日能研の資料を用いても，東京・神奈川に限定した場合，私立学校全体の約 5%を占めている．つまり，東京・神奈川の私立学校の約 5%が「才能教育」，あるいは「高度の進学準備教育」を行なっているとも考えられるのである．これらの学校が才能教育の実践校として機能できるかについて，本稿では 1 つの示唆を与えたい.

(2) 数学的才能者と高学力者の相互作用

Ⅵ-３(2)(3)において，数学的才能者と高学力者の相互作用等について検討した.

まず，1 人の数学的才能者の思考特性の分析について，［Renzulli 78］の述べる才能の三輪概念，［Andrews 09］の述べる才能者の基本的特性，［Dąbrowski 77］の述べる知性的過度激動が 1 人の数学的才能者においても確認された．すなわち，才能の三輪概念のうち「普通より優れた能力」,「課題への傾倒」を，才能者の基本的特性のうち「高度な集中力」を，知性的過度激動のうち「持続的な知的努力」,「問題解決」,「分析的思考」をもつことが確認できた.

さらに，数学的才能者の思考過程を授業に取り入れることで，高学力者の学習の深化を促していると考えられ，加えて高学力者の数学に関するイメージを変え，向上心を与えていることも分かった．また，高学力者は，数学的才能者の才能を知ることで，自分の可能性についても示唆を得ている．つまり，数学的才能者が教室に有益な影響を与えているのである.

さらにⅥ-３(2)(3)において,数学的才能者が高学力者等から受ける刺激と教室における相互作用について以下の指摘をした.

数学的才能者がモチベーションを得る要素は 2 つある．1 つは数学オリンピックとそれに付随して行われた合宿等であり，もう 1 つは所属する学校における刺激である．数学オリンピックから受ける刺激は，主に世界大会への期待や合宿での議論によるものである．一方，学校における刺激は,「友人との競争」,「教師からの評価」,「友人・教師から理解されること」の 3 項目に分類できた．そして，事例研究ではあるが，数学オリンピックよりも，所属する学校およびそれに付随する人間関係・集団教育が数学的才能者に刺激とモチベーションを与えていることが分かった.

つまり，数学的才能者と高学力者は，どちらか一方が刺激・影響を与えているのではなく，双方向にお互いが刺激を受け合い，影響を与え合っているということである．才能者が一般的な学校に馴染めない事例が報告されているが，高学力者の集団の中では，数学的才能者はその才能を活かすことができている．このことは数学的才能者の思考やその卓越性を理解しうる高学力者との共存があって成立することであり，高学力者との集団教育が数学的才能者の学習を深化させていると考えられる．つまり，数学的才能者を含む高学力者の集団教育が，互いに相乗効果を与え,それぞれの学習の深化を促していると考えられる．

(3) Brandl の研究の検討

［Brandl 12］は，高達成者（High Attaining Students）と数学的ギフテッド（Mathematically Gifted Students）の関係についての研究を行った（Ⅲ－５(3)）．

［Brandl 12］は，ドイツの寄宿舎学校（German Boarding School for Higher Education）に通う 113 人の高達成者の生徒たちに［Kießwetter 92］と同じ質問項目のアンケート調査をした結果，「数学で遊ぶこと（Playing，P）」，「数学への強い関心・興味（strong Interest，I）」，「数学についての美的感覚（Aesthetical sensation，A）」の 3 項目で高い値を示したグループを抽出した．［Brandl 12］は，これらのグループがそれぞれに高い相関をもつことを示し，さらにアンケート結果の特徴と，［Kießwetter 92］が実施したアンケートの数学的ギフテッドが示す特徴・特性が類似していることを掴み，これらのグループが数学的ギフテッドの可能性があることを指摘している．加えて，「自発的に学ぶ（Voluntarily，V）」項目で高い値を示したグループを抽出したところ，このグループに属するほとんどの生徒が P，I，A のいずれか，あるいはすべてを満たしており，P，I，A，V の特性の間に強い関係があることも指摘している．さらに，数学の成績等の分析から，グループ V は潜在的なギフテッドであることが明確になったと述べている．つまり，［Brandl 12］は，高い成績が数学的ギフテッドであることを自動的には意味しないとしつつも，このことは，数学的ギフテッドが高い成績の結果として認定できる可能性を示している．

また，数学に対する姿勢は環境に依存し，高達成者は数学に対する肯定的な姿勢をもつ特別な環境を提供されるべきであると指摘している．

さらに，才能者を識別する方法は多く研究されているが，［Brandl 12］は高い IQ レベ

ル，優秀な成績，通常の社会性（異常な社会的行動がない）を主たるものとした選抜が実用的なアプローチであると述べている．加えて，異常な社会的行動のない高達成者が，数学で遊び（P），数学に強い関心・興味（I）をもち，数学の美を好む（A）ことから，異常な社会的行動のない高達成者は，学習環境の構造と内容に関して同じ方向で促進することができると述べている．

(4) 既存の教育システムの一部としての才能伸長モデルの実現へ向けて

［Brandl 12］は，高達成者の全生徒に対する比率を示していないが，被験者である高達成者 113 人は 11 年生および 12 年生のほとんどすべてと述べている．したがって，寄宿舎学校に通う生徒たちを高達成者と考えてよいと思われる．［Brandl 12］は，［Ziegler 08］の先行研究を受けて研究を進めている．［Ziegler 08］によれば，「高達成者とは，一定の基準の成績を満たす者」であるから，これは筆者の定義する高学力者とほぼ同等の概念であると考えられる．

［Brandl 12］のいう「高達成者に対する特別な環境」とは，社会全体や一般的な生徒と比較しての議論であるから，寄宿舎学校のことと考えることができるし，またそれが妥当である．

以上の議論から，数学才能教育の在り方の 1 つとして，才能者のための学校を設立する，あるいは既存の学校に才能者クラスを設置し才能者を選抜する，という方法をとらず，中高一貫校のような「継続的に高学力者を教育する学校」を中心とした，授業の自由度の高

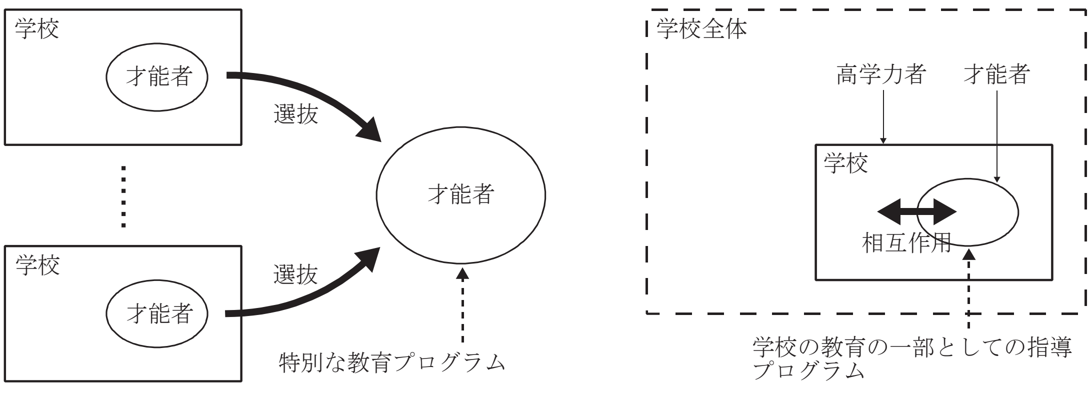


図 Ⅶ-1 才能教育の 1 つの可能性

い既存の学校群で高学力者と共存しつつ，才能者の学習を深化・促進させることができる可能性がある．つまり，「［岩永 97c］の指摘する中高一貫校群」が才能教育の実践校として機能できるのか，という疑問に対しては十分機能する可能性がある，ということができる．この才能教育モデルは**図Ⅶ-1** のように図式化できる．

2 いろいろな段階における才能伸長モデル ー「卓越性の放射現象」の実現のためのストラテジー

前節において，わが国における才能教育の実現可能性 ー学校教育の一部としての指導プログラムー が示された．才能者を選抜したり早修を行ったりするのではなく，一般的な生徒との包括的な教育でそれぞれの才能を伸長する可能性が示されたのである．

本節では，数学オリンピック参加者を中心とした“Math for Excellent”の才能伸長に関する１つの仮説の提示，および，数学的才能者，オリンピック予選合格者，不合格者，上位校，中位校，下位校の各グループ間の才能伸長モデルの提示を行う．

第Ⅳ章で数学オリンピック予選参加者全体（G0），予選合格者（G1），予選不合格者（G2）に対して行った因子分析によって，抽出された因子は「数学の愛好」，「豊富な知識」，「視覚化による表現」，「豊富なアイデア」，「高い表現力」の５つである．この因子名をさらに単純化してそれぞれ「興味」，「知識」，「視覚化」，「柔軟性」，「表現力」とする．これを図

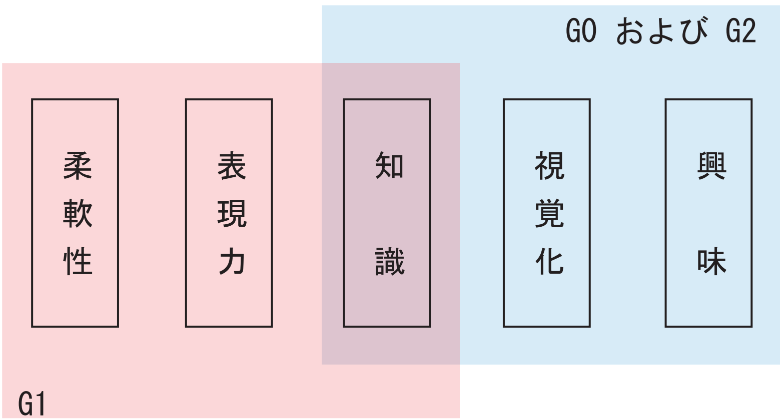


図 Ⅶ-2 因子分析の結果の単純化

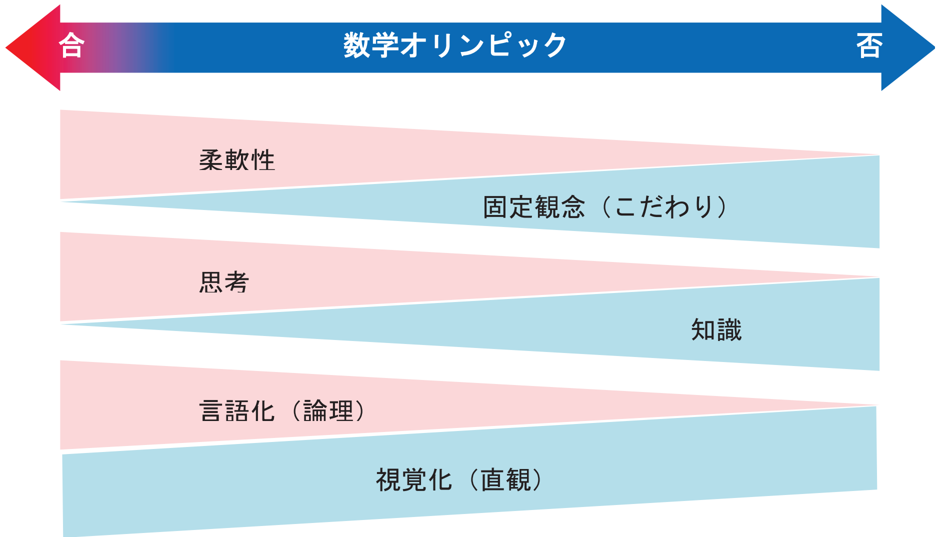


図 Ⅶ-3 数学オリンピック予選の合否を特徴づける能力

（再掲） 表 Ⅴ-6 C クラスタによる分類（柔軟性）

G1	G2	上位校	中位校	下位校
柔　軟　性			な　し	

（再掲） 表 Ⅴ-7 C クラスタによる分類（知識）

G1	G2	上位校	中位校	下位校
知　　識			な　し	

式化したものが次の**図Ⅶ-2** である．G0 と G2 の因子名は同じであり，G1 と「G0 および G2」の共通因子が「知識」である．

さらに，Ⅳ-２～Ⅳ-６にかけて行った t 検定や因子間相関の分析から，数学オリンピック予選参加者の予選の合否について**図Ⅶ-3** を得る．この図において，「柔軟性」や「視覚化（直観）」が記されているくさび形や平行四辺形の図形は，縦の幅が大きいほどその特性が強いことを表している．

ここで，Ⅴ-８(3)ウの**表Ⅴ-6**，**表Ⅴ-7** を再掲しておく．

第Ⅳ章の因子分析の結果，柔軟性は G1 の特性であり，知識は G1，G2 の共通因子であ

った．第Ⅴ章のクラスタ分析の結果，柔軟性クラスタは G2 と上位校ももっており，知識クラスタは上位校ももっていることがわかった．柔軟性も知識も G1，G2，上位校のクラスタには現れるが，中位校，下位校には現れない．

ここで,Ｃクラスタの柔軟性がどのＢクラスタに属するのか,について検討したところ，G1 では表現力・視覚化の B クラスタに属し，G2，上位校では自然な理解力に属していることがわかった（図Ⅵ-3）．

G1 を特徴づけるのは，柔軟性と表現力であったが，このことが，クラスタ分析でも確認されたわけである．つまり，G1 においては「柔軟性」と「表現力」は高い相関を有することが示唆される．さらに，Ⅴ-３(3)に 1 つの事例を示したように,「柔軟性」と「視覚化」との相関も示唆される．合わせて,「柔軟性」と「表現力」･「視覚化」との相関が予想され，さらに対象が G1，G2 であることから，これらの能力は，数学的能力の高さと相関をもっている可能性がある．

一方，因子間相関を求めたところ,「表現力」と「柔軟性」,「知識」は，それぞれ負の相関（−0.531，−0.514）であった（表Ⅳ-7）．しかし，柔軟性が高くなるほど表現力が弱くなる，あるいは，表現力が高くなるほど柔軟性が弱くなる，というのはわれわれの常識からみて妥当ではない．ここでは，柔軟性が高くより多くの斬新なアイデアをもつほど，また，より複雑な知識をもつほど，それらを表現することが困難であると G1 の生徒らが認識している，と解釈すべきである．

先ほどの数学オリンピック合否の差異に戻ると，言語化，論理は因子として抽出されていないが G1 の特性の 1 つである．そこで，以上の議論を踏まえ，この 2 つの能力について因果関係についての仮説を立てた．

仮説：G1，G2 において，言語能力・論理性の伸長が，柔軟性の伸長を促す

この仮説には,現場での日々の指導における筆者自身の経験も加味されている.それは,論理指導を行った上で,「図形と方程式･軌跡」分野を指導すると，いろいろなアプローチが見られるようになるという経験である.「図形と方程式･軌跡」分野においては，軌跡の定義，条件の定義（数学における「条件」とは何か）を正確に把握しておくことが最低限

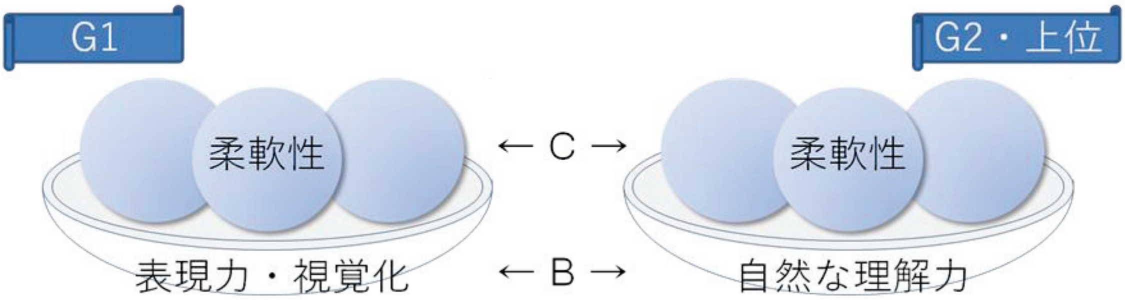


図 Ⅶ-4 C クラスタの「柔軟性」の B クラスタにおける属性

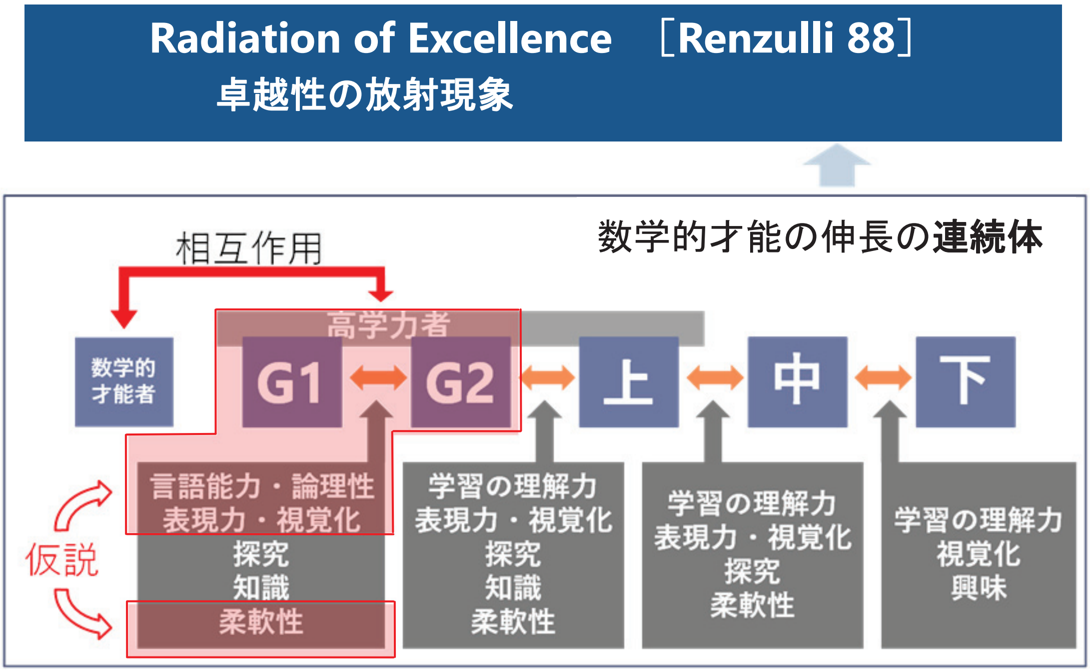


図 Ⅶ-5 才能伸長モデル：数学オリンピック予選合格者，不合格者，上位校，中位校，下位校間の相互作用を引き起こす特性

必要である．また，数学のその他の分野と比べても必要性・十分性の確認が重要な要素を占めており，それにともなって，正しく日本語を解釈し，正しい日本語で表現することが求められる．問題解決のアプローチは，代数的，解析的，幾何的等，いろいろな道が考えられる．

この分野は，上記の仮説を検証しやすいと考えられる．仮説の検証を行うことが今後の課題の 1 つである．

さらに，クラスタ分析の結果から，G1，G2，上位校，中位校，下位校の 5 つのグループのそれぞれの相互間の作用を促すと考えられる要素を上げることができる（表Ⅴ-2）．こ

れを図示化したものが**図Ⅶ-5** である．

今後の教材開発に関して，まず，“Math for Excellent”の教材として，「仮説：言語能力・論理性の伸長が，柔軟性の伸長を促す」と G1，G2 に関するもう 1 つの因子，「表現力・視覚化」を意識した教材開発が妥当であると考えられる．

そして，「卓越性の放射現象」へのストラテジーの構想としても，**図Ⅶ-5** を挙げることができる．

Ⅵ-３(2)，Ⅵ-３(3)で述べたように数学的才能者と高学力層の生徒らとの間で，学習の深化，数学のイメージに対する変化，向上心，競争，教員・友人との関係，評価などについての相互作用が確認された．その事例研究の一般化，すなわち，上記の 5 つの各グループ間でもそれぞれに相互作用が期待される．相互作用が確認できれば，それは「卓越性の放射現象」の 1 つと考えられる．

３ 今後の課題と展望

(1) 今後の課題

Ⅴ-８(3)ウで述べた「自然な理解力」と知能との関係を含め，数学的能力と知的能力との関係についての分析，およびⅤ-８(3)ウで述べた「柔軟性」と「表現力，視覚化」の因果関係の検証は重要な課題の 1 つであると考えている．「自然な理解力」と知能の相関を検討することで，数学的能力と柔軟性・創造性，知能の関係の分析がさらに進むと考えられる．今後も検討を進めていきたい．

その検討を受けて，本研究の長期的な目的である“Math for Excellent”の教材開発に着手したい．これについては，Ⅳ-８およびⅤ-８，Ⅴ-９の結果を考慮し，G1 と G2 および数学的才能者と高学力者で期待される相互作用を確認したいと考えている．

また，数学的才能者については，そのプロファイリングから，数学的才能者が才能の三輪概念・才能者の基本的特性・知性的過度激動の多くをもつと考えられるため，一般的な才能者に関する指導論のレビューをもとに教材を作成することができると思われる．同時に，一般的な才能者にはなく，数学的才能者だけがもつ特性を特定できれば，数学才能教育の前進に大きな推進力を与えるものと考えられる．したがって課題の 3 点目は，数学的

才能者のより多くのサンプルを集めることであり，その方策を立てることである．また，多くのサンプルを得ることで，数学的才能者の育成についても議論をすることができる．本研究では数学的才能者の育成について検討することができなかった．また，Ⅲ－６で述べたように，［Sheffield 94］が示した図Ⅱ-2「生徒の数学的階層」のうち，数学オリンピック自体で測ることができるのは PROBLEM SOLVERS までであり，PROBLEM POSERS や CREATORS まで測ることは困難である．数学的才能者の育成と合わせて，PROBLEM POSERS や CREATORS を判別・識別するための方略についても今後の課題としたい．

Ⅵ－３(2)エにおいて示したアンケート（記述式）結果の中に，数学的才能者の能力の高さに対し，「自分は数学者には 200%向いていない」とする感想を紹介した．本研究では，この感想を当該生徒の前向きな意志として解釈したが，数学的才能者の能力に対して劣等感を抱く場合も考えられる．実際，［中村 06］によれば，数学オリンピック予選に参加したり，予選を通過したりすることで非常に大きなモチベーションや自信を得たり，数学科に進む決意をした生徒が存在する一方，数学オリンピックに参加したことで，自分の数学の才能に関する限界を悟り医学を志したという例や，数学をやめるきっかけになったり，理系から文系に転じた例も報告されている．つまり，数学オリンピックに参加して数学の才能に触れることによる「副作用」も存在するということである．才能教育を活用した才能伸長に関しては，そうした副作用の存在を教員が十分に承知していなければならない．その上で，教員は面談やカウンセリング等のスキルを修得しておくことが望まれる．本研究は，副作用およびその対応に関しては十分な議論ができていない．この点は，今後の研究課題の１つとしたい．

才能者を識別する方法は多く研究されているが，Ⅶ－１(3)において，［Brandl 12］は，高い IQ レベル，優秀な成績，通常の社会性（異常な社会的行動がない）を主たるものとした選抜が実用的なアプローチであると述べている．加えて，異常な社会的行動のない高達成者が，数学で遊び，数学に強い関心・興味をもち，数学の美を好むことから，異常な社会的行動のない高達成者は，学習環境の構造と内容に関して同じ方向で促進することができると述べている．それでは異常行動のある高達成者はどのように対処されるべきか．あるいは，2E（＝twice-exceptional）の子どもたちはどのように対処されるべきか．2E の子どもたちに対する教育は，近年，わが国でも研究が進んでおり成果が得られることが期待される（［野添 14］，［松本 14］など）．しかし，本研究ではその点にまで手を伸ばすことはできなかった．今後の課題の１つとしたい．

Ⅶ-２に記したG1，G2，上位校，中位校，下位校の各グループ間で期待される相互作用の確認は，すなわち卓越性の放射現象の確認につながる．数学普通教育に関してもⅤ-８，Ⅴ-９を考慮した教材開発を行い，効果の検証，相互作用の確認を行っていきたい．

(2) 今後の展望

生徒の能力を測る手段だけならば，実に多様なものが存在している．例えば知能検査もその１つである．しかし，知能検査をある学校の全生徒に受検させることは現実的には不可能である．能力の対象を数学に限定するとき，ある学校の全生徒に対して何らかの数学の試験を実施することは，不可能ではないが決して容易ではない．一方で，本研究で開発した質問紙を全生徒に対して実施することはさほど困難ではないと思われる．したがって，本質問紙を各学校の現場で採用し，うまく活用することで教育上の成果をあげることは，その他の検査と比較すると与し易いと考えられる．以下では，本質問紙によって想定できる活用案をいくつか提示したい．

まず，スーパーサイエンスハイスクール（SSH）の教育活動・教育効果を他校に波及させる方法について提示する．

スーパーサイエンスハイスクールとは文部科学省が科学技術や理科・数学教育を重点的に行う高校を指定する制度のことである．2002 年度に構造改革特別要求として約 7 億円の予算が配分され開始された．高等学校等において，先進的な理数教育を実施するとともに，科学技術系人材の育成のため各学校で作成した計画に基づき，独自のカリキュラムによる授業や地域の特色を生かした課題研究，大学・研究機関などとの連携，創造性，独創性を高める指導方法・教材の開発，国際性を育むための方法など，様々な取り組みを積極的に行っている［科学技術振興機構 15］．

多くの場合，SSH は本研究における上位校に属する．SSH の教育活動・教育効果を中位校に波及させたい．

現在，SSH におけるカリキュラム開発，課題研究，教員研修，教材等の事例に関しては様々な報告の機会が用意されているが，各高校の校内において実施されることも少なくない［科学技術振興機構 15］．これを中位校で積極的に活用できるような仕組み・制度の構築が望まれる．例えば，SSH の数人の教員，数人の生徒を周辺の中位校に派遣し，成果

の公聴会を開催する．SSH の生徒によるプレゼンテーション，公開ディスカッション，生徒の課題学習の成果の展示等，あるいは，SSH の教員による指導方法の開示，中位校の教員との意見交換，教材の提供等，様々な方法が考えられる．それに先んじて，中位校の生徒たちには本質問紙によるアンケート調査を実施しておく．一定の期間をおき，再度質問紙によるアンケート調査を実施し，中位校の生徒の変化を確認する．

SSH で十分に練られた方法論，教材等を中位校のそれぞれが，各学校に合うように改定し適用することによって，少ない労力で大きな成果を生む可能性がある．中位校はカリキュラムや教材，課題等を一から開発するのではなく，改定して用いることで労力を抑えられ，その分，生徒の指導に当てられる．

中位校おいて成果が確認できれば，結果的に上位校と中位校の両方で成果が出たことになり，その方法・カリキュラム・教材等は汎用性の高いもの認定できる．また，中位校における実践の中で，上位校・SSH における問題点が改善されることも考えられる．そのような改善点は中位校から上位校・SSH へフィードバックされることにより，より効果的なものになる．実現できれば，それは中位校から上位校・SSH への作用ということになる．つまり，上位校・SSH と中位校の学校間における相互作用が確認されることになり，卓越性の放射現象の 1 つと捉えられる．

Ⅵ-３では，数学的才能者と高学力者の相互作用についての事例研究を示した．この結果は，対象を「数学的才能者たちと高学力者たち」に替えて，または「G1 と上位校の生徒たち」に替えて，一般化できることが期待される．そこで，先述の SSH を含む上位校の生徒に本質問紙によるアンケート調査を行い，G1 に相当する生徒を抽出する．数学の授業において，例えばグループ学習の機会などに，各グループに G1 相当の生徒を配置する．実際にどのようなグループ学習を行うのか，その内容の検討は必要であるが，そうしたグループ学習において，グループ内における相互作用が期待できる．

ここで，今後の課題・展望として考えられることの 1 つは，上位校の一般的な生徒何人に対して，G1 相当の生徒を何人配置すれば効果が最大になるのか，ということである．数学の学習効果・学習の深化を最大にする G1 相当の生徒の，一般的な生徒に対する存在比率を求めるのである．これを知ることによって，学習効果の最適化が行えるのであるが，G1 相当の生徒による上位校の生徒の学習効果の最適化と，上位校の生徒による G1 相当の生徒の学習効果の最適化の両方について検討を行う必要がある．つまり，相互作用の効果

が最も高い存在比率を考えるべきである.そのための準備として,授業の形態やその種類,学習効果・深化の評価法等を十分に検討しておく必要がある.

参考文献

［Andrews 09］ Andrews, L. J : “GIFTED AND TALENTED EDUCATION: Serving the needs of high-ability students, JST 理科教育支援センター才能教育シンポジウム資料「米国の才能教育の現状」”, 2009

［Brandl 12］ Brandl, M & Barthel, C : A Comparative Profile of High Attaining and Gifted Students in Mathematics, 12th International Congress on Mathematical Education Pre-Proceedings, 1429–1438, 2012

［長曽 12］ 長曽寿江, 苅田知則, 福山 隆雄 : “集団適応に困難がある才能児への主体的早修･拡充プログラム, ルーブリック評価の導入”, 愛媛大学教育実践総合センター紀要(30), pp.75-82, 2012

［Dąbrowski 77］ Dąbrowski, K & Piechowski, M : “Theory of levels of emotional development”, Dabor Science Publications, 1977

［本間 97］ 本間勇人 : “中学受験教育にみる才能教育—大手進学塾の事例から”, 麻生誠, 岩永雅也 編, 創造的才能教育, 玉川大学出版部, pp.193-210, 1997

［岩永 97a］ 岩永雅也 : “才能と才能教育”, 麻生誠, 岩永雅也編, 創造的才能教育, 玉川大学出版部, pp.16-49, 1997

［岩永 97b］ 岩永雅也 : “才能教育の理論と実践”, 麻生誠, 岩永雅也 編, 創造的才能教育, 玉川大学出版部, pp.50-117, 1997

［岩永 97c］ 岩永雅也 : “才能教育をめぐる状況”, 麻生誠, 岩永雅也 編, 創造的才能教育, 玉川大学出版部, pp.172-192, 1997

［科学技術振興機構 15］ 独立行政法人科学技術振興機構理数学習推進部 : “スーパーサイエンスハイスクール”, ssh.jst.go.jp, 2015.1.24 確認

［Kießwetter 92］ Kießwetter, K : “Mathematische Begabung” als Element des Weltbildes kompetenter Mathematiklehrer und Schüler- ausgewählte Ergebnisse aus einem DFG-Projekt. MU 38 (1), pp.54–60, 1992

［松本 14］ 松本茉莉衣, 是永かな子 : “2E の子どもの特性に注目した特別な教育的ニーズ”, 高知大学教育学部研究報告 74, pp.75-79, 2014

［松村 07］ 松村暢隆 : “才能のある学習困難児のための教育プログラム－2E 教育の基礎固めのために”, 關西大學文學論集 57(3), pp.97-113, 2007

［松村 12］ 松村暢隆 : “認知的個性を活かす 2E(二重の特別支援)教育”, LD 研究 21(2), pp.193-200, 2012

［中村 10］ 中村順子, 水内豊和 : “日本における GT 教育の可能性”, 富山大学人間発達科学部紀要第 5 巻第 1 号, pp.161-168, 2010

［中村 11］ 中村順子, 浦林寛英, 中島育美, 水内豊和 : “アメリカ合衆国における障害のある大学生の支援－マーレイ州立大学における SDS の取り組みから”, 富山大学人間発達科学部紀要第 6 巻第 1 号, pp.199-204, 2011

［中村 06］ 中村隆史, 今井寛, 渡辺政隆 : “理数系コンテスト・セミナー参加者の進路等に関する調査”, 文部科学省科学技術政策研究所 調査資料 129, pp.1-31, 60-63, 67-124, 2006

［西山 10］ 西山志歩 : “小児・思春期精神医学(1)2E の子どもたちへの教育的支援”, 精神科 17(4), 科学評論社, pp.424-428, 2010

［野添 09］ 野添絹子 : “発達障害と才能を併せ持つ子どものための教育方法の工夫－2E(二重の特別支援)教育の新しい支援のあり方 RTI について”, アメリカ教育学会紀要(20), pp.31-44, 2009

［野添 14］ 野添絹子 : “日本の 2E の大学生と社会人の現状”, そだちの科学(22), 日本評論社, pp.32-36, 2014

［隅田 07］ 隅田学, 松村暢隆 : “理科授業で学習困難や才能を示す児童生徒への特別支援の方策に関する研究(1): 米国における理科で優れた行動特徴チェックリスト”, 日本理科教育学会四国支部会報(25), pp.49-50, 2007

［隅田 07］ 隅田学, 松村暢隆 : “理科授業で学習困難や才能を示す児童生徒への特別支援の方策に関する研究(2)”, 日本科学教育学会年会論文集 31, pp.305-306, 2007

［隅田 08］ 隅田学, 三木淳史 : “理科授業で学習困難や才能を示す児童生徒への特別支援の方策に関する研究(3)”, 日本科学教育学会年会論文集 32, pp.63-64, 2008

［田村 12a］ 田村篤史 : “数学的才能者の思考過程と授業への活用についての研究”, 科学教育研究 36(2), pp.181-189, 2012

［田村 12b］田村篤史：“数学的才能者と高学力者の相互作用から見える数学才能教育の 1 つの可能性—数学才能教育の意味の明確化—”, 第 45 回数学教育論文発表会論文集, pp.1121-1126, 2012

［Tamura 12］Tamura, A : “On A Thought Process of A Mathematically Talented Student, and Interaction with A Class”, 12th International Congress on Mathematical Education Pre-Proceedings, pp.1551-1560, 2012

［山内 12］山内乾史：“才能教育について(概説)－日本における状況－”, 比較教育学研究, pp.3-21, 2012

［Ziegler 08］Ziegler, A : “Hochbegabung”, Ernst Reinardt Verlag, 2008

謝辞

博士号申請論文の提出にあたり，まず，指導教官である清水克彦先生に厚く御礼申しあげたい．筆者は 2011 年度の博士後期課程を受験したが不合格であった．そのときの博士後期課程の合格発表日は，国公立大学の合格発表最終日であり，私は勤務校で生徒に「おめでとう」と声を掛けながら自分が不合格であることに向き合っていた．そうしているときに，清水先生から「もう 1 年頑張ってみませんか」とのメールをいただき，博士後期課程に入学する前からご指導いただくことになった．まだ東京理科大学大学院の学生でもない筆者を叱咤激励していただけたのは非常に幸運であった．この入学前の 1 年があったからこそ，この度の博士号申請論文提出に漕ぎ着けたのだと思う．入学後も時には厳しく，時には暖かく励ましていただき，また一緒に議論を続けてくださったことが私の血肉になっている．あらためて心より感謝申しあげる．

小川正賢先生にも御礼申しあげたい．博士後期課程の入学試験において励ましていただいたことは入学後の自信につながった．学会の席でも声を掛けていただきアドバイスをいただいたことは光栄であった．

伊藤稔先生にも御礼申しあげたい．伊藤先生には学部時代の教育学原理の講義を受けて以来，25 年以上もの時を隔てて 2011 年の入学試験会場でお会いした．その後，1 年の「浪人」時代も博士後期課程入学後も折に触れ声を掛けてくださり励ましていただいた．

筆者は，学部，修士，博士の 3 つの課程をすべて東京理科大学で過ごした．どの課程においても厳しく指導していただいたと思う．その厳しい指導こそが自信を与えてくれるのだと思っている．

理工学部数学科における卒業研究から修士課程にかけては大森英樹先生にご指導いただいた．筆者の「数学観」はこの時期に形成されたと思う．いま，それなりの自信をもって学校の現場で生徒に向き合えるのは，学部・修士の 6 年間の鍛錬があってこそと考えている．修士（理学）は取得していたが，数学教育研究に関しては基礎的な学力も不十分であったように思う．博士後期課程入学前の浪人時代が，その基礎力をつけてくれたと考えている．振り返るに，この 1 年間は私の転機であった．入学後，短期間に相当量の課題をこ

なさなければならないこともあったが，しかし，それには体力的な辛さはあれ，精神的には充実していた．何よりも学んでいる，あるいは研究しているという実感があった．博士後期課程は，自立した研究者の育成を目指しているが，この点について反省点は少なくない．清水先生のご指導にしたがっていくと，自然に道が拓けていったが，その指導の意味は，後になってようやくわかるという次第であった．私自身は，先の見通しももたないまま目の前の研究だけを進めていた時期もあったように思う．研究全体の時間うち，実に過半数はその研究計画に当てられるべきであると痛切に感じている．

多くの厳しい指導をいただいたが，博士号申請論文の公聴会においては，同時に多くの励ましをいただいた．主査の清水先生をはじめ，副査の秋山仁先生，伊藤稔先生，北原和夫先生，八並光俊先生，山本芳人先生には貴重なご意見をいただいた．博士号申請論文に厚みをもたせることができたのではないかと考えている．

第Ⅳ章の執筆にあたり，（財）数学オリンピック財団事務局長 淺井康明 氏に多大なご協力をいただいた．東京理科大学理数教育センター長 秋山仁先生には，数学オリンピック財団と筆者との仲介の労をとっていただいた．また，東京理科大学大学院科学教育研究科長 小川正賢先生，愛媛大学教育学部准教授 隅田学先生には，第Ⅳ章の部分を学会誌に投稿するにあたり通読いただき貴重なご意見をいただいた．この場を借りて心より御礼申しあげる．

第Ⅳ章は，平成 23 年度科学研究費補助金（奨励研究）23913004 の交付を受けて行った．この場に記し，日本学術振興会関係各位に感謝申しあげる．

科学教育研究科清水研究室の博士後期課程でともに学んだ, 小林徹也さん, 半田真さん, 松嵜昭雄さんには多くの刺激をいただいた．そして，安宅隆さんをはじめとする修士課程の皆さんにはアンケート調査のサポートやゼミのセッティング等，大変お世話になった．心より感謝申しあげる．

妻 奈緒子と長男 典之, 次男 佳之には博士後期課程在学中, 我慢をしてもらうことも少なくなかった．家族の励ましとその存在自体が筆者を支えてくれた．この場を借りて感謝を述べたい．

付録

付録１ 数学に対する思考・表現等の能力ならびに態度に関する基準尺度測定質問紙

尺度： 1.そう思わない　2.あまりそう思わない　3.ややそう思う　4.そう思う			
1	同級生よりも速く，かつ上手く数学を学べます	25	問題を解いた結果に法則性を見つけます
2	1回で（反復しないで）新しい数学の内容を学べます	26	簡単に問題を解くことができないとき，別の方法を見つけようとします
3	数学の問題を解いて楽しんだり，数独のような数学パズルで遊んだり，テレビゲームをしたりします	27	自分の思考過程を振り返ります
4	数学の問題を解くとき，面白い方法を見つけ出します	28	論理的に推論します
5	数学の問題を解くのを楽しみます	29	疑問をもったことについての多くのアイデアと解答を思いつきます
6	新しい数学の内容を思い出して簡単に使うことができます	30	数学の問題や題材を自然に見つけます
7	上級学年の教科書や課題に取り組みたいと思っています/取り組んでいます	31	数学の問題の中にある色々な事柄について詳しく考察します
8	やさしくて反復練習の多い宿題は嫌いです	32	考えた結果を分かりやすく説明します
9	高いレベルの数学に関わるような鋭い質問をします	33	コンピュータを上手く用います
10	その答えが，なぜ正しいか知りたいと思っています	34	何を学習したか自分の言葉で表現します
11	自分の能力を伸ばすために教科書の内容を変えて欲しいと思っています	35	自分のアイデアを図や表で効果的に表現します
12	数学に興味を示し，質問をします	36	考察と研究の結果を図や表で適切に要約します
13	自分の興味のある数学の分野を勉強したり，考えたりすることが好きです	37	間違うことを心配をしないで考えたり，問題を解いたりします
14	数を用いて分析することに興味があります	38	ある数学的な話題についての知識が豊富です
15	図や表を用いて，自分の考えをまとめようとします	39	問題の要点とそれを解く方法を理解します
16	数学の内容や問題について考えるときには粘り強く努力します	40	数学の授業で学んだことを長い間覚えています
17	長い間，続けて考えられます	41	数学の授業で学んだ色々な話題どうしを結びつけたり関連付けたりします
18	同級生とは違うものに興味をもつことがしばしばあります	42	たくさんの数学用語を知っています
19	人と同じでない方法でものを考えたり，何かを行ったりすることを気にしません	43	「数学」とは何かについて自分の考えをもっています
20	数学の問題を考えたり解いたりするのに夢中になり，時間を忘れることがあります	44	教科書の内容を超えた数学について知識が豊富です
21	自ら，自分なりの方法でいろいろなことをしようとします	45	日常生活の中の数理現象を理解します
22	テレビ，新聞，雑誌やインターネットの数学関連の情報に興味をもっています	46	数学の知識と理解に自信があります
23	問題を簡潔で効率的に解くことが好きです	47	くわしく理解する前に「全体的な見通し」をつかみます
24	様々な方法で問題を解きます	48	受け身の学習することよりも自ら学習することを好みます

付録2 数学オリンピック予選参加者（GO）と上位校，中位校，下位校に関するｔ検定

付録2の基礎データにおける小数点以下の表記について次のとおり定める.

・平均値：測定データの精度＋1桁とする．本研究の測定データは，1～4の整数値であるため小数第1位の表記となる.

・不偏分散，標準偏差：測定データの精度＋2桁とする．本研究の測定データは，1～4の整数値であるため小数第2位の表記となる.

・F値，t値，P値，自由度：統計数値表の桁数に従う．一般的な統計数値表は小数点第3位で用意されているため，本研究もこれに従う.

・P値が0.00001よりも小さい場合，以下の表では0.000と記載する.

(1) 数学オリンピック予選参加者（GO）と上位校に関するｔ検定

質問項目：1

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.8	0.78	0.88
上位校	143	1.9	0.74	0.86
全体	541	2.6	0.95	0.97

等分散性の検定

F値	1.048	
第1自由度	397	
第2自由度	142	
P値	0.754	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	11.187	
自由度	539	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	11.310	
自由度	256.056	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 2

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.4	0.85	0.92
上位校	143	1.7	0.72	0.85
全体	541	2.6	0.95	0.97

等分散性の検定

F値	1.166	
第1自由度	397	
第2自由度	142	
P値	0.282	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	6.948	
自由度	539	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	7.205	
自由度	269.036	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 3

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.0	0.83	0.91
上位校	143	2.0	1.10	1.05
全体	541	2.8	1.10	1.05

等分散性の検定

F値	1.331	
第1自由度	142	
第2自由度	397	
P値	0.033	*

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	11.154	
自由度	539	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	10.430	
自由度	223.184	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 4

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.7	0.78	0.89
上位校	143	1.8	0.75	0.86
全体	541	2.5	0.94	0.97

等分散性の検定

F値	1.050	
第1自由度	397	
第2自由度	142	
P値	0.740	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	10.977	
自由度	539	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	11.105	
自由度	256.339	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 5

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.3	0.56	0.75
上位校	143	2.2	0.97	0.98
全体	541	3.0	0.91	0.95

等分散性の検定

F値	1.718	
第1自由度	142	
第2自由度	397	
P値	0.000	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	13.925	
自由度	539	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	12.283	
自由度	204.395	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 6

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.6	0.69	0.83
上位校	143	1.9	0.72	0.85
全体	541	2.4	0.78	0.89

等分散性の検定

F値	1.038	
第1自由度	142	
第2自由度	397	
P値	0.769	n.s.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	8.350	
自由度	539	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	8.276	
自由度	246.722	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 7

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.0	1.00	1.00
上位校	143	1.8	0.90	0.95
全体	541	2.7	1.24	1.11

等分散性の検定

F値	1.112	
第1自由度	397	
第2自由度	142	
P値	0.459	n.s.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	12.178	
自由度	539	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	12.488	
自由度	263.155	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 8

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.1	1.00	1.00
上位校	143	2.3	1.08	1.04
全体	541	2.9	1.14	1.07

等分散性の検定

F値	1.077	
第1自由度	142	
第2自由度	397	
P値	0.576	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	7.974	
自由度	539	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	7.836	
自由度	242.900	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 9

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.3	0.74	0.86
上位校	143	1.5	0.43	0.66
全体	541	2.1	0.77	0.88

等分散性の検定

F値	1.696	
第1自由度	397	
第2自由度	142	
P値	0.000	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.
平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	9.823	
自由度	539	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	11.103	
自由度	324.677	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目： 10

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.5	0.48	0.69
上位校	143	2.9	0.99	1.00
全体	541	3.3	0.69	0.83

等分散性の検定

F値	2.058	
第1自由度	142	
第2自由度	397	
P値	0.000	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定（t検定）

等分散性が仮定できるとき

t値	8.049	
自由度	539	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき（Welch の方法）

t値	6.826	
自由度	193.792	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目： 11

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.6	1.14	1.07
上位校	143	1.7	0.68	0.83
全体	541	2.4	1.16	1.08

等分散性の検定

F値	1.664	
第1自由度	397	
第2自由度	142	
P値	0.000	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定（t検定）

等分散性が仮定できるとき

t値	8.748	
自由度	539	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき（Welch の方法）

t値	9.845	
自由度	321.412	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 12

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.0	0.69	0.83
上位校	143	2.2	0.76	0.87
全体	541	2.8	0.84	0.91

等分散性の検定

F値	1.102	
第1自由度	142	
第2自由度	397	
P値	0.468	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	9.804	
自由度	539	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	9.583	
自由度	240.578	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 13

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.3	0.61	0.78
上位校	143	2.4	1.03	1.01
全体	541	3.1	0.89	0.94

等分散性の検定

F値	1.697	
第1自由度	142	
第2自由度	397	
P値	0.000	*

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	11.477	
自由度	539	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	10.152	
自由度	205.189	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 14

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.1	0.72	0.85
上位校	143	2.1	0.93	0.96
全体	541	2.9	0.95	0.98

等分散性の検定

F値	1.288	
第1自由度	142	
第2自由度	397	
P値	0.059	n.s.

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	11.191	
自由度	539	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	10.545	
自由度	225.988	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 15

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.8	0.91	0.95
上位校	143	2.2	0.88	0.94
全体	541	2.6	0.97	0.99

等分散性の検定

F値	1.026	
第1自由度	397	
第2自由度	142	
P値	0.870	n.s.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	6.739	
自由度	539	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	6.780	
自由度	253.659	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 16

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.2	0.65	0.81
上位校	143	2.6	0.93	0.97
全体	541	3.0	0.79	0.89

等分散性の検定

F値	1.433	
第1自由度	142	
第2自由度	397	
P値	0.007	*

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	6.852	
自由度	539	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	6.298	
自由度	217.227	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 17

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.0	0.85	0.92
上位校	143	2.5	0.97	0.98
全体	541	2.9	0.93	0.96

等分散性の検定

F値	1.139	
第1自由度	142	
第2自由度	397	
P値	0.332	n.s.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	5.371	
自由度	539	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	5.209	
自由度	237.2836	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 18

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.2	0.67	0.82
上位校	143	2.6	1.02	1.01
全体	541	3.0	0.83	0.91

等分散性の検定

F値	1.529	
第1自由度	142	
第2自由度	397	
P値	0.001	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	7.153	
自由度	539	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	6.478	
自由度	212.398	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 19

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.2	0.68	0.83
上位校	143	2.7	1.07	1.03
全体	541	3.1	0.85	0.92

等分散性の検定

F値	1.567	
第1自由度	142	
第2自由度	397	
P値	0.001	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	6.694	
自由度	539	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	6.028	
自由度	210.618	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 20

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.1	0.79	0.89
上位校	143	2.2	0.93	0.97
全体	541	2.8	0.99	0.99

等分散性の検定

F値	1.181	
第1自由度	142	
第2自由度	397	
P値	0.215	n.s.

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	10.290	
自由度	539	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	9.893	
自由度	233.789	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 21

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.1	0.62	0.79
上位校	143	2.3	0.78	0.88
全体	541	2.9	0.77	0.88

等分散性の検定

F値	1.261	
第1自由度	142	
第2自由度	397	
P値	0.085	n.s.

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	9.379	
自由度	539	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	8.881	
自由度	227.865	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 22

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.6	0.89	0.94
上位校	143	1.8	0.78	0.88
全体	541	2.4	0.99	1.00

等分散性の検定

F値	1.143	
第1自由度	397	
第2自由度	142	
P値	0.350	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	9.083	
自由度	539	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	9.374	
自由度	266.523	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 23

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.2	0.80	0.90
上位校	143	2.8	1.08	1.04
全体	541	3.1	0.90	0.95

等分散性の検定

F値	1.345	
第1自由度	142	
第2自由度	397	
P値	0.027	*

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	4.015	
自由度	539	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	3.745	
自由度	222.352	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 24

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.7	0.80	0.89
上位校	143	2.0	0.62	0.79
全体	541	2.5	0.85	0.92

等分散性の検定

F値	1.289	
第1自由度	397	
第2自由度	142	
P値	0.076	n.s.

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	8.324	
自由度	539	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	8.835	
自由度	282.277	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 25

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.9	0.75	0.87
上位校	143	2.3	0.95	0.97
全体	541	2.8	0.89	0.94

等分散性の検定

F値	1.260	
第1自由度	142	
第2自由度	397	
P値	0.085	n.s.

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	7.458	
自由度	539	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	7.063	
自由度	227.914	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 26

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.2	0.54	0.74
上位校	143	2.7	0.90	0.95
全体	541	3.1	0.69	0.83

等分散性の検定

F値	1.667	
第1自由度	142	
第2自由度	397	
P値	0.000	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	6.840	
自由度	539	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	6.074	
自由度	206.362	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 27

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.9	0.75	0.87
上位校	143	2.4	0.94	0.97
全体	541	2.7	0.85	0.92

等分散性の検定

F値	1.240	
第1自由度	142	
第2自由度	397	
P値	0.109	n.s.

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	5.786	
自由度	539	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	5.500	
自由度	229.313	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 28

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.9	0.76	0.87
上位校	143	2.2	0.79	0.89
全体	541	2.7	0.88	0.94

等分散性の検定

F値	1.050	
第1自由度	142	
第2自由度	397	
P値	0.708	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	8.889	
自由度	539	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	8.788	
自由度	245.549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 29

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.6	0.77	0.88
上位校	143	1.9	0.60	0.77
全体	541	2.4	0.82	0.90

等分散性の検定

F値	1.285	
第1自由度	397	
第2自由度	142	
P値	0.080	n.s.

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.
平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	8.369	
自由度	539	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	8.877	
自由度	281.873	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 30

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.4	0.83	0.91
上位校	143	1.8	0.62	0.78
全体	541	2.2	0.86	0.93

等分散性の検定

F値	1.354	
第1自由度	397	
第2自由度	142	
P値	0.035	*

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	7.544	
自由度	539	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	8.100	
自由度	289.269	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 31

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.6	0.70	0.84
上位校	143	1.8	0.59	0.77
全体	541	2.4	0.80	0.90

等分散性の検定

F値	1.188	
第1自由度	397	
第2自由度	142	
P値	0.229	n.s.

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	10.136	
自由度	539	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	10.555	
自由度	271.384	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 32

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.5	0.89	0.94
上位校	143	2.0	0.82	0.91
全体	541	2.4	0.91	0.96

等分散性の検定

F値	1.080	
第1自由度	397	
第2自由度	142	
P値	0.595	n.s.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	5.165	
自由度	539	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	5.260	
自由度	259.618	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 33

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.3	1.18	1.09
上位校	143	2.1	1.04	1.02
全体	541	2.2	1.14	1.07

等分散性の検定

F値	1.131	
第1自由度	397	
第2自由度	142	
P値	0.391	n.s.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	1.243	
自由度	539	
P値	0.214	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	1.280	
自由度	265.162	
P値	0.202	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 34

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.4	0.75	0.87
上位校	143	2.1	0.69	0.83
全体	541	2.3	0.75	0.87

等分散性の検定

F値	1.101	
第1自由度	397	
第2自由度	142	
P値	0.505	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	3.670	
自由度	539	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	3.754	
自由度	261.8922	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 35

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.4	0.85	0.92
上位校	143	2.0	0.78	0.88
全体	541	2.3	0.87	0.94

等分散性の検定

F値	1.091	
第1自由度	397	
第2自由度	142	
P値	0.546	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	5.260	
自由度	539	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	5.369	
自由度	260.816	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 36

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.4	0.72	0.85
上位校	143	1.9	0.68	0.82
全体	541	2.3	0.76	0.87

等分散性の検定

F値	1.070	
第1自由度	397	
第2自由度	142	
P値	0.645	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	6.246	
自由度	539	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	6.346	
自由度	258.451	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 37

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.0	0.85	0.92
上位校	143	2.5	0.96	0.98
全体	541	2.8	0.92	0.96

等分散性の検定

F値	1.128	
第1自由度	142	
第2自由度	397	
P値	0.367	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	5.204	
自由度	539	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	5.058	
自由度	238.201	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目： 38

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.3	1.01	1.01
上位校	143	1.5	0.55	0.74
全体	541	2.1	0.99	1.00

等分散性の検定

F値	1.855	
第1自由度	397	
第2自由度	142	
P値	0.000	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	7.895	
自由度	539	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	9.103	
自由度	340.336	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目： 39

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.9	0.61	0.78
上位校	143	2.5	0.96	0.98
全体	541	2.8	0.74	0.86

等分散性の検定

F値	1.575	
第1自由度	142	
第2自由度	397	
P値	0.001	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	5.456	
自由度	539	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	4.908	
自由度	210.262	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目： 40

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.8	0.91	0.96
上位校	143	2.2	0.87	0.93
全体	541	2.6	0.98	0.99

等分散性の検定

F値	1.046	
第1自由度	397	
第2自由度	142	
P値	0.764	n.s.

平均値の差の検定（t検定）
等分散性が仮定できるとき

t値	6.753	
自由度	539	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき（Welch の方法）

t値	6.824	
自由度	255.834	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注：上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目： 41

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.0	0.76	0.87
上位校	143	2.1	0.76	0.87
全体	541	2.7	0.89	0.94

等分散性の検定

F値	1.003	
第1自由度	142	
第2自由度	397	
P値	0.965	n.s.

平均値の差の検定（t検定）
等分散性が仮定できるとき

t値	9.801	
自由度	539	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき（Welch の方法）

t値	9.794	
自由度	250.451	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注：上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 42

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.1	0.92	0.96
上位校	143	1.6	0.54	0.74
全体	541	2.0	0.87	0.94

等分散性の検定

F値	1.706	
第1自由度	397	
第2自由度	142	
P値	0.000	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	5.968	
自由度	539	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	6.754	
自由度	325.634	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 43

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.4	1.03	1.01
上位校	143	1.7	0.82	0.91
全体	541	2.2	1.07	1.03

等分散性の検定

F値	1.252	
第1自由度	397	
第2自由度	142	
P値	0.116	n.s.

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	7.382	
自由度	539	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	7.783	
自由度	278.352	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 44

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.3	0.95	0.97
上位校	143	1.5	0.55	0.74
全体	541	2.1	0.99	1.00

等分散性の検定

F値	1.737	
第1自由度	397	
第2自由度	142	
P値	0.000	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	9.921	
自由度	539	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	11.273	
自由度	328.710	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 45

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.3	0.81	0.90
上位校	143	1.7	0.64	0.80
全体	541	2.2	0.84	0.92

等分散性の検定

F値	1.264	
第1自由度	397	
第2自由度	142	
P値	0.101	n.s.

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	7.445	
自由度	539	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	7.867	
自由度	279.641	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 46

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.4	0.90	0.95
上位校	143	1.7	0.76	0.87
全体	541	2.2	0.97	0.98

等分散性の検定

F値	1.184	
第1自由度	397	
第2自由度	142	
P値	0.237	n.s.

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	8.037	
自由度	539	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	8.364	
自由度	270.994	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 47

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.8	0.75	0.87
上位校	143	2.1	0.99	1.00
全体	541	2.6	0.90	0.95

等分散性の検定

F値	1.315	
第1自由度	142	
第2自由度	397	
P値	0.041	*

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	7.629	
自由度	539	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	7.154	
自由度	224.200	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 48

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.1	0.80	0.89
上位校	143	2.3	0.97	0.99
全体	541	2.9	0.97	0.98

等分散性の検定

F値	1.222	
第1自由度	142	
第2自由度	397	
P値	0.136	n.s.

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	8.938	
自由度	539	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	8.526	
自由度	230.674	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

(2) 数学オリンピック予選参加者（GO）と中位校に関するｔ検定

質問項目：１

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.8	0.78	0.88
中位校	158	1.8	0.73	0.86
全体	556	2.5	1.00	1.00

等分散性の検定

F値	1.062	
第1自由度	397	
第2自由度	157	
P値	0.669	n.s.

平均値の差の検定（t検定）
等分散性が仮定できるとき

t値	13.094	
自由度	554	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき（Welch の方法）

t値	13.264	
自由度	296.402	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注：上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目：２

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.4	0.85	0.92
中位校	158	1.7	0.63	0.79
全体	556	2.2	0.88	0.94

等分散性の検定

F値	1.342	
第1自由度	397	
第2自由度	157	
P値	0.033	*

注：この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには，Welchの方法を採用すべきである．
平均値の差の検定（t検定）
等分散性が仮定できるとき

t値	8.267	
自由度	554	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき（Welch の方法）

t値	8.807	
自由度	331.649	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 3

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.0	0.83	0.91
中位校	158	1.8	1.06	1.03
全体	556	2.7	1.19	1.09

等分散性の検定

F値	1.279	
第1自由度	157	
第2自由度	397	
P値	0.058	n.s.

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	13.678	
自由度	554	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	12.973	
自由度	259.720	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 4

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.7	0.78	0.89
中位校	158	1.6	0.74	0.86
全体	556	2.4	1.00	1.00

等分散性の検定

F値	1.054	
第1自由度	397	
第2自由度	157	
P値	0.710	n.s.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	12.958	
自由度	554	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	13.106	
自由度	295.401	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 5

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.3	0.56	0.75
中位校	158	1.9	0.98	0.99
全体	556	2.9	1.10	1.05

等分散性の検定

F値	1.737	
第1自由度	157	
第2自由度	397	
P値	0.000	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	18.519	
自由度	554	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	16.473	
自由度	232.154	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 6

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.6	0.69	0.83
中位校	158	1.7	0.72	0.85
全体	556	2.4	0.88	0.94

等分散性の検定

F値	1.052	
第1自由度	157	
第2自由度	397	
P値	0.687	n.s.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	11.871	
自由度	554	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	11.741	
自由度	281.933	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 7

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.0	1.00	1.00
中位校	158	1.6	0.68	0.82
全体	556	2.6	1.31	1.15

等分散性の検定

F値	1.484	
第1自由度	397	
第2自由度	157	
P値	0.004	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	15.721	
自由度	554	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	17.106	
自由度	348.597	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 8

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.1	1.00	1.00
中位校	158	2.0	1.15	1.07
全体	556	2.8	1.28	1.13

等分散性の検定

F値	1.141	
第1自由度	157	
第2自由度	397	
P値	0.309	n.s.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	11.346	
自由度	554	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	11.027	
自由度	272.221	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 9

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.3	0.74	0.86
中位校	158	1.3	0.40	0.63
全体	556	2.0	0.83	0.91

等分散性の検定

F値	1.861	
第1自由度	397	
第2自由度	157	
P値	0.000	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	12.991	
自由度	554	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	14.807	
自由度	390.410	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 10

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.5	0.48	0.69
中位校	158	2.5	1.31	1.14
全体	556	3.2	0.93	0.97

等分散性の検定

F値	2.711	
第1自由度	157	
第2自由度	397	
P値	0.000	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	13.012	
自由度	554	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	10.631	
自由度	204.620	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 11

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.6	1.14	1.07
中位校	158	1.6	0.72	0.85
全体	556	2.3	1.22	1.11

等分散性の検定

F値	1.569	
第1自由度	397	
第2自由度	157	
P値	0.001	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	10.540	
自由度	554	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	11.602	
自由度	358.437	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 12

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.0	0.69	0.83
中位校	158	2.0	0.93	0.96
全体	556	2.7	0.97	0.99

等分散性の検定

F値	1.343	
第1自由度	157	
第2自由度	397	
P値	0.023	*

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	12.479	
自由度	554	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	11.711	
自由度	254.697	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 13

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.3	0.61	0.78
中位校	158	2.0	1.19	1.09
全体	556	3.0	1.11	1.06

等分散性の検定

F値	1.967	
第1自由度	157	
第2自由度	397	
P値	0.000	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	15.747	
自由度	554	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	13.664	
自由度	223.180	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 14

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.1	0.72	0.85
中位校	158	1.8	0.94	0.97
全体	556	2.7	1.15	1.07

等分散性の検定

F値	1.305	
第1自由度	157	
第2自由度	397	
P値	0.040	*

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	16.049	
自由度	554	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	15.155	
自由度	257.610	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 15

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.8	0.91	0.95
中位校	158	1.7	0.79	0.89
全体	556	2.5	1.09	1.04

等分散性の検定

F値	1.147	
第1自由度	397	
第2自由度	157	
P値	0.317	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	11.809	
自由度	554	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	12.165	
自由度	307.386	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 16

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.2	0.65	0.81
中位校	158	2.2	1.05	1.02
全体	556	2.9	0.95	0.97

等分散性の検定

F値	1.612	
第1自由度	157	
第2自由度	397	
P値	0.000	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	11.538	
自由度	554	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	10.423	
自由度	238.156	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 17

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.0	0.85	0.92
中位校	158	2.1	1.16	1.08
全体	556	2.8	1.13	1.06

等分散性の検定

F値	1.360	
第1自由度	157	
第2自由度	397	
P値	0.018	*

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	10.760	
自由度	554	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	10.072	
自由度	253.492	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 18

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.2	0.67	0.82
中位校	158	2.0	1.06	1.03
全体	556	2.9	1.05	1.02

等分散性の検定

F値	1.583	
第1自由度	157	
第2自由度	397	
P値	0.000	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	13.877	
自由度	554	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	12.583	
自由度	239.679	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 19

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.2	0.68	0.83
中位校	158	2.3	1.25	1.12
全体	556	3.0	1.01	1.00

等分散性の検定

F値	1.829	
第1自由度	157	
第2自由度	397	
P値	0.000	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	10.518	
自由度	554	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	9.260	
自由度	228.304	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 20

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.1	0.79	0.89
中位校	158	1.8	1.03	1.02
全体	556	2.7	1.19	1.09

等分散性の検定

F値	1.307	
第1自由度	157	
第2自由度	397	
P値	0.039	*

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	14.657	
自由度	554	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	13.836	
自由度	257.436	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 21

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.1	0.62	0.79
中位校	158	1.8	0.89	0.94
全体	556	2.7	1.00	1.00

等分散性の検定

F値	1.442	
第1自由度	157	
第2自由度	397	
P値	0.005	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	15.747	
自由度	554	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	14.559	
自由度	247.936	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 22

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.6	0.89	0.94
中位校	158	1.5	0.60	0.77
全体	556	2.3	1.07	1.03

等分散性の検定

F値	1.494	
第1自由度	397	
第2自由度	157	
P値	0.004	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	13.406	
自由度	554	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	14.608	
自由度	349.806	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 23

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.2	0.80	0.90
中位校	158	2.5	1.35	1.16
全体	556	3.0	1.05	1.03

等分散性の検定

F値	1.678	
第1自由度	157	
第2自由度	397	
P値	0.000	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	7.628	
自由度	554	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	6.833	
自由度	234.877	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 24

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.7	0.80	0.89
中位校	158	1.6	0.68	0.82
全体	556	2.4	0.99	1.00

等分散性の検定

F値	1.181	
第1自由度	397	
第2自由度	157	
P値	0.225	n.s.

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	12.873	
自由度	554	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	13.344	
自由度	311.640	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目： 25

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.9	0.75	0.87
中位校	158	2.0	0.95	0.97
全体	556	2.7	1.00	1.00

等分散性の検定

F値	1.258	
第1自由度	157	
第2自由度	397	
P値	0.077	n.s.

注：この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定（t検定）

等分散性が仮定できるとき

t値	11.398	
自由度	554	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき（Welch の方法）

t値	10.848	
自由度	261.423	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注：上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目： 26

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.2	0.54	0.74
中位校	158	2.1	1.04	1.02
全体	556	2.9	0.95	0.98

等分散性の検定

F値	1.921	
第1自由度	157	
第2自由度	397	
P値	0.000	**

注：この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定（t検定）

等分散性が仮定できるとき

t値	14.877	
自由度	554	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき（Welch の方法）

t値	12.970	
自由度	224.816	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注：上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 27

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.9	0.75	0.87
中位校	158	2.1	0.90	0.95
全体	556	2.6	0.92	0.96

等分散性の検定

F値	1.194	
第1自由度	157	
第2自由度	397	
P値	0.173	n.s.

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	9.521	
自由度	554	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	9.163	
自由度	267.084	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 28

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.9	0.76	0.87
中位校	158	1.7	0.73	0.85
全体	556	2.6	1.06	1.03

等分散性の検定

F値	1.036	
第1自由度	397	
第2自由度	157	
P値	0.809	n.s.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	15.183	
自由度	554	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	15.298	
自由度	293.032	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 29

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.6	0.77	0.88
中位校	158	1.7	0.74	0.86
全体	556	2.3	0.93	0.96

等分散性の検定

F値	1.033	
第1自由度	397	
第2自由度	157	
P値	0.825	n.s.

平均値の差の検定（t検定）
等分散性が仮定できるとき

t値	11.020	
自由度	554	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき（Welch の方法）

t値	11.097	
自由度	292.668	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注：上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 30

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.4	0.83	0.91
中位校	158	1.6	0.65	0.81
全体	556	2.2	0.92	0.96

等分散性の検定

F値	1.279	
第1自由度	397	
第2自由度	157	
P値	0.073	n.s.

注：この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには，Welchの方法を採用すべきである．
平均値の差の検定（t検定）
等分散性が仮定できるとき

t値	9.966	
自由度	554	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき（Welch の方法）

t値	10.508	
自由度	323.905	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注：上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 31

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.6	0.70	0.84
中位校	158	1.6	0.60	0.77
全体	556	2.3	0.88	0.94

等分散性の検定

F値	1.176	
第1自由度	397	
第2自由度	157	
P値	0.236	n.s.

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	12.951	
自由度	554	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	13.414	
自由度	311.067	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 32

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.5	0.89	0.94
中位校	158	1.7	0.81	0.90
全体	556	2.3	0.99	0.99

等分散性の検定

F値	1.104	
第1自由度	397	
第2自由度	157	
P値	0.475	n.s.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	8.782	
自由度	554	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	8.970	
自由度	301.787	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 33

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.3	1.18	1.09
中位校	158	1.7	0.79	0.89
全体	556	2.1	1.13	1.06

等分散性の検定

F値	1.484	
第1自由度	397	
第2自由度	157	
P値	0.004	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	5.838	
自由度	554	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	6.352	
自由度	348.626	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 34

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.4	0.75	0.87
中位校	158	1.7	0.72	0.85
全体	556	2.2	0.84	0.92

等分散性の検定

F値	1.041	
第1自由度	397	
第2自由度	157	
P値	0.781	n.s.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	8.459	
自由度	554	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	8.532	
自由度	293.692	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 35

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.4	0.85	0.92
中位校	158	1.7	0.73	0.86
全体	556	2.2	0.94	0.97

等分散性の検定

F値	1.161	
第1自由度	397	
第2自由度	157	
P値	0.276	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	9.199	
自由度	554	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	9.501	
自由度	309.162	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 36

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.4	0.72	0.85
中位校	158	1.5	0.49	0.70
全体	556	2.2	0.81	0.90

等分散性の検定

F値	1.470	
第1自由度	397	
第2自由度	157	
P値	0.005	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	11.485	
自由度	554	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	12.472	
自由度	346.963	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 37

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.0	0.85	0.92
中位校	158	2.0	1.14	1.07
全体	556	2.7	1.11	1.05

等分散性の検定

F値	1.346	
第1自由度	157	
第2自由度	397	
P値	0.022	*

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	10.347	
自由度	554	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	9.708	
自由度	254.542	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 38

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.3	1.01	1.01
中位校	158	1.4	0.50	0.71
全体	556	2.0	1.01	1.00

等分散性の検定

F値	2.024	
第1自由度	397	
第2自由度	157	
P値	0.000	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	9.363	
自由度	554	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	10.850	
自由度	406.754	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 39

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.9	0.61	0.78
中位校	158	2.0	0.97	0.99
全体	556	2.7	0.89	0.94

等分散性の検定

F値	1.606	
第1自由度	157	
第2自由度	397	
P値	0.000	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	11.773	
自由度	554	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	10.643	
自由度	238.447	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 40

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.8	0.91	0.96
中位校	158	1.8	0.79	0.89
全体	556	2.5	1.10	1.05

等分散性の検定

F値	1.161	
第1自由度	397	
第2自由度	157	
P値	0.277	n.s.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	12.051	
自由度	554	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	12.446	
自由度	309.124	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 41

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.0	0.76	0.87
中位校	158	1.6	0.75	0.87
全体	556	2.6	1.11	1.05

等分散性の検定

F値	1.003	
第1自由度	397	
第2自由度	157	
P値	1.000	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	16.124	
自由度	554	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	16.133	
自由度	288.762	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 42

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.1	0.92	0.96
中位校	158	1.4	0.48	0.69
全体	556	1.9	0.89	0.94

等分散性の検定

F値	1.935	
第1自由度	397	
第2自由度	157	
P値	0.000	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.
平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	8.000	
自由度	554	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	9.190	
自由度	397.994	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 43

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.4	1.03	1.01
中位校	158	1.5	0.61	0.78
全体	556	2.1	1.08	1.04

等分散性の検定

F値	1.690	
第1自由度	397	
第2自由度	157	
P値	0.000	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	10.349	
自由度	554	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	11.568	
自由度	372.096	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 44

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.3	0.95	0.97
中位校	158	1.3	0.43	0.66
全体	556	2.1	1.00	1.00

等分散性の検定

F値	2.194	
第1自由度	397	
第2自由度	157	
P値	0.000	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	11.889	
自由度	554	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	13.994	
自由度	422.764	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 45

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.3	0.81	0.90
中位校	158	1.5	0.56	0.75
全体	556	2.1	0.90	0.95

等分散性の検定

F値	1.460	
第1自由度	397	
第2自由度	157	
P値	0.006	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	10.892	
自由度	554	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	11.812	
自由度	345.797	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 46

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.4	0.90	0.95
中位校	158	1.5	0.63	0.80
全体	556	2.2	1.00	1.00

等分散性の検定

F値	1.428	
第1自由度	397	
第2自由度	157	
P値	0.010	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	10.927	
自由度	554	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	11.793	
自由度	341.943	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 47

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.8	0.75	0.87
中位校	158	1.7	0.80	0.90
全体	556	2.5	1.00	1.00

等分散性の検定

F値	1.065	
第1自由度	157	
第2自由度	397	
P値	0.623	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	13.055	
自由度	554	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	12.879	
自由度	280.486	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 48

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.1	0.80	0.89
中位校	158	1.8	1.06	1.03
全体	556	2.7	1.19	1.09

等分散性の検定

F値	1.331	
第1自由度	157	
第2自由度	397	
P値	0.027	*

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	14.274	
自由度	554	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	13.423	
自由度	255.607	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

(3) 数学オリンピック予選参加者（GO）と下位校に関するｔ検定

質問項目：１

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.8	0.78	0.88
下位校	153	1.7	0.60	0.77
全体	551	2.5	0.98	0.99

等分散性の検定

F値	1.304	
第1自由度	397	
第2自由度	152	
P値	0.056	n.s.

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	13.693	
自由度	549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	14.524	
自由度	312.558	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目： 2

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.4	0.85	0.92
下位校	153	1.7	0.57	0.76
全体	551	2.2	0.85	0.92

等分散性の検定

F値	1.478	
第1自由度	397	
第2自由度	152	
P値	0.005	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定（t検定）

等分散性が仮定できるとき

t値	7.673	
自由度	549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき（Welch の方法）

t値	8.364	
自由度	332.727	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注：上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目： 3

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.0	0.83	0.91
下位校	153	1.8	0.84	0.92
全体	551	2.7	1.11	1.05

等分散性の検定

F値	1.017	
第1自由度	152	
第2自由度	397	
P値	0.886	n.s.

平均値の差の検定（t検定）

等分散性が仮定できるとき

t値	13.629	
自由度	549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき（Welch の方法）

t値	13.579	
自由度	273.690	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注：上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 4

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.7	0.78	0.89
下位校	153	1.6	0.71	0.84
全体	551	2.4	1.01	1.01

等分散性の検定

F値	1.111	
第1自由度	397	
第2自由度	152	
P値	0.453	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	13.512	
自由度	549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	13.830	
自由度	289.295	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 5

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.3	0.56	0.75
下位校	153	1.8	0.78	0.88
全体	551	2.9	1.10	1.05

等分散性の検定

F値	1.380	
第1自由度	152	
第2自由度	397	
P値	0.014	*

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	20.493	
自由度	549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	19.083	
自由度	241.299	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 6

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.6	0.69	0.83
下位校	153	1.6	0.59	0.76
全体	551	2.4	0.85	0.92

等分散性の検定

F値	1.177	
第1自由度	397	
第2自由度	152	
P値	0.241	n.s.

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	12.629	
自由度	549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	13.096	
自由度	297.385	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 7

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.0	1.00	1.00
下位校	153	1.5	0.58	0.76
全体	551	2.6	1.36	1.16

等分散性の検定

F値	1.729	
第1自由度	397	
第2自由度	152	
P値	0.000	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	17.143	
自由度	549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	19.320	
自由度	360.299	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 8

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.1	1.00	1.00
下位校	153	2.0	1.14	1.07
全体	551	2.8	1.30	1.14

等分散性の検定

F値	1.139	
第1自由度	152	
第2自由度	397	
P値	0.320	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	11.753	
自由度	549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	11.417	
自由度	260.533	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 9

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.3	0.74	0.86
下位校	153	1.3	0.38	0.62
全体	551	2.0	0.82	0.91

等分散性の検定

F値	1.921	
第1自由度	397	
第2自由度	152	
P値	0.000	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.
平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	12.545	
自由度	549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	14.450	
自由度	380.012	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 10

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.5	0.48	0.69
下位校	153	2.2	1.17	1.08
全体	551	3.2	0.99	0.99

等分散性の検定

F値	2.435	
第1自由度	152	
第2自由度	397	
P値	0.000	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	15.994	
自由度	549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	13.248	
自由度	201.847	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 11

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.6	1.14	1.07
下位校	153	1.6	0.70	0.84
全体	551	2.3	1.21	1.10

等分散性の検定

F値	1.625	
第1自由度	397	
第2自由度	152	
P値	0.001	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	10.370	
自由度	549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	11.534	
自由度	349.031	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 12

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.0	0.69	0.83
下位校	153	1.7	0.65	0.81
全体	551	2.7	1.03	1.02

等分散性の検定

F値	1.067	
第1自由度	397	
第2自由度	152	
P値	0.645	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	16.952	
自由度	549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	17.200	
自由度	284.032	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 13

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.3	0.61	0.78
下位校	153	1.9	1.03	1.01
全体	551	2.9	1.12	1.06

等分散性の検定

F値	1.695	
第1自由度	152	
第2自由度	397	
P値	0.000	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.
平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	17.532	
自由度	549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	15.621	
自由度	224.347	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 14

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.1	0.72	0.85
下位校	153	1.6	0.67	0.82
全体	551	2.7	1.14	1.07

等分散性の検定

F値	1.083	
第1自由度	397	
第2自由度	152	
P値	0.571	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	18.361	
自由度	549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	18.690	
自由度	285.942	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 15

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.8	0.91	0.95
下位校	153	1.8	0.82	0.91
全体	551	2.5	1.09	1.05

等分散性の検定

F値	1.105	
第1自由度	397	
第2自由度	152	
P値	0.476	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	11.558	
自由度	549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	11.817	
自由度	288.593	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 16

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.2	0.65	0.81
下位校	153	1.9	0.78	0.88
全体	551	2.8	0.99	1.00

等分散性の検定

F値	1.195	
第1自由度	152	
第2自由度	397	
P値	0.175	n.s.

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	15.678	
自由度	549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	15.070	
自由度	255.413	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 17

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.0	0.85	0.92
下位校	153	1.9	0.76	0.87
全体	551	2.7	1.09	1.04

等分散性の検定

F値	1.116	
第1自由度	397	
第2自由度	152	
P値	0.434	n.s.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	13.276	
自由度	549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	13.603	
自由度	289.908	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 18

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.2	0.67	0.82
下位校	153	2.3	1.10	1.05
全体	551	2.9	0.94	0.97

等分散性の検定

F値	1.650	
第1自由度	152	
第2自由度	397	
P値	0.000	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	10.287	
自由度	549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	9.218	
自由度	226.382	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 19

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.2	0.68	0.83
下位校	153	2.4	1.00	1.00
全体	551	3.0	0.90	0.95

等分散性の検定

F値	1.462	
第1自由度	152	
第2自由度	397	
P値	0.004	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	9.882	
自由度	549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	9.087	
自由度	236.168	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 20

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.1	0.79	0.89
下位校	153	1.7	0.74	0.86
全体	551	2.7	1.14	1.07

等分散性の検定

F値	1.063	
第1自由度	397	
第2自由度	152	
P値	0.667	n.s.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	16.007	
自由度	549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	16.227	
自由度	283.496	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 21

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.1	0.62	0.79
下位校	153	2.0	0.90	0.95
全体	551	2.7	0.94	0.97

等分散性の検定

F値	1.457	
第1自由度	152	
第2自由度	397	
P値	0.004	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	13.819	
自由度	549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	12.717	
自由度	236.480	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 22

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.6	0.89	0.94
下位校	153	1.6	0.69	0.83
全体	551	2.3	1.05	1.02

等分散性の検定

F値	1.290	
第1自由度	397	
第2自由度	152	
P値	0.068	n.s.

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	11.864	
自由度	549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	12.552	
自由度	310.806	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 23

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.2	0.80	0.90
下位校	153	2.1	1.03	1.02
全体	551	2.9	1.08	1.04

等分散性の検定

F値	1.285	
第1自由度	152	
第2自由度	397	
P値	0.056	n.s.

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	11.744	
自由度	549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	11.108	
自由度	248.050	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 24

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.7	0.80	0.89
下位校	153	1.7	0.55	0.74
全体	551	2.4	0.94	0.97

等分散性の検定

F値	1.451	
第1自由度	397	
第2自由度	152	
P値	0.008	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	12.679	
自由度	549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	13.764	
自由度	329.579	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 25

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.9	0.75	0.87
下位校	153	1.9	0.93	0.96
全体	551	2.6	1.01	1.01

等分散性の検定

F値	1.236	
第1自由度	152	
第2自由度	397	
P値	0.107	n.s.

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	12.088	
自由度	549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	11.533	
自由度	251.956	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 26

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.2	0.54	0.74
下位校	153	2.2	0.89	0.94
全体	551	2.9	0.86	0.93

等分散性の検定

F値	1.641	
第1自由度	152	
第2自由度	397	
P値	0.000	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	13.808	
自由度	549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	12.388	
自由度	226.814	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 27

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.9	0.75	0.87
下位校	153	2.0	0.78	0.88
全体	551	2.6	0.92	0.96

等分散性の検定

F値	1.037	
第1自由度	152	
第2自由度	397	
P値	0.774	n.s.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	10.774	
自由度	549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	10.688	
自由度	271.345	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 28

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.9	0.76	0.87
下位校	153	1.7	0.68	0.82
全体	551	2.6	1.04	1.02

等分散性の検定

F値	1.112	
第1自由度	397	
第2自由度	152	
P値	0.449	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	15.116	
自由度	549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	15.476	
自由度	289.422	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 29

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.6	0.77	0.88
下位校	153	1.6	0.56	0.75
全体	551	2.3	0.90	0.95

等分散性の検定

F値	1.377	
第1自由度	397	
第2自由度	152	
P値	0.022	*

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	12.229	
自由度	549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	13.126	
自由度	321.059	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 30

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.4	0.83	0.91
下位校	153	1.6	0.51	0.71
全体	551	2.2	0.88	0.94

等分散性の検定

F値	1.636	
第1自由度	397	
第2自由度	152	
P値	0.000	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	10.265	
自由度	549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	11.435	
自由度	350.320	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 31

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.6	0.70	0.84
下位校	153	1.6	0.59	0.77
全体	551	2.3	0.88	0.94

等分散性の検定

F値	1.199	
第1自由度	397	
第2自由度	152	
P値	0.192	n.s.

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	13.079	
自由度	549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	13.617	
自由度	299.985	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 32

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.5	0.89	0.94
下位校	153	1.6	0.63	0.79
全体	551	2.2	0.96	0.98

等分散性の検定

F値	1.412	
第1自由度	397	
第2自由度	152	
P値	0.014	*

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	9.879	
自由度	549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	10.663	
自由度	325.178	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 33

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.3	1.18	1.09
下位校	153	1.9	0.87	0.93
全体	551	2.2	1.12	1.06

等分散性の検定

F値	1.355	
第1自由度	397	
第2自由度	152	
P値	0.029	*

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	4.160	
自由度	549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	4.450	
自由度	318.515	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 34

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.4	0.75	0.87
下位校	153	1.8	0.72	0.85
全体	551	2.2	0.82	0.90

等分散性の検定

F値	1.052	
第1自由度	397	
第2自由度	152	
P値	0.724	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	7.381	
自由度	549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	7.465	
自由度	282.130	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 35

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.4	0.85	0.92
下位校	153	1.7	0.74	0.86
全体	551	2.2	0.93	0.97

等分散性の検定

F値	1.151	
第1自由度	397	
第2自由度	152	
P値	0.312	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	8.751	
自由度	549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	9.029	
自由度	294.217	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 36

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.4	0.72	0.85
下位校	153	1.6	0.63	0.80
全体	551	2.2	0.82	0.91

等分散性の検定

F値	1.144	
第1自由度	397	
第2自由度	152	
P値	0.333	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	9.901	
自由度	549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	10.203	
自由度	293.412	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 37

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.0	0.85	0.92
下位校	153	2.1	0.88	0.94
全体	551	2.7	1.01	1.01

等分散性の検定

F値	1.042	
第1自由度	152	
第2自由度	397	
P値	0.742	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	10.055	
自由度	549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	9.962	
自由度	270.688	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 38

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.3	1.01	1.01
下位校	153	1.4	0.41	0.64
全体	551	2.0	0.99	1.00

等分散性の検定

F値	2.453	
第1自由度	397	
第2自由度	152	
P値	0.000	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	9.656	
自由度	549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	11.673	
自由度	428.104	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 39

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.9	0.61	0.78
下位校	153	2.0	0.89	0.95
全体	551	2.7	0.86	0.93

等分散性の検定

F値	1.474	
第1自由度	152	
第2自由度	397	
P値	0.003	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	11.930	
自由度	549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	10.951	
自由度	235.472	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 40

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.8	0.91	0.96
下位校	153	1.8	0.71	0.84
全体	551	2.5	1.05	1.03

等分散性の検定

F値	1.281	
第1自由度	397	
第2自由度	152	
P値	0.075	n.s.

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	11.249	
自由度	549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	11.885	
自由度	309.846	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 41

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.0	0.76	0.87
下位校	153	1.7	0.62	0.79
全体	551	2.6	1.04	1.02

等分散性の検定

F値	1.216	
第1自由度	397	
第2自由度	152	
P値	0.160	n.s.

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	15.675	
自由度	549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	16.370	
自由度	302.024	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 42

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.1	0.92	0.96
下位校	153	1.5	0.48	0.69
全体	551	1.9	0.87	0.93

等分散性の検定

F値	1.943	
第1自由度	397	
第2自由度	152	
P値	0.000	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	6.960	
自由度	549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	8.035	
自由度	382.175	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 43

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.4	1.03	1.01
下位校	153	1.4	0.48	0.70
全体	551	2.1	1.06	1.03

等分散性の検定

F値	2.123	
第1自由度	397	
第2自由度	152	
P値	0.000	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	10.899	
自由度	549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	12.809	
自由度	399.454	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 44

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.3	0.95	0.97
下位校	153	1.3	0.39	0.63
全体	551	2.1	1.00	1.00

等分散性の検定

F値	2.416	
第1自由度	397	
第2自由度	152	
P値	0.000	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	12.060	
自由度	549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	14.536	
自由度	425.066	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 45

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.3	0.81	0.90
下位校	153	1.5	0.58	0.76
全体	551	2.1	0.90	0.95

等分散性の検定

F値	1.401	
第1自由度	397	
第2自由度	152	
P値	0.016	*

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	10.681	
自由度	549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	11.508	
自由度	323.858	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 46

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.4	0.90	0.95
下位校	153	1.5	0.51	0.72
全体	551	2.2	0.97	0.99

等分散性の検定

F値	1.759	
第1自由度	397	
第2自由度	152	
P値	0.000	**

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	11.132	
自由度	549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	12.590	
自由度	363.416	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 47

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	2.8	0.75	0.87
下位校	153	1.7	0.72	0.85
全体	551	2.5	1.00	1.00

等分散性の検定

F値	1.043	
第1自由度	397	
第2自由度	152	
P値	0.771	n.s.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	13.688	
自由度	549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	13.817	
自由度	281.042	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 48

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
数学オリンピック予選参加者	398	3.1	0.80	0.89
下位校	153	1.7	0.71	0.84
全体	551	2.7	1.16	1.08

等分散性の検定

F値	1.127	
第1自由度	397	
第2自由度	152	
P値	0.391	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	16.618	
自由度	549	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	17.066	
自由度	291.302	
P値	0.000	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

付録3 数学オリンピック予選参加者（G0），合格者（G1）と上位校，中位校，下位校に関する判別分析

(1) 数学オリンピック予選参加者（G0）と上位校に関する判別分析

	G0	上位校	計
G0	388	10	398
	97.5	2.5	100.0
上位校	17	126	143
	11.9	88.1	100.0

上段（人）
下段（%）

正判別率：95.0（%）

(2) 数学オリンピック予選参加者（G0）と中位校に関する判別分析

	G0	中位校	計
G0	390	8	398
	98.0	2.0	100.0
中位校	43	115	158
	27.2	72.8	100.0

上段（人）
下段（%）

正判別率：90.8（%）

(3) 数学オリンピック予選参加者（G0）と下位校に関する判別分析

	G0	下位校	計
G0	392	6	398
	98.5	1.5	100.0
下位校	39	114	153
	25.5	74.5	100.0

上段（人）
下段（%）

正判別率：91.8（%）

(4) 数学オリンピック予選合格者（G1）と上位校に関する判別分析

		G1	上位校	計
G1		47	9	56
		83.9	16.1	100.0
上位校		0	143	143
		0.0	100.0	100.0

上段(人)
下段(%)

正判別率:95.5(%)

(5) 数学オリンピック予選合格者（G1）と中位校に関する判別分析

		G1	中位校	計
G1		53	3	56
		94.6	5.4	100.0
中位校		0	158	158
		0.0	100.0	100.0

上段(人)
下段(%)

正判別率:98.6(%)

(6) 数学オリンピック予選合格者（G1）と下位校に関する判別分析

		G1	下位校	計
G1		52	4	56
		92.9	7.1	100.0
下位校		0	153	153
		0.0	100.0	100.0

上段(人)
下段(%)

正判別率:98.1(%)

(7) 数学オリンピック予選合格者（G1）と公立上位校に関する判別分析

	G1	公立上位校	計
G1	56	0	56
	100.0	0.0	100.0
公立 上位校	0	73	73
	0.0	100.0	100.0

上段(人)
下段(%)

正判別率:100.0(%)

(8) 数学オリンピック予選合格者（G1）と公立中位校に関する判別分析

	G1	公立中位校	計
G1	56	0	56
	100.0	0.0	100.0
公立 中位校	0	74	74
	0.0	100.0	100.0

上段(人)
下段(%)

正判別率:100.0(%)

(9) 数学オリンピック予選合格者（G1）と公立下位校に関する判別分析

	G1	公立下位校	計
G1	56	0	56
	100.0	0.0	100.0
公立 下位校	0	70	70
	0.0	100.0	100.0

上段(人)
下段(%)

正判別率:100.0(%)

(10) 数学オリンピック予選合格者（G1）と私立上位校に関する判別分析

	G1	私立上位校	計
G1	55	1	56
	98.2	1.8	100.0
私立 上位校	0	70	70
	0.0	100.0	100.0

上段(人)
下段(%)

正判別率:99.2(%)

(11) 数学オリンピック予選合格者（G1）と私立中位校に関する判別分析

	G1	私立中位校	計
G1	56	0	56
	100.0	0.0	100.0
私立 中位校	1	83	84
	1.2	98.8	100.0

上段(人)
下段(%)

正判別率:99.3(%)

(12) 数学オリンピック予選合格者（G1）と私立下位校に関する判別分析

	G1	私立下位校	計
G1	55	1	56
	98.2	1.8	100.0
私立 下位校	0	83	84
	0.0	100.0	100.0

上段(人)
下段(%)

正判別率:99.3(%)

付録 4 数学オリンピック予選合格者（G1）と不合格者（G2）に関する t 検定

付録 4 の基礎データにおける小数点以下の表記について次のとおり定める.

・平均値：測定データの精度＋1 桁とする．本研究の測定データは，1～4 の整数値であるため小数第 1 位の表記となる.

・不偏分散，標準偏差：測定データの精度＋2 桁とする．本研究の測定データは，1～4 の整数値であるため小数第 2 位の表記となる.

・F 値，t 値，P 値，自由度：統計数値表の桁数に従う．一般的な統計数値表は小数点第 3 位で用意されているため，本研究もこれに従う.

・P 値が 0.00001 よりも小さい場合，以下の表では 0.000 と記載する.

質問項目：1

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
G1	56	2.9	0.98	0.99
G2	342	2.8	0.75	0.87
全体	398	2.8	0.78	0.88

等分散性の検定

F値	1.304	
第1自由度	55	
第2自由度	341	
P値	0.168	n.s.

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	0.886	
自由度	396	
P値	0.376	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	0.805	
自由度	69.503	
P値	0.424	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 2

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
G1	56	2.4	0.80	0.89
G2	342	2.3	0.85	0.92
全体	398	2.4	0.85	0.92

等分散性の検定

F値	1.072	
第1自由度	341	
第2自由度	55	
P値	0.776	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	0.765	
自由度	396	
P値	0.445	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	0.784	
自由度	75.621	
P値	0.436	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 3

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
G1	56	3.1	0.74	0.86
G2	342	3.0	0.84	0.92
全体	398	3.0	0.83	0.91

等分散性の検定

F値	1.129	
第1自由度	341	
第2自由度	55	
P値	0.596	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	1.002	
自由度	396	
P値	0.317	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	1.046	
自由度	76.788	
P値	0.299	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目：4

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
G1	56	2.7	0.94	0.97
G2	342	2.7	0.76	0.87
全体	398	2.7	0.78	0.89

等分散性の検定

F値	1.240	
第1自由度	55	
第2自由度	341	
P値	0.262	n.s.

平均値の差の検定（t検定）
等分散性が仮定できるとき

t値	0.065	
自由度	396	
P値	0.949	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき（Welch の方法）

t値	0.060	
自由度	70.285	
P値	0.953	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

注：上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目：5

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
G1	56	3.4	0.47	0.69
G2	342	3.3	0.58	0.76
全体	398	3.3	0.56	0.75

等分散性の検定

F値	1.230	
第1自由度	341	
第2自由度	55	
P値	0.353	n.s.

平均値の差の検定（t検定）
等分散性が仮定できるとき

t値	1.127	
自由度	396	
P値	0.260	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき（Welch の方法）

t値	1.214	
自由度	78.859	
P値	0.228	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

注：上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 6

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
G1	56	2.9	0.57	0.76
G2	342	2.6	0.70	0.83
全体	398	2.6	0.69	0.83

等分散性の検定

F値	1.221	
第1自由度	341	
第2自由度	55	
P値	0.370	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	2.643	
自由度	396	
P値	0.009	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	2.840	
自由度	78.682	
P値	0.006	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 7

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
G1	56	2.9	0.96	0.98
G2	342	3.0	1.01	1.01
全体	398	3.0	1.00	1.00

等分散性の検定

F値	1.053	
第1自由度	341	
第2自由度	55	
P値	0.842	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	0.472	
自由度	396	
P値	0.637	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	0.481	
自由度	75.238	
P値	0.632	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 8

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
G1	56	3.2	1.00	1.00
G2	342	3.1	1.01	1.00
全体	398	3.1	1.00	1.00

等分散性の検定

F値	1.010	
第1自由度	341	
第2自由度	55	
P値	1.001	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	0.651	
自由度	396	
P値	0.516	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	0.653	
自由度	74.369	
P値	0.516	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 9

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
G1	56	2.4	0.67	0.82
G2	342	2.3	0.75	0.87
全体	398	2.3	0.74	0.86

等分散性の検定

F値	1.118	
第1自由度	341	
第2自由度	55	
P値	0.628	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	0.594	
自由度	396	
P値	0.553	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	0.618	
自由度	76.567	
P値	0.538	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目：10

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
G1	56	3.4	0.50	0.71
G2	342	3.5	0.48	0.69
全体	398	3.5	0.48	0.69

等分散性の検定

F値	1.051	
第1自由度	55	
第2自由度	341	
P値	0.769	n.s.

平均値の差の検定（t検定）
等分散性が仮定できるとき

t値	0.801	
自由度	396	
P値	0.424	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき（Welch の方法）

t値	0.786	
自由度	73.184	
P値	0.434	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

注：上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目：11

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
G1	56	2.5	1.02	1.01
G2	342	2.6	1.16	1.08
全体	398	2.6	1.14	1.07

等分散性の検定

F値	1.138	
第1自由度	341	
第2自由度	55	
P値	0.570	n.s.

平均値の差の検定（t検定）
等分散性が仮定できるとき

t値	0.547	
自由度	396	
P値	0.584	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.2	

等分散性が仮定できないとき（Welch の方法）

t値	0.573	
自由度	76.974	
P値	0.568	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

注：上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 12

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
G1	56	3.0	0.71	0.84
G2	342	3.0	0.69	0.83
全体	398	3.0	0.69	0.83

等分散性の検定

F値	1.025	
第1自由度	55	
第2自由度	341	
P値	0.865	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	0.046	
自由度	396	
P値	0.963	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	0.046	
自由度	73.674	
P値	0.964	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 13

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
G1	56	3.4	0.46	0.68
G2	342	3.3	0.63	0.79
全体	398	3.3	0.61	0.78

等分散性の検定

F値	1.352	
第1自由度	341	
第2自由度	55	
P値	0.173	n.s.

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	0.820	
自由度	396	
P値	0.413	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	0.914	
自由度	81.412	
P値	0.363	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 14

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
G1	56	3.2	0.58	0.76
G2	342	3.1	0.74	0.86
全体	398	3.1	0.72	0.85

等分散性の検定

F値	1.278	
第1自由度	341	
第2自由度	55	
P値	0.269	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	1.180	
自由度	396	
P値	0.239	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	1.289	
自由度	79.859	
P値	0.201	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 15

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
G1	56	2.8	0.86	0.93
G2	342	2.8	0.91	0.96
全体	398	2.8	0.91	0.95

等分散性の検定

F値	1.057	
第1自由度	341	
第2自由度	55	
P値	0.827	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	0.469	
自由度	396	
P値	0.639	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	0.479	
自由度	75.324	
P値	0.633	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 16

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
G1	56	3.2	0.57	0.76
G2	342	3.2	0.67	0.82
全体	398	3.2	0.65	0.81

等分散性の検定

F値	1.164	
第1自由度	341	
第2自由度	55	
P値	0.500	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	0.510	
自由度	396	
P値	0.611	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	0.538	
自由度	77.507	
P値	0.592	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 17

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
G1	56	3.2	0.65	0.81
G2	342	3.0	0.88	0.94
全体	398	3.0	0.85	0.92

等分散性の検定

F値	1.340	
第1自由度	341	
第2自由度	55	
P値	0.186	n.s.

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	1.773	
自由度	396	
P値	0.077	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	1.969	
自由度	81.159	
P値	0.052	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 18

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
G1	56	3.1	0.75	0.87
G2	342	3.2	0.65	0.81
全体	398	3.2	0.67	0.82

等分散性の検定

F値	1.149	
第1自由度	55	
第2自由度	341	
P値	0.461	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	0.803	
自由度	396	
P値	0.422	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	0.764	
自由度	71.552	
P値	0.447	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 19

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
G1	56	3.2	0.59	0.77
G2	342	3.3	0.70	0.84
全体	398	3.2	0.68	0.83

等分散性の検定

F値	1.191	
第1自由度	341	
第2自由度	55	
P値	0.435	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	0.686	
自由度	396	
P値	0.493	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	0.730	
自由度	78.061	
P値	0.467	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 20

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
G1	56	3.2	0.74	0.86
G2	342	3.1	0.80	0.89
全体	398	3.1	0.79	0.89

等分散性の検定

F値	1.075	
第1自由度	341	
第2自由度	55	
P値	0.764	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	0.985	
自由度	396	
P値	0.325	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	1.011	
自由度	75.698	
P値	0.315	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 21

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
G1	56	3.1	0.53	0.73
G2	342	3.0	0.63	0.79
全体	398	3.1	0.62	0.79

等分散性の検定

F値	1.184	
第1自由度	341	
第2自由度	55	
P値	0.452	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	0.584	
自由度	396	
P値	0.559	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	0.621	
自由度	77.912	
P値	0.537	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 22

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
G1	56	2.7	0.88	0.94
G2	342	2.6	0.89	0.95
全体	398	2.6	0.89	0.94

等分散性の検定

F値	1.020	
第1自由度	341	
第2自由度	55	
P値	0.964	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	0.453	
自由度	396	
P値	0.651	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	0.456	
自由度	74.565	
P値	0.650	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 23

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
G1	56	3.2	0.72	0.85
G2	342	3.2	0.82	0.90
全体	398	3.2	0.80	0.90

等分散性の検定

F値	1.137	
第1自由度	341	
第2自由度	55	
P値	0.572	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	0.023	
自由度	396	
P値	0.981	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	0.025	
自由度	76.956	
P値	0.980	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 24

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
G1	56	2.7	0.83	0.91
G2	342	2.7	0.80	0.89
全体	398	2.7	0.80	0.89

等分散性の検定

F値	1.048	
第1自由度	55	
第2自由度	341	
P値	0.780	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	0.064	
自由度	396	
P値	0.949	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	0.063	
自由度	73.240	
P値	0.950	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 25

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
G1	56	3.0	0.76	0.87
G2	342	2.9	0.75	0.87
全体	398	2.9	0.75	0.87

等分散性の検定

F値	1.014	
第1自由度	55	
第2自由度	341	
P値	0.908	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	0.630	
自由度	396	
P値	0.529	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	0.627	
自由度	73.891	
P値	0.532	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 26

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
G1	56	3.3	0.56	0.75
G2	342	3.2	0.54	0.73
全体	398	3.2	0.54	0.74

等分散性の検定

F値	1.046	
第1自由度	55	
第2自由度	341	
P値	0.788	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	0.402	
自由度	396	
P値	0.688	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	0.396	
自由度	73.280	
P値	0.693	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 27

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
G1	56	2.9	0.66	0.82
G2	342	2.9	0.77	0.88
全体	398	2.9	0.75	0.87

等分散性の検定

F値	1.159	
第1自由度	341	
第2自由度	55	
P値	0.512	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	0.454	
自由度	396	
P値	0.650	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	0.479	
自由度	77.409	
P値	0.633	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 28

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
G1	56	3.1	0.69	0.83
G2	342	2.9	0.76	0.87
全体	398	2.9	0.76	0.87

等分散性の検定

F値	1.095	
第1自由度	341	
第2自由度	55	
P値	0.699	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	1.985	
自由度	396	
P値	0.048	*
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	2.051	
自由度	76.097	
P値	0.044	*
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 29

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
G1	56	2.6	0.83	0.91
G2	342	2.6	0.76	0.87
全体	398	2.6	0.77	0.88

等分散性の検定

F値	1.088	
第1自由度	55	
第2自由度	341	
P値	0.644	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	0.128	
自由度	396	
P値	0.898	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	0.124	
自由度	72.542	
P値	0.902	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 30

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
G1	56	2.5	0.76	0.87
G2	342	2.4	0.85	0.92
全体	398	2.4	0.83	0.91

等分散性の検定

F値	1.111	
第1自由度	341	
第2自由度	55	
P値	0.650	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	0.417	
自由度	396	
P値	0.677	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	0.433	
自由度	76.414	
P値	0.666	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 31

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
G1	56	2.6	0.82	0.90
G2	342	2.6	0.69	0.83
全体	398	2.6	0.70	0.84

等分散性の検定

F値	1.184	
第1自由度	55	
第2自由度	341	
P値	0.375	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	0.455	
自由度	396	
P値	0.649	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	0.428	
自由度	71.044	
P値	0.670	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目： 32

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
G1	56	2.7	0.74	0.86
G2	342	2.4	0.91	0.95
全体	398	2.5	0.89	0.94

等分散性の検定

F値	1.235	
第1自由度	341	
第2自由度	55	
P値	0.342	n.s.

平均値の差の検定（t検定）
等分散性が仮定できるとき

t値	1.572	
自由度	396	
P値	0.117	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき（Welch の方法）

t値	1.696	
自由度	78.976	
P値	0.094	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

注：上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目： 33

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
G1	56	2.5	1.27	1.13
G2	342	2.2	1.16	1.08
全体	398	2.3	1.18	1.09

等分散性の検定

F値	1.097	
第1自由度	55	
第2自由度	341	
P値	0.615	n.s.

平均値の差の検定（t検定）
等分散性が仮定できるとき

t値	1.399	
自由度	396	
P値	0.162	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.2	

等分散性が仮定できないとき（Welch の方法）

t値	1.354	
自由度	72.391	
P値	0.180	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.2	

注：上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 34

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
G1	56	2.6	0.64	0.80
G2	342	2.3	0.76	0.87
全体	398	2.4	0.75	0.87

等分散性の検定

F値	1.195	
第1自由度	341	
第2自由度	55	
P値	0.424	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	2.319	
自由度	396	
P値	0.021	*
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	2.473	
自由度	78.156	
P値	0.016	*
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 35

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
G1	56	2.5	0.76	0.87
G2	342	2.4	0.87	0.93
全体	398	2.4	0.85	0.92

等分散性の検定

F値	1.138	
第1自由度	341	
第2自由度	55	
P値	0.568	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	0.773	
自由度	396	
P値	0.440	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	0.810	
自由度	76.986	
P値	0.420	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目： 36

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
G1	56	2.6	0.64	0.80
G2	342	2.4	0.73	0.86
全体	398	2.4	0.72	0.85

等分散性の検定

F値	1.145	
第1自由度	341	
第2自由度	55	
P値	0.551	n.s.

平均値の差の検定（t検定）
等分散性が仮定できるとき

t値	2.124	
自由度	396	
P値	0.034	*
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき（Welch の方法）

t値	2.230	
自由度	77.116	
P値	0.029	*
平均値の差の標準誤差	0.1	

注：上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目： 37

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
G1	56	3.0	0.87	0.93
G2	342	3.0	0.85	0.92
全体	398	3.0	0.85	0.92

等分散性の検定

F値	1.031	
第1自由度	55	
第2自由度	341	
P値	0.844	n.s.

平均値の差の検定（t検定）
等分散性が仮定できるとき

t値	0.061	
自由度	396	
P値	0.951	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき（Welch の方法）

t値	0.061	
自由度	73.566	
P値	0.952	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

注：上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目： 38

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
G1	56	2.4	1.07	1.03
G2	342	2.2	1.01	1.00
全体	398	2.3	1.01	1.01

等分散性の検定

F値	1.063	
第1自由度	55	
第2自由度	341	
P値	0.727	n.s.

平均値の差の検定（t検定）
等分散性が仮定できるとき

t値	0.848	
自由度	396	
P値	0.397	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき（Welch　の方法）

t値	0.830	
自由度	72.970	
P値	0.409	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

注：上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目： 39

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
G1	56	3.1	0.69	0.83
G2	342	2.9	0.59	0.77
全体	398	2.9	0.61	0.78

等分散性の検定

F値	1.159	
第1自由度	55	
第2自由度	341	
P値	0.437	n.s.

平均値の差の検定（t検定）
等分散性が仮定できるとき

t値	1.498	
自由度	396	
P値	0.135	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき（Welch　の方法）

t値	1.420	
自由度	71.414	
P値	0.160	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

注：上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 40

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
G1	56	3.0	0.85	0.92
G2	342	2.8	0.92	0.96
全体	398	2.8	0.91	0.96

等分散性の検定

F値	1.076	
第1自由度	341	
第2自由度	55	
P値	0.762	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	1.422	
自由度	396	
P値	0.156	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	1.460	
自由度	75.708	
P値	0.148	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 41

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
G1	56	3.0	0.82	0.90
G2	342	2.9	0.75	0.86
全体	398	3.0	0.76	0.87

等分散性の検定

F値	1.093	
第1自由度	55	
第2自由度	341	
P値	0.625	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	0.562	
自由度	396	
P値	0.575	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	0.544	
自由度	72.444	
P値	0.588	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 42

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
G1	56	1.9	0.66	0.81
G2	342	2.1	0.96	0.98
全体	398	2.1	0.92	0.96

等分散性の検定

F値	1.459	
第1自由度	341	
第2自由度	55	
P値	0.089	n.s.

注:この検定結果に基づいて平均値の差の検定方法を選択するときには,Welchの方法を採用すべきである.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	1.965	
自由度	396	
P値	0.050	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	2.250	
自由度	83.640	
P値	0.027	*
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 43

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
G1	56	2.1	0.88	0.94
G2	342	2.5	1.03	1.02
全体	398	2.4	1.03	1.01

等分散性の検定

F値	1.172	
第1自由度	341	
第2自由度	55	
P値	0.480	n.s.

平均値の差の検定(t検定)

等分散性が仮定できるとき

t値	2.508	
自由度	396	
P値	0.013	*
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	2.655	
自由度	77.670	
P値	0.010	**
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 44

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
G1	56	2.3	1.04	1.02
G2	342	2.4	0.94	0.97
全体	398	2.3	0.95	0.97

等分散性の検定

F値	1.107	
第1自由度	55	
第2自由度	341	
P値	0.582	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	0.674	
自由度	396	
P値	0.501	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	0.650	
自由度	72.214	
P値	0.518	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 45

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
G1	56	2.4	0.86	0.93
G2	342	2.3	0.81	0.90
全体	398	2.3	0.81	0.90

等分散性の検定

F値	1.073	
第1自由度	55	
第2自由度	341	
P値	0.692	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	0.550	
自由度	396	
P値	0.583	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	0.536	
自由度	72.786	
P値	0.593	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 46

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
G1	56	2.5	0.87	0.93
G2	342	2.4	0.91	0.95
全体	398	2.4	0.90	0.95

等分散性の検定

F値	1.044	
第1自由度	341	
第2自由度	55	
P値	0.874	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	0.661	
自由度	396	
P値	0.509	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	0.671	
自由度	75.057	
P値	0.504	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 47

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
G1	56	2.8	0.83	0.91
G2	342	2.8	0.74	0.86
全体	398	2.8	0.75	0.87

等分散性の検定

F値	1.112	
第1自由度	55	
第2自由度	341	
P値	0.568	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	0.444	
自由度	396	
P値	0.657	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	0.427	
自由度	72.138	
P値	0.670	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

質問項目: 48

	人数	平均値	不偏分散	標準偏差
G1	56	3.1	0.74	0.86
G2	342	3.1	0.81	0.90
全体	398	3.1	0.80	0.89

等分散性の検定

F値	1.095	
第1自由度	341	
第2自由度	55	
P値	0.698	n.s.

平均値の差の検定(t検定)
等分散性が仮定できるとき

t値	0.101	
自由度	396	
P値	0.919	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

等分散性が仮定できないとき(Welch の方法)

t値	0.105	
自由度	76.104	
P値	0.917	n.s.
平均値の差の標準誤差	0.1	

注:上のP値は小数自由度に対応した正確な値である

付録５ 数学オリンピック予選合格者（G1）のデンドログラム（質問項目入り）

群	下位群	クラスター	質問項目	平均	分散
Ⅰ	iii	①	40数学の授業で学んだことを長い間覚えています	2.98	0.85
			41数学の授業で学んだ色々な話題どうしを結びつけたり関連付けたりします	3.02	0.82
			17長い間，続けて考えられます	3.23	0.65
			48受け身の学習することよりも自ら学習することを好みます	3.09	0.74
			26簡単に問題を解くことができないとき，別の方法を見つけようとします	3.27	0.56
			25問題を解いた結果に法則性を見つけます	3	0.76
			39問題の要点とそれを解く方法を理解します	3.07	0.69
			8やさしくて反復練習の多い宿題は嫌いです	3.2	1
			7上級学年の教科書や課題に取り組みたいと思っています/取り組んでいます	2.95	0.96
		②	1同級生よりも速く，かつ上手く数学を学べます	2.93	0.98
			6新しい数学の内容を思い出して簡単に使うことができます	2.89	0.57
	i	③	12数学に興味を示し，質問をします	3.02	0.71
			23問題を簡潔で効率的に解くことが好きです	3.16	0.72
			10その答えが，なぜ正しいか知りたいと思っています	3.43	0.5
			28論理的に推論します	3.13	0.69
			37間違うことを心配をしないで考えたり，問題を解いたりします	2.96	0.87
		④	19人と同じでない方法でものを考えたり，何かを行ったりすることを気にしません	3.18	0.59
			16数学の内容や問題について考えるときには粘り強く努力します	3.21	0.57
			20数学の問題を考えたり解いたりするのに夢中になり，時間を忘れることがあります	3.2	0.74
		⑤	5数学の問題を解くのを楽しみます	3.45	0.47
			13自分の興味のある数学の分野を勉強したり，考えたりすることが好きです	3.41	0.46
			14数を用いて分析することに興味があります	3.23	0.58
			21自ら，自分なりの方法でいろいろなことをしようとします	3.11	0.53
			3数学の問題を解いて楽しんだり，数独のような数学パズルで遊んだり，テレビゲームをしたりします	3.14	0.74
			18同級生とは違うものに興味をもつことがしばしばあります	3.11	0.75
Ⅱ			33コンピュータを上手く用います	2.46	1.27
	ii		15図や表を用いて，自分の考えをまとめようとします	2.84	0.86
		⑥	35自分のアイデアを図や表で効果的に表現します	2.54	0.76
			36考察と研究の結果を図や表で適切に要約します	2.63	0.64
			4数学の問題を解くとき，面白い方法を見つけ出します	2.7	0.94
		⑦	24様々な方法で問題を解きます	2.7	0.83
			29疑問をもったことについての多くのアイデアと解答を思いつきます	2.59	0.83
		⑧	22テレビ，新聞，雑誌やインターネットの数学関連の情報に興味をもっています	2.68	0.88
			27自分の思考過程を振り返ります	2.91	0.66
			47くわしく理解する前に「全体的な見通し」をつかみます	2.84	0.83
		⑨	32考えた結果を分かりやすく説明します	2.66	0.74
			34何を学習したか自分の言葉で表現します	2.63	0.64
Ⅳ	iv		2 1回で(反復しないで)新しい数学の内容を学べます	2.45	0.8
		⑩	45日常生活の中の数理現象を理解します	2.41	0.86
			46数学の知識と理解に自信があります	2.5	0.87
			9高いレベルの数学に関わるような鋭い質問をします	2.36	0.67
			30数学の問題や題材を自然に見つけます	2.64	0.82
			31数学の問題の中にある色々な事柄について詳しく考察します	2.66	0.74
			11自分の能力を伸ばすために教科書の内容を変えて欲しいと思っています	2.54	1.02
			43「数学」とは何かについて自分の考えをもっています	2.09	0.88
		⑪	42たくさんの数学用語を知っています	1.88	0.66
			38ある数学的な話題についての知識が豊富です	2.36	1.07
			44教科書の内容を超えた数学について知識が豊富です	2.27	1.04

色	平均	分散
（橙）	平均m：m≧3	分散v：v＜0.5
（黄）	平均m：2.5≦m＜3	分散v：0.5≦v＜1
（緑）	平均m：2≦m＜2.5	分散v：1≦v＜1.5
（青）	平均m：m＜2	分散v：v≧1.5

付録６ 数学オリンピック予選不合格者（G2）のデンドログラム（質問項目入り）

		平均	分散
Ⅰ i ①	18同級生とは違うものに興味をもつことがしばしばあります	3.2	0.65
	19人と同じでない方法でものを考えたり，何かを行ったりすることを気にしません	3.26	0.7
	14数を用いて分析することに興味があります	3.09	0.74
	5数学の問題を解くのを楽しみます	3.32	0.58
	13自分の興味のある数学の分野を勉強したり，考えたりすることが好きです	3.32	0.63
	10その答えが，なぜ正しいか知りたいと思っています	3.51	0.48
	26簡単に問題を解くことができないとき，別の方法を見つけようとします	3.23	0.54
	7上級学年の教科書や課題に取り組みたいと思っています/取り組んでいます	3.01	1.01
②	16数学の内容や問題について考えるときには粘り強く努力します	3.15	0.67
	17長い間，続けて考えられます	3	0.88
	3数学の問題を解いて楽しんだり，数独のような数学パズルで遊んだり，テレビゲームをしたりします	3.01	0.84
	37間違うことを心配をしないで考えたり，問題を解いたりします	2.96	0.85
	20数学の問題を考えたり解いたりするのに夢中になり，時間を忘れることがあります	3.07	0.8
	21自ら，自分なりの方法でいろいろなことをしようとします	3.04	0.63
	12数学に興味を示し，質問をします	3.02	0.69
	48受け身の学習することよりも自ら学習することを好みます	3.1	0.81
iii	23問題を簡潔で効率的に解くことが好きです	3.16	0.82
③	40数学の授業で学んだことを長い間覚えています	2.79	0.92
	39問題の要点とそれを解く方法を理解します	2.9	0.59
	41数学の授業で学んだ色々な話題どうしを結びつけたり関連付けたりします	2.95	0.75
	27自分の思考過程を振り返ります	2.85	0.77
	28論理的に推論します	2.88	0.76
	25問題を解いた結果に法則性を見つけます	2.92	0.75
	47くわしく理解する前に「全体的な見通し」をつかみます	2.78	0.74
	8やさしくて反復練習の多い宿題は嫌いです	3.1	1.01
	11自分の能力を伸ばすために教科書の内容を変えて欲しいと思っています	2.62	1.16
Ⅱ	33コンピュータを上手く用います	2.25	1.16
ii	32考えた結果を分かりやすく説明します	2.45	0.91
④	15図や表を用いて，自分の考えをまとめようとします	2.77	0.91
	34何を学習したか自分の言葉で表現します	2.34	0.76
	35自分のアイデアを図や表で効果的に表現します	2.43	0.87
	36考察と研究の結果を図や表で適切に要約します	2.37	0.73
Ⅳ iv	43「数学」とは何かについて自分の考えをもっています	2.45	1.03
⑤	38ある数学的な話題についての知識が豊富です	2.23	1.01
	42たくさんの数学用語を知っています	2.15	0.96
	44教科書の内容を超えた数学について知識が豊富です	2.36	0.94
	46数学の知識と理解に自信があります	2.41	0.91
	24様々な方法で問題を解きます	2.7	0.8
⑥	1同級生よりも速く，かつ上手く数学を学べます	2.82	0.75
	29疑問をもったことについての多くのアイデアと解答を思いつきます	2.57	0.76
	4数学の問題を解くとき，面白い方法を見つけ出します	2.7	0.76
	6新しい数学の内容を思い出して簡単に使うことができます	2.58	0.7
	31数学の問題の中にある色々な事柄について詳しく考察します	2.59	0.69
	22テレビ，新聞，雑誌やインターネットの数学関連の情報に興味をもっています	2.62	0.89
	2 1回で（反復しないで）新しい数学の内容を学べます	2.35	0.85
⑦	9高いレベルの数学に関わるような鋭い質問をします	2.28	0.75
	30数学の問題や題材を自然に見つけます	2.41	0.85
	45日常生活の中の数理現象を理解します	2.34	0.81

	平均m：m≧3	分散v：v＜0.5
	平均m：2.5≦m＜3	分散v：0.5≦v＜1
	平均m：2≦m＜2.5	分散v：1≦v＜1.5
	平均m：m＜2	分散v：v≧1.5

付録 7 上位校のデンドログラム（質問項目入り）

	質問項目	平均	分散
Ⅳ ①	11自分の能力を伸ばすために教科書の内容を変えて欲しいと思っています	1.75	0.68
	43「数学」とは何かについて自分の考えをもっています	1.69	0.82
	45日常生活の中の数理現象を理解します	1.71	0.64
	38ある数学的な話題についての知識が豊富です	1.52	0.55
	9高いレベルの数学に関わるような鋭い質問をします	1.52	0.43
	42たくさんの数学用語を知っています	1.58	0.54
	44教科書の内容を超えた数学について知識が豊富です	1.46	0.55
②	46数学の知識と理解に自信があります	1.69	0.76
iv	1同級生よりも速く，かつ上手く数学を学べます	1.87	0.74
	2 1回で（反復しないで）新しい数学の内容を学べます	1.75	0.72
③	22テレビ，新聞，雑誌やインターネットの数学関連の情報に興味をもっています	1.8	0.78
	7上級学年の教科書や課題に取り組みたいと思っています/取り組んでいます	1.83	0.9
	29疑問をもったことについての多くのアイデアと解答を思いつきます	1.88	0.6
	30数学の問題や題材を自然に見つけます	1.77	0.62
	6新しい数学の内容を思い出して簡単に使うことができます	1.94	0.72
	24様々な方法で問題を解きます	2	0.62
	4数学の問題を解くとき，面白い方法を見つけ出します	1.76	0.75
	31数学の問題の中にある色々な事柄について詳しく考察します	1.78	0.59
Ⅰ ④	23問題を簡潔で効率的に解くことが好きです	2.8	1.08
	10その答えが，なぜ正しいか知りたいと思っています	2.88	0.99
	26簡単に問題を解くことができないとき，別の方法を見つけようとします	2.7	0.9
	37間違うことを心配しないで考えたり，問題を解いたりします	2.48	0.96
i ⑤	16数学の内容や問題について考えるときには粘り強く努力します	2.59	0.93
	17長い間，続けて考えられます	2.54	0.97
⑥	19人と同じでない方法でものを考えたり，何かを行ったりすることを気にしません	2.67	1.07
	18同級生とは違うものに興味をもつことがしばしばあります	2.58	1.02
	21自ら，自分なりの方法でいろいろなことをしようとします	2.31	0.78
	48受け身の学習することよりも自ら学習することを好みます	2.3	0.97
Ⅲ ii ⑦	32考えた結果を分かりやすく説明します	2.01	0.82
	34何を学習したか自分の言葉で表現します	2.07	0.69
	15図や表を用いて，自分の考えをまとめようとします	2.16	0.88
	35自分のアイデアを図や表で効果的に表現します	1.98	0.78
	36考察と研究の結果を図や表で適切に要約します	1.89	0.68
	8やさしくて反復練習の多い宿題は嫌いです	2.33	1.08
	33コンピュータを上手く用います	2.15	1.04
iii ⑧	14数を用いて分析することに興味があります	2.15	0.93
	3数学の問題を解いて楽しんだり，数独のような数学パズルで遊んだり，テレビゲームをしたりします	2	1.1
	5数学の問題を解くのを楽しみます	2.23	0.97
	20数学の問題を考えたり解いたりするのに夢中になり，時間を忘れることがあります	2.17	0.93
	12数学に興味を示し，質問をします	2.22	0.76
	13自分の興味のある数学の分野を勉強したり，考えたりすることが好きです	2.38	1.03
⑨	25問題を解いた結果に法則性を見つけます	2.28	0.95
	39問題の要点とそれを解く方法を理解します	2.48	0.96
	27自分の思考過程を振り返ります	2.36	0.94
	28論理的に推論します	2.15	0.79
	47くわしく理解する前に「全体的な見通し」をつかみます	2.12	0.99
	40数学の授業で学んだことを長い間覚えています	2.19	0.87
	41数学の授業で学んだ色々な話題どうしを結びつけたり関連付けたりします	2.13	0.76

(橙)	平均m：m≧3	分散v：v＜0.5
(黄)	平均m：2.5≦m＜3	分散v：0.5≦v＜1
(緑)	平均m：2≦m＜2.5	分散v：1≦v＜1.5
(青)	平均m：m＜2	分散v：v≧1.5

付録 8 中位校のデンドログラム（質問項目入り）

クラスタ	質問項目	平均	分散
iv-1 ①	44教科書の内容を超えた数学について知識が豊富です	1.35	0.43
	45日常生活の中の数理現象を理解します	1.47	0.56
	42たくさんの数学用語を知っています	1.44	0.48
	46数学の知識と理解に自信があります	1.49	0.63
	9高いレベルの数学に関わるような鋭い質問をします	1.32	0.4
	38ある数学的な話題についての知識が豊富です	1.43	0.5
	22テレビ，新聞，雑誌やインターネットの数学関連の情報に興味をもっています	1.49	0.6
	43「数学」とは何かについて自分の考えをもっています	1.47	0.61
ii	33コンピュータを上手く用います	1.71	0.79
②	32考えた結果を分かりやすく説明します	1.71	0.81
	34何を学習したか自分の言葉で表現します	1.69	0.72
IV	35自分のアイデアを図や表で効果的に表現します	1.66	0.73
	36考察と研究の結果を図や表で適切に要約します	1.53	0.49
	15図や表を用いて，自分の考えをまとめようとします	1.75	0.79
	47くわしく理解する前に「全体的な見通し」をつかみます	1.72	0.8
③	28論理的に推論します	1.68	0.73
	21自ら，自分なりの方法でいろいろなことをしようとします	1.82	0.89
	14数を用いて分析することに興味があります	1.77	0.94
	30数学の問題や題材を自然に見つけます	1.59	0.65
	29疑問をもったことについての多くのアイデアと解答を思いつきます	1.67	0.74
	31数学の問題の中にある色々な事柄について詳しく考察します	1.59	0.6
	24様々な方法で問題を解きます	1.65	0.68
	41数学の授業で学んだ色々な話題どうしを結びつけたり関連付けたりします	1.64	0.75
	3数学の問題を解いて楽しんだり，数独のような数学パズルで遊んだり，テレビゲームをしたりします	1.82	1.06
	11自分の能力を伸ばすために教科書の内容を変えて欲しいと思っています	1.61	0.72
④	2 1回で(反復しないで)新しい数学の内容を学べます	1.67	0.63
	1同級生よりも速く，かつ上手く数学を学べます	1.75	0.73
	4数学の問題を解くとき，面白い方法を見つけ出します	1.63	0.74
	6新しい数学の内容を思い出して簡単に使うことができます	1.69	0.72
iv-2	7上級学年の教科書や課題に取り組みたいと思っています/取り組んでいます	1.59	0.68
III	37間違うことを心配しないで考えたり，問題を解いたりします	2.02	1.14
⑤	16数学の内容や問題について考えるときには粘り強く努力します	2.22	1.05
	17長い間，続けて考えられます	2.05	1.16
⑥	5数学の問題を解くのを楽しみます	1.91	0.98
	13自分の興味のある数学の分野を勉強したり，考えたりすることが好きです	2.03	1.19
	20数学の問題を考えたり解いたりするのに夢中になり，時間を忘れることがあります	1.81	1.03
iii	39問題の要点とそれを解く方法を理解します	1.99	0.97
	40数学の授業で学んだことを長い間覚えています	1.75	0.79
⑦	25問題を解いた結果に法則性を見つけます	1.97	0.95
	26簡単に問題を解くことができないとき，別の方法を見つけようとします	2.08	1.04
⑧	48受け身の学習することよりも自ら学習することを好みます	1.85	1.06
	12数学に興味を示し，質問をします	2	0.93
	27自分の思考過程を振り返ります	2.06	0.9
	23問題を簡潔で効率的に解くことが好きです	2.46	1.35
	10その答えが，なぜ正しいか知りたいと思っています	2.46	1.31
i	8やさしくて反復練習の多い宿題は嫌いです	2.03	1.15
	18同級生とは違うものに興味をもつことがしばしばあります	2.04	1.06
I	19人と同じでない方法でものを考えたり，何かを行ったりすることを気にしません	2.34	1.25

色	平均	分散
(橙)	平均m：m≧3	分散v：v＜0.5
(黄)	平均m：2.5≦m＜3	分散v：0.5≦v＜1
(緑)	平均m：2≦m＜2.5	分散v：1≦v＜1.5
(青)	平均m：m＜2	分散v：v≧1.5

付録 9 下位校のデンドログラム（質問項目入り）

クラスタ	質問項目	平均	分散
Ⅲ	10その答えが，なぜ正しいか知りたいと思っています	2.23	1.18
	18同級生とは違うものに興味をもつことがしばしばあります	2.34	1.11
i	19人と同じでない方法でものを考えたり，何かを行ったりすることを気にしません	2.42	1
	8やさしくて反復練習の多い宿題は嫌いです	1.96	1.14
	23問題を簡潔で効率的に解くことが好きです	2.12	1.03
①	37間違うことを心配しないで考えたり，問題を解いたりします	2.08	0.88
	26簡単に問題を解くことができないとき，別の方法を見つけようとします	2.18	0.89
	27自分の思考過程を振り返ります	1.95	0.78
	39問題の要点とそれを解く方法を理解します	1.99	0.9
②	16数学の内容や問題について考えるときには粘り強く努力します	1.93	0.78
	17長い間，続けて考えられます	1.88	0.77
③	21自ら，自分なりの方法でいろいろなことをしようとします	1.95	0.9
iii	25問題を解いた結果に法則性を見つけます	1.9	0.93
	33コンピュータを上手く用います	1.92	1.53
	7上級学年の教科書や課題に取り組みたいと思っています/取り組んでいます	1.54	1.43
ii ④	15図や表を用いて，自分の考えをまとめようとします	1.75	0.82
	35自分のアイデアを図や表で効果的に表現します	1.69	0.73
	36考察と研究の結果を図や表で適切に要約します	1.61	0.63
⑤	48受け身の学習することよりも自ら学習することを好みます	1.7	0.7
	40数学の授業で学んだことを長い間覚えています	1.82	0.71
	34何を学習したか自分の言葉で表現します	1.77	0.71
	41数学の授業で学んだ色々な話題どうしを結びつけたり関連付けたりします	1.69	0.62
iv ⑥	3数学の問題を解いて楽しんだり，数独のような数学パズルで遊んだり，テレビゲームをしたりします	1.84	0.84
	5数学の問題を解くのを楽しみます	1.79	0.78
	13自分の興味のある数学の分野を勉強したり，考えたりすることが好きです	1.91	1.02
⑦	43「数学」とは何かについて自分の考えをもっています	1.43	0.48
	45日常生活の中の数理現象を理解します	1.46	0.58
	42たくさんの数学用語を知っています	1.52	0.47
	46数学の知識と理解に自信があります	1.47	0.51
	38ある数学的な話題についての知識が豊富です	1.41	0.43
	9高いレベルの数学に関わるような鋭い質問をします	1.35	0.4
	44教科書の内容を超えた数学について知識が豊富です	1.32	0.39
⑧	2 1回で（反復しないで）新しい数学の内容を学べます	1.71	0.57
	6新しい数学の内容を思い出して簡単に使うことができます	1.65	0.58
	28論理的に推論します	1.67	0.68
	47くわしく理解する前に「全体的な見通し」をつかみます	1.66	0.72
	30数学の問題や題材を自然に見つけます	1.57	0.51
	31数学の問題の中にある色々な事柄について詳しく考察します	1.57	0.58
	29疑問をもったことについての多くのアイデアと解答を思いつきます	1.59	0.56
	32考えた結果を分かりやすく説明します	1.62	0.63
⑨	1同級生よりも速く，かつ上手く数学を学べます	1.71	0.6
	20数学の問題を考えたり解いたりするのに夢中になり，時間を忘れることがあります	1.74	0.74
	14数を用いて分析することに興味があります	1.64	0.66
	22テレビ，新聞，雑誌やインターネットの数学関連の情報に興味をもっています	1.59	0.69
	11自分の能力を伸ばすために教科書の内容を変えて欲しいと思っています	1.61	0.69
	4数学の問題を解くとき，面白い方法を見つけ出します	1.58	0.7
	12数学に興味を示し，質問をします	1.68	0.65
Ⅳ	24様々な方法で問題を解きます	1.68	0.56

色	平均	分散
橙	平均m：m≧3	分散v：v＜0.5
黄	平均m：2.5≦m＜3	分散v：0.5≦v＜1
緑	平均m：2≦m＜2.5	分散v：1≦v＜1.5
青	平均m：m＜2	分散v：v≧1.5