

現実場面に基づく問題解決

～グラフ電卓を利用した合科的授業展開を通して～

大澤 弘 典*

要 約

生徒に現実場面を基にした問題解決の体験をさせるために、陸上競技のリレー場面を取り上げた。生徒自身でデータを抽出し、そのデータから回帰線を予想・判断させた。その過程でグラフ電卓を問題解決の道具として利用した。また、総合的に生徒の学習を捉え、数学の授業に限らず他教科（体育）との合科として指導展開した。その結果、①グラフ電卓を利用することにより、扱いの困難であった現実場面問題の教材化が、例えば関数的な内容において、中学生（3年）に対しても可能である。②生徒の情意面では、単に数学の有用性の感得・体感に留まらず、原題材への再検討や新たな問題抽出の意識の高まりが少なからず発生する。③合科的授業展開により、問題解決の有機的な効率化が図れる等が明らかになった。

1. 研究のねらい

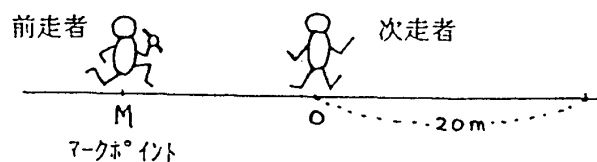
本稿では、①現実場面に基づく問題解決、②合科的な授業展開、③グラフ電卓の利用の3点から数学の現実的価値・有用性を生徒が体感できる適切な問題解決例を示し、その有効性を明らかにする。今までの問題解決における問題は、往々にして架空的・観念的であり、本当に必要な問題なのか疑問である。数学が現実の問題とどのように関わり、実際に利用できるか、生徒が体感できることが重要である。しかし、現実場面に基づく問題の教材化は容易なことでない。現実場面からの問題を題材にしようとするれば、現実場面からの生情報を処理することになり、中学生にとり煩雑な計算や高度な数学内容等に関わるため、学習が困難となる。無理に教材化を図れば、その課題は効率的に数学処理能力等の向上のみを目指すものとなりやすい。その結果、現実感が希薄な題材となり数学の有用性が十分実感できない。これらの問題点を解決するため、グラフ電卓を利用しつつ合科的な授業の展開を試みた。

2. 現実場面からの問題例

本稿では、次のような現実場面からの問題をもとに授業展開した。

運動会の全員リレーに勝ちたい。
どうしたらいいか？

陸上競技のリレー種目では、バトンパスの善し悪しが一つの要点になる。次走者は、前走者がどの位置（以下マークポイントと呼ぶ）に来たときスタートすればよいのか、その最適なマークポイントを見つける問題（以下バトンパスの課題と呼ぶ）に焦点を絞った。



3. 授業展開における留意点

バトンパスの課題は、松宮・柳木らを中心として開発され¹⁾、多くの示唆に富む実践である。しかしその授業展開では、かなりの数学的知識や処理能力が生徒に要求されている。そこで本稿では次のように工夫改訂し実践した。〔 〕内は松宮・柳木らの授業展開である。

(1) 合科的な授業展開

①生データの抽出・利用

学習の場を数学の授業に限らず柔軟に捉える。

*上越教育大学院／東京都中野区立第二中学校

体育の授業を活用し、実際に全員の生徒が運動場で走り、自身の走る様子についてデータ抽出を行う。生徒自身が抽出したデータをもとにマークポイントの位置問題として数学の授業で展開する。

〔代表生徒（男7名）による90m走のデータをあらかじめ用意しそれを基に授業展開した。〕

②現実場面への適応・実証

数学の授業で得られた数学的結果をもとに、再度体育の授業を活用し、実際に生徒全員でリレーを行い、数学的結果の実証をする。これらの授業展開を通して、より現実感のある課題にする。

〔データを数学的に処理し、数学的結果を得た段階で問題解決を終了した。〕

（2）グラフ電卓の利用

①回帰機能の利用

データを関数式に近似させる際に、教師がデータをモデル化し教え与えるのではなく、生徒がグラフ電卓の回帰機能を利用することで、データの式化を容易にする。

〔データをグラフ用紙にプロットさせ、前走者を1次関数、次走者を2乗に比例する関数で近似させた。〕

②帰納的なアプローチ

最適マークポイント位置の発見確定にあたり、グラフ電卓を利用し帰納的に見つけさせることで一般の中学生在が扱える課題レベルにする。

〔最適マークポイント位置を算出するにあたり通常高等学校で学習する判別式を利用した。〕

4. 指導計画

バトンバスの課題（4～7時間目）を授業実践するにあたり、事前に次の学習（1～3時間目）を行いグラフ電卓の操作に慣れさせた。

対 象：東京都某公立中学校

3年 28名（男17名 女11名）

実施時期：2乗に比例する関数の学習後

1～3時間目 …2)

- ・色々な関数の式・グラフ・表での表現
- ・長方形の紙から最大体積となる箱の制作
- ・車の速さと停止距離の関係を統計的処理等

4時間目（実施日：1995.11.29 校庭）

現実場面の条件整理・探求の視点の明確化

→リレーに勝ちたい。どうしたらよいか？

→バトンパスをうまくすればよい。

→マークポイントをどの位置にしたらよいか

→生徒各自の走る模様を計測すればよい。

現実場面からの生情報の抽出

→どの地点の通過時間を計測すればよいか？

→0～20mと65～85m付近を計測する。

→実際に生徒各自が90mを走り記録をとる。

（運動会のリレーでは各自約75mを走る）

5・6時間目（実施日：1995.12.5・6 教室）

生情報の数学的処理

→測定値をもとに、前走者KAさんから

次走者IN君へのバトンパスを考える。

（最適マークポイントを見つける）

→自分自身の最適マークポイントを考える。

7時間目（実施日：1995.12.20 校庭）

数学的結果の現実場面への適応・実証

→実際にリレーを行い検証する。

5. 授業展開例

<主な教師の指導・発問と生徒の反応・活動>

（1）5時間目（1995.12.5）

測定した記録から代表生徒2人のバトンパスについて、それぞれの走る様子を電卓を利用し捉える。

T1: 例えば、KAさん（前走者）からIN君（次走者）へのバトンパスの様子を見てみよう。

T2: スタート地点から、出発しようとしている次走者のIN君の記録から、何か感想とか気づいたことがありますか？

IN	0m	5	10	15	20	…
君	0秒	1.53	2.29	2.95	3.59	…

P3: 俺より速い。

P4: 前にやったのと似ている。

T5: 前にやったのって？

P6: 自動車の止まる距離のやつ。

(3時間目の自動車の停止距離の問題)

P7: 同じ時間と距離の表だ。

P8: だんだん早くなっている。

T9: どうして分かる？

P10: 始めの5 mの間に1.53秒かかっているのに、
後の5 m (15~20m) の時は、0.2 秒ぐら
しかかかっていない。同じ5 mなのに、タイ
ムが速くなっている。

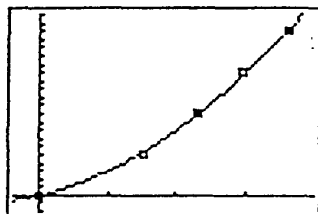
(かかる時間が短くなっている)

T11: グラフ電卓を使ってIN君(次走者)の走りっ
ぶりを表して見よう。

P12: グラフ電卓の回帰機能等を使って、データを
プロットし式化・グラフ化をしようとする。
 $y = 1.021x^2 + 1.992x - 0.084$

(x を時間、
y を距離とする)

P13: これらの活動から
次走者の加速の様
子を式やグラフ等
でつかむ。



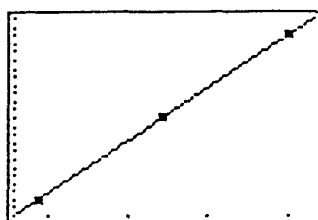
T14: 同じように、KAさん(前走者)の走りっぶり
についても調べてみよう。

KA	...	65m	75	85
さん	...	10.87秒	12.42	14.00

P15: グラフ電卓を利用
し解決をはかる。

$$y = 6.390x - 4.422$$

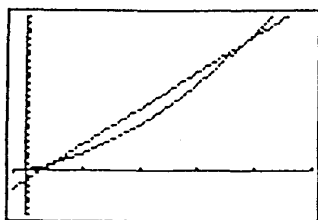
P16: これらの活動から
前走者の等速の様
子を式やグラフ等
でつかむ。



(2) 6時間目(1995.12.6)

代表2人の走る様子を同じ座標平面上でグラフ
で表し考えさせる。

T17: 例えばM0 = 2 mの
場合で考えてみよ
う。見やすくする
ためにグラフにか



いてみよう。

次走者(IN君) $y = 1.021x^2 + 1.992x - 0.084$

前走者(KAさん) $y = 6.390x - 2$

T18: IN君がスタート地点にいるとき、KAさんの位
置は座標平面上のどの位置になりますか？

P19: (0, -2) の位置で、M0(マークポイント
からスタート地点まで)の長さやy切片の絶
対値が等しくなることを理解する。

T20: 詳しく調べるため
にグラフ表示画面
の設定をしよう。

P21: 例えば右のように
グラフ表示画面を
設定する。

GRAPH FORMAT
Xmin=-.2
Xmax=5
Xscl=1
Ymin=-8
Ymax=27
Yscl=1

T22: M0 = 2 mは最適の距離と言えますか？

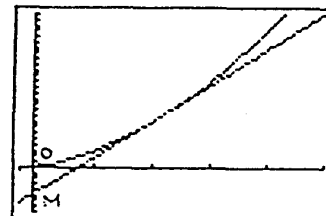
P23: バトンバスの地点である2つのグラフの交点
ができるだけ右上の方がよい。(次走者が加
速した後バトンバスした方が効率的)

P24: 2つのグラフがぎりぎりの所でぶつかる点
(接点)がよい。

式・グラフ・表等を帰納的に活用し、最適なマ
ークポイントを見つけさせる。

T25: マークポイント(y切片)の値をいろいろ変
えて次走者の最適
なマークポイント
を見つけよう。

P26: グラフで概略をつ
かんだ後、表等で
詳しく探求する。



(M0=4.8の場合)

T27: 自分の測定記録から最適な自分のマークポイ
ントを見つけよう。

P28: 上記解決過程を参考に有機的に活用し問題解
決を図る。

6. 授業実践の分析・考察

授業における教師発問と生徒反応の観察・記録
及び生徒の感想等から、授業の分析・考察をした。

(1) 生徒の情意面について

①合科的授業展開に対する興味

「数学で走るとは思わなかった」という生徒の
声が出すように、データ抽出の授業(4時間目)

では、通常の教室での授業とは違う意外性・興味を感じていた。またデータ収集後の数学的な問題解決方法に関心を寄せる一方で、「リレーのバトンバスの受け渡しは、やっぱり経験がものを言うことだと思います。数学でやるのは、おもしろいけど、頭ではできても、体ではすぐにできないと思います。本気で新記録をだすならもっとバトンバスの練習をした方がいいと思います。」といった生徒の感想もあり、授業展開の初期段階では、数学を活用することで本当にバトンバスの課題を解決できるのか半信半疑に感じる生徒もいた。

②問題に対する探求の姿勢

マークポイント発見の授業（5・6時間目）では、「始め3 mだったけれども、もっとくわしくやったら2.2 mぐらいになった。とても大変な事だけれどもだんだんやっているうちに楽しくなってきた、正確な数値を出すのがおもしろくなってきた夢中になってしまいました。」等の感想が見られた。数学的处理の困難さを意識しつつも、積極的な姿勢が多く見られた。自分のマークポイントの概要をグラフでつかみ表等で詳細に追求する場面、一度算出した数値を検証する場面、友達と質問しあい議論する場面等も多々見られた。

③数学の有用性の体感

全員リレーによる実証の授業（7時間目）では前時までに見いだした自分の最適なマークポイントを利用することで、実際のバトンバスがスムーズにでき、タイムが大幅に短縮（5分45秒34から5分26秒95へ18秒39減少）された。それまでの解決過程・実体験を通して、多くの生徒がその問題解決の達成感と数学の有用性を体感し、さらに別課題への挑戦意識が自発的に生じた。以下は代表的な生徒の感想例である。「数学で体育のことなんかできるのかと、最初は疑問に思っていたけど走ってみるとバトンバスがうまく行って、タイムもすごく縮んだのですごく驚いたし、うれしかったです。それに楽しかったので、他の課題でまたやりたいです。成功してよかった！」

④問題に対する検証と新たな意識

一応の解決の後も、自分達の数学的处理に対し自然な疑問や批判的考察を加えていた。例えば、スタート地点での次走者の誤差（回帰した曲線は

原点を通過していない）、有効数字の妥当性（解決途中適度に四捨五入をしている）、問題解決にあたり他の要素は考えなくてよいのか（走順、バトンの長さ、腕の長さや振りなど）等に対し、検証・再調査や数学的再処理を行なおうとする姿勢が見られた。さらには、デパートにおけるエレベータとエスカレータの関係やバレーボールでのジャンプするタイミングについて等、別の現実場面における問題を具体的に提案する生徒もいた。

（2）生徒の認知面について

単に式・グラフ・表の扱いが手慣れただけでなく、1次関数と2次関数の違いなど関数的内容を中心に、以下のように数学的な認識が深化した。

①変化の割合の認識

例えば、次走者の速さがだんだん速くなるとはどういうことなのか、生徒は抽出したデータから時間や距離の変化量の算出、そのグラフ化、自分の実体験等から、加速や等速の速さについての認識を深め有機的に変化の割合を捉えていた。

②グラフ上の点の意味

抽象化されたグラフ上の点に対し、現実場面との関わりという視点から、グラフ上の点を意味あるものとして捉えた。例えば、二つのグラフの交点は、スタート地点から進んだ距離が等しくバトンバス可能地点であることや、マークポイントはy軸との交点であることを確認した。

③同座標平面上での2グラフの取り扱い

前走者と次走者2人の走る様子を、同時に同じ座標平面上に表し考えるのは、生徒にとって少なからずかなり困難なことであった。基本的には、次走者のグラフ（放物線）に前走者のグラフ（直線）をかくという手順を踏んだ。具体的には、主に2つの展開が考えられた。バトンバス時の前走者の走り（65～85m）あたりのグラフ（直線）を平行移動するという捉え方と、マークポイントを起点に速さ一定に進むという捉え方である。どちらが生徒にとって良いかは、今後さらに検討したい。

④グラフ電卓による回帰と帰納的アプローチ

次走者の走る様子を2次曲線で回帰した後、同様に前走者の走る様子を2次曲線で回帰しようと

した生徒もいた。無判断でグラフ電卓操作を繰り返して利用しようとした為である。それらの生徒は抽出したデータの注視・分析等の活動を通して、直線で回帰すれば十分であることを理解した。帰納的アプローチでは、2つのグラフが接する概略をグラフで視覚的に捉えた後、表等で詳細に調べる手法等で多くの生徒が問題解決をした。

7. まとめ

以上の研究により次の知見を得た。

(1) 現実場面問題の教材化

グラフ電卓を利用することにより、扱いの困難であった現実場面問題の教材化が、例えば関数的内容を中心に中学3年生に対しても可能である。

(2) 数学の有用性の体感

多くの生徒が、本稿の授業展開を通して達成感・充実感を感じ、数学の有用性を体感した。さらには原題材への再検討や新たな問題抽出の意識の高まりが見られた。この結果から本研究は生徒の情意面においても有効である。

(3) 合科的展開による問題解決の効率化

今までの数学の授業の時間・形式にこだわることなく、他教科や学校行事等との合科を柔軟に進めることで、効率の良い授業構成と生き生きとした意味のある授業展開となる。

*本稿作成にあたり池田文男先生（東京理科大学）から有益な助言を頂いた。厚くお礼申し上げます。

8. 引用及び参考文献

1) 松宮哲夫・柳本哲:総合学習の実践と展開, 明治図書, PP.117-128, 1995

注) 現実性、総合性、実践性、一連性の4つの視点から、現実性をもつ課題の総合学習 (Composite Real Mathematics Learning; CRM学習) を主張している。

2) 久保良宏・藤澤由美子:中学校におけるグラフ電卓の視点と授業例, 日本数学教育学会誌, 第77巻第5号, PP.2-10, 1995

<資料> 個人記録表

走順	性	**	0 m	5 m	10 m	15 m	20 m	65 m	75 m	85 m
1	M	—	0秒	1.50	2.16	2.78	3.35	9.31	10.50	11.77
2	F	14 m	0	1.74	2.61	3.45	4.22	11.92	13.67	15.59
3	M	4.1	0	1.70	2.46	3.23	3.99	10.96	12.45	14.03
4	F	4.5	0	1.90	2.93	3.80	4.66	13.36	15.32	17.40
22	F	5.8	0	1.56	2.33	3.10	3.85	10.87	12.42	14.00
23	M	4.8	0	1.53	2.29	2.95	3.59	10.63	11.98	13.35
24	M	4.9	0	1.74	2.46	3.19	3.97	11.49	13.14	14.87
25	M	4.5	0	1.66	2.39	3.08	3.70	10.65	12.03	13.44
26	M	7.5	0	1.65	2.36	3.03	3.67	10.50	11.87	13.22
27	M	3	0	1.52	2.19	2.93	3.61	9.85	11.16	12.53
28	M	2.2	0	1.45	2.11	2.76	3.34	9.67	10.90	12.20

(** : 各生徒が見つけたスタート地点からマークポイントまでの最適な距離)