氏名（本籍）	八島高将（やしま たかまさ）（佐賀県）
学位の種類	博士（理学）
学位記番号	甲第1072号
学位授与の日付	平成27年3月20日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
学位論文題目	**Degree conditions for the existence of regular factors in 2-connected star-free graphs** **（2ー連結スターフリーグラフにおける正則因子が存在するための次数条件）**
論文審査委員	（主査）教授　江川　嘉美
	教授　佐藤　洋祐　　教授　関川　浩
	准教授　柳田　昌宏　准教授　小谷　佳子

論文内容の要旨

本論文では，グラフ理論の一分野である因子論，特に正則因子が存在するための次数条件及びその最善性について論じる．本論文を構成している3つの定理はいずれも，スターグラフを誘導部分グラフとして含まない2-連結グラフにおけるものであり，6-因子の存在性に関する1つの定理と3-因子の存在性に関する2つの定理である．

初めに本論文で用いる用語や記号の定義を与える．本論文では，ループや多重辺をもたない有限無向グラフのみを扱う．G をグラフとする．G の頂点集合，辺集合をそれぞれ $V(G)$，$E(G)$ によって表すこととする．また，G の頂点 v の次数を，v に接続する辺の本数として定義し，次数の最小値を $\delta(G)$ で表すこととする．空ではないグラフ G において，どの2頂点も道で結ばれているとき，G は連結であるといい，また，$|V(G)| \geq k+1$ であり，かつ $|X| \leq k-1$ であるような任意の $X \subseteq V(G)$ に対して，$G-X$ が連結となるとき，G は k-連結であるという．G の誘導部分グラフ H とは，両端点が $V(H)$ に属する G の辺すべてを $E(H)$ とする G の部分グラフをいう．さらに，連結グラフ H に対し，グラフ G が H を誘導部分グラフとして含まないとき，G は H-フリーであるといい，この H を G における禁止部分グラフと呼ぶ．2つの部集合の濃度がそれぞれ1と t であるような完全二部グラフ $K_{1,t}$ をスターグラフという．本論文では，スターグラフ $K_{1,t}$ を禁止部分グラフとするようなグラフ，すなわちスターフリーグラフについて考察していく．加えて，f を $V(G)$ 上の非負整数値関数としたとき，グラフ G の f-因子 F とは，各頂点 x の F における次数が $f(x)$ となるような全域部分グラフのことをいう．任意の頂点 x に対して $f(x)=r$（定数）であるとき，この f-因子を正則因子，または r-因子と呼ぶ．

Ota らによる連結スターフリーグラフにおける正則因子の存在性に関する以下の定理が知られている．

定理 A $t \geq 3, r \geq 2$ を整数，G を連結なスターフリーグラフとし，

$$\delta(G) \geq \left(t + \frac{t-1}{r}\right)\left\lceil \frac{rt}{2(t-1)} \right\rceil - \frac{t-1}{r}\left\lceil \frac{rt}{2(t-1)} \right\rceil^2 + t - 3$$

と仮定する．r が奇数である場合は，さらに $t \leq r+1$ かつ $r|V(G)|$ が偶数であると仮定する．このとき，G は r-因子をもつ．

この定理 A に対して，連結性に関する仮定を強めることで，次数条件を大幅に弱められることに着目し，本論文では 2-連結グラフにおいて考察した．

まず，定理 A において $r = 6$ とすると次の系 B が得られる．

系 B $t \geq 3$ を整数とし，G を連結スターフリーグラフとする．このとき，次が成り立つ．

(i) $t \geq 4$ かつ $\delta(G) \geq 3t - 1$ ならば，G は 6-因子をもつ．

(ii) $t = 3$ かつ $\delta(G) \geq 9$ ならば，G は 6-因子をもつ．

系 B において，グラフ G を 2-連結グラフとすることにより，次の定理が得られた．

定理 1 $t \geq 3$ を整数とし，G を 2-連結スターフリーグラフとする．このとき，次が成り立つ．

(i) $t \geq 4$ かつ $\delta(G) \geq 2t + 1$ ならば，G は 6-因子をもつ．

(ii) $t = 3$ かつ $\delta(G) \geq 8$ ならば，G は 6-因子をもつ．

定理 1 において次数条件をこれより弱めると，6-因子をもたないグラフが無限に存在するという意味でこの定理は最善である．

次に，定理 A において $r = 3$ とすると次の系 C が得られる．

系 C $3 \leq t \leq 4$ を整数とし，G を頂点数が偶数である連結スターフリーグラフとする．さらに，$t = 3$ または $t = 4$ に応じて，$\delta(G) \geq 5$ または $\delta(G) \geq 7$ であると仮定する．このとき，G は 3-因子をもつ．

系 C においても，グラフ G を 2-連結グラフとすることにより，次の 2 つの定理が得られた．

定理 2 $3 \leq t \leq 4$ を整数とし，G を頂点数が偶数である 2-連結スターフリーグラフとする．さらに，$\delta(G) \geq t + 1$ であると仮定する．このとき，G は 3-因子をもつ．

定理 3 $5 \leq t \leq 7$ を整数とし，G を頂点数が偶数である 2-連結スターフリーグラフとする．さらに，$\delta(G) \geq t + 2$ であると仮定する．このとき，G は 3-因子をもつ．

定理 2，3 においても，次数条件をこれより弱めると 3-因子をもたないグラフの無限列が存在するという意味で，この定理は最善である．また，Ota らは定理 A において，r が奇数である場合には $t \geq r + 2$ とすると，$r|V(G)|$ が偶数であっても，r-因子をもたないグ

ラフが無限に存在することを示している．同様に，定理 3 においても $t \geq 8$ の場合には，3-因子をもたない頂点数が偶数である 2-連結スターフリーグラフが存在するという意味で，$t \leq 7$ という条件が必要であることに関しても考察している．

r-因子に関する研究は，r が偶数の場合と奇数の場合で細部の考察内容が異なる．本論文においても，定理 1 と定理 2，3 とで証明の細部では異なる考察をして，結果を得ている．

第 1 章では，グラフの因子問題に関する既に知られている研究及び重要な定理を紹介し，本論文の動機付けを行う．第 2 章では，本論文で用いる用語や記号の定義を行う．第 3 章では，2-連結スターフリーグラフにおける 6-因子の存在性に関して議論をし，第 4 章では，2-連結スターフリーグラフにおける 3-因子の存在性に関して議論をする．また，それぞれにおいて得られた次数条件が最善であることについても各章の最後に議論をする．

論文審査の結果の要旨

本論文は，グラフの因子，特に正則因子が存在するための十分条件に関するものであり，３個の定理からなっている．本論文では有限無向単純グラフのみを扱っているので，ここではそのようなグラフを単にグラフと呼ぶことにする．すべての頂点の次数がkであるような全域部分グラフをk-因子と呼ぶ．また，部集合の濃度が1とtであるような完全二部グラフを$K_{1,t}$ と書き，スターグラフと呼ぶ．$K_{1,t}$を誘導部分グラフとして含まないグラフは$K_{1,t}$フリーグラフ，またはスターフリーグラフという．

スターフリーグラフにおいて，k-因子が存在するための十分条件を最小次数により与える問題は 1990 年頃から研究されており，連結グラフにおけるものは Ota らによる最良の結果が知られている．ここで，グラフの連結度に関する条件を強めることにより，最小次数に関する条件を弱めるという問題が自然に考えられる． 2011 年に Aldred らは，2-連結スターフリーグラフにおける 2-因子の存在性に関する最良の最小次数条件を求めている．4-因子の存在性に関する同様の結果も知られている．

本論文の定理 1 は，2-連結$K_{1,t}$フリーグラフにおいて 6-因子が存在するための最小次数条件を与えている．$t \geq 4$の場合，Ota らが証明した定理は「連結$K_{1,t}$フリーグラフにおいて，最小次数が$3t-1$以上ならば 6-因子が存在する」を意味するが，定理 1 で「2-連結$K_{1,t}$フリーグラフにおいて，最小次数が$2t+1$以上ならば 6-因子が存在する」という結果が証明されている．また$t=3$の場合は Ota らが証明した定理は「連結$K_{1,t}$フリーグラフにおいて最小次数が 9 以上であれば 6-因子が存在する」を意味するが，定理 1 で「2-連結$K_{1,t}$フリーグラフにおいて，最小次数が 8 以

上であれば6-因子が存在する」という結果も証明されている．また，最小次数条件が最良であることを示すグラフの無限列も構成している．

定理1の証明は，Tutteの因子定理を用いた標準的なものである．Tutteの因子定理とは「グラフGにk-因子が存在するための必要十分条件は，任意の互いに素な頂点集合の部分集合S,Tに対し，$k|S|+\sum_{y\in T}(deg_{G-S}(y)-k)-h(S,T)\geq 0$が成立することである」というものである．ここで$h(S,T)$は$G-S-T$の成分$C$で$k|V(C)|+|E(T,V(C))|$が奇数であるようなものの数である．一般に$K_{1,t}$フリーという性質は$t$がより小さい方が仮定としての条件が弱くなり，証明に創意工夫が必要となる．定理1の証明においても，$K_{1,3}$フリーグラフの場合，2-因子や4-因子の存在性の証明にはない手法で簡潔に$h(S,T)$を評価しており，本論文著者の創意工夫がみられる．

定理2，3は，2-連結$K_{1,t}$フリーグラフにおいて3-因子が存在するための最小次数条件を与えている．Otaらが証明した定理は「連結$K_{1,t}$フリーグラフにおいて，$t=4$の場合は最小次数が7以上，$t=3$の場合は最小次数が5以上ならば3-因子が存在する」を意味するが，定理2，3で「2-連結$K_{1,t}$フリーグラフにおいて，$5\leq t\leq 7$の場合は最小次数が$t+2$以上，$3\leq t\leq 4$の場合は最小次数が$t+1$以上ならば，3-因子が存在する」という結果が証明されている．最小次数条件が最良であることを示すグラフの無限列も構成している．また，任意の正整数δに対し，最小次数δ以上であるような3-因子をもたない2-連結$K_{1,8}$フリーグラフの無限列も構成し，$t\geq 8$では同様の結果は得られないことも示している．

一般にk-因子の存在性に関する問題においては，$h(S,T)$の定義から類推できるよう，kが偶数の場合と奇数の場合では異なる考察を必要とし，kが奇数の場合の方が複雑になることが多い．定理2，3の証明もTutteの因子定理によるものであるが，$h(S,T)$の評価する際，定理1の証明とは異なる考察をしている．具体的には，きわめて巧妙に各成分に実数を割り当て，$h(S,T)$を評価し，証明を完成させている．

以上のように本論文の提出者は，2-連結$K_{1,t}$フリーグラフにおいて，未解決であった6-因子と3-因子が存在するための最良の最小次数条件を与え，証明においても$h(S,T)$の評価などに独創的なものがある．これらがグラフ理論に寄与するところは大きく，よって，本論文は学位（博士）論文として十分価値があるものと認める．