和算書の中にある計算法（２）

佐藤健一

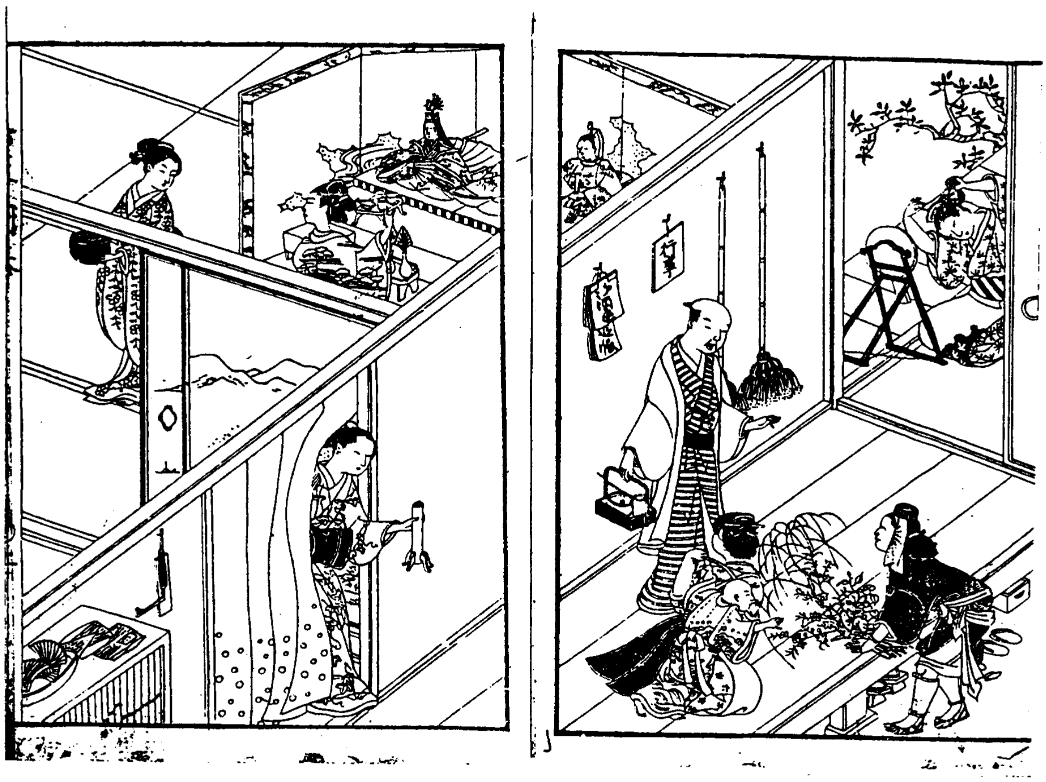
§２．順列・組合せ

江戸時代では、数学を研究したり教授することで、生活が成り立つことは稀であった。「数学教授」の看板を門前等の目立つ場所にだして塾を開いている人もあったようだが、弟子からの月謝による収入で生活は出来なかった。

一般の数学者（和算家）といわれる人は普通別の職業を持っており、特に生活上の目的を持って研究していたとは思えない。興味を覚えたことについて研究し、ノートとして遺すとか、弟子に教えた。その中のいくつかは弟子のすすめに依って刊行することもあったが、多くの和算家から受け入れられること、即ちよく売れることが条件であった。順列や組合せについての算法は、現在の中学・高等学校での処理と似たものもあるのでいくつかを紹介する。

問題

大原の里から京の街（洛中）に出てきて、花を売っている女がいる。この女は桃、桜、椿、柳の４種から毎日３種を選んで売りに出ている。３月３日、この花売りの女が洛中を売り歩いていると、ある人が３種の花を買った。その花は桃、柳、椿の３種であった。次の日、この花売り女が売り歩いて来たので、この家では昨日と同じ桃、椿、柳の３種の花を求めた。ところがこの花売り女は「今日は桃は持ってきていません。今日持ってきているのは、柳と桜と椿の３種です。昨日と同じ桃、桜、椿を持ってくるのは３月７日になります。」と言った。その理由を述べなさい。



これは村井中漸の『算法童子問』（1781年）にある問題である。村井の師である中根彦循が著した『勘者御伽双紙』の続編の意味で著したものである。実用的な問題ばかりではなく、人々が興味をもつようなものを工夫して載せてあるのが特徴である。上の問題では４つあるところから３つ選ぶ組合せを求めればよい。すなわち ${}_4C_3$ を計算すればよい。村井は $(4+1-3)=2$, $\{(2+3)\times2+2\}\times2\div(1\times2\times3)=4$ としている。 ${}_4C_3$を求めるのに、

一般的に ${}_nC_1$は $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n$ から１つ選ぶ場合であるから問題にならないが、${}_nC_2$ ならば 、

先ずa_1を１つ選んだとき、もう１つはa_2からa_nまでの$n-1$個、

a_2を選んだ場合は、もう１つはa_3からa_nまでの$n-2$個、

a_3を選んだ場合は、もう１つはa_4からa_nまでの$n-3$個、

…………………………………………

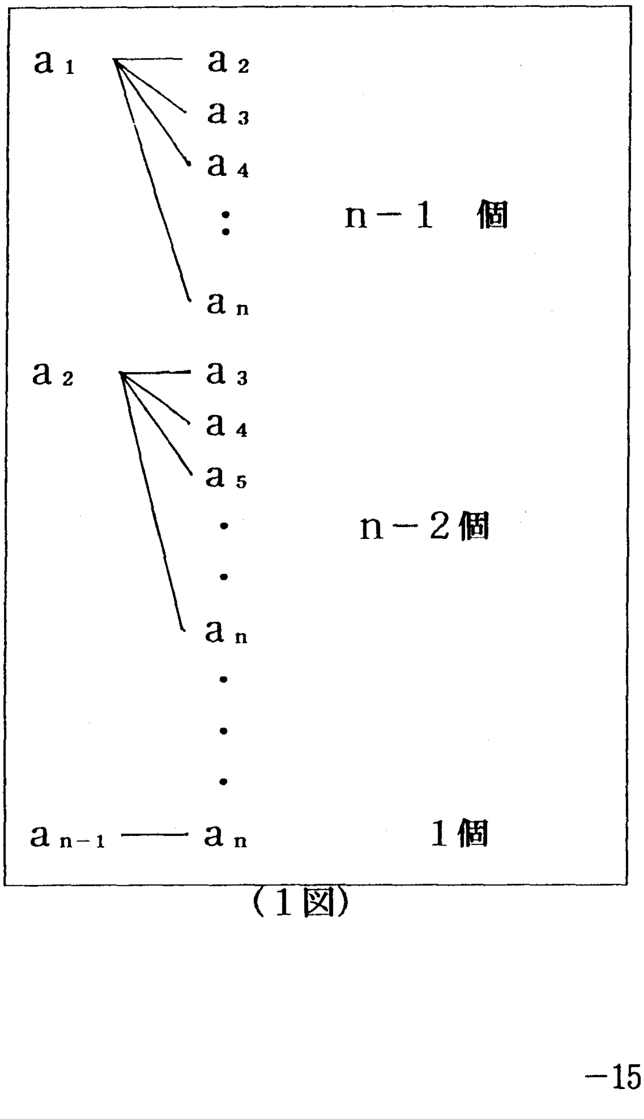
…………………………………………

…………………………………………

…………………………………………

a_{n-1}・を選んだ場合は、もう１つはa_nの１個

となる。



（1図）

左の図でもわかるように、下から

$1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)$

$$=\sum_{k=1}^{n-1} k$$

$$=\frac{n(n-1)}{2}$$

米俵を杉の木の形に積み上げるときの俵の総数を計算するということで、

$1+2+3+\cdots\cdots+n$

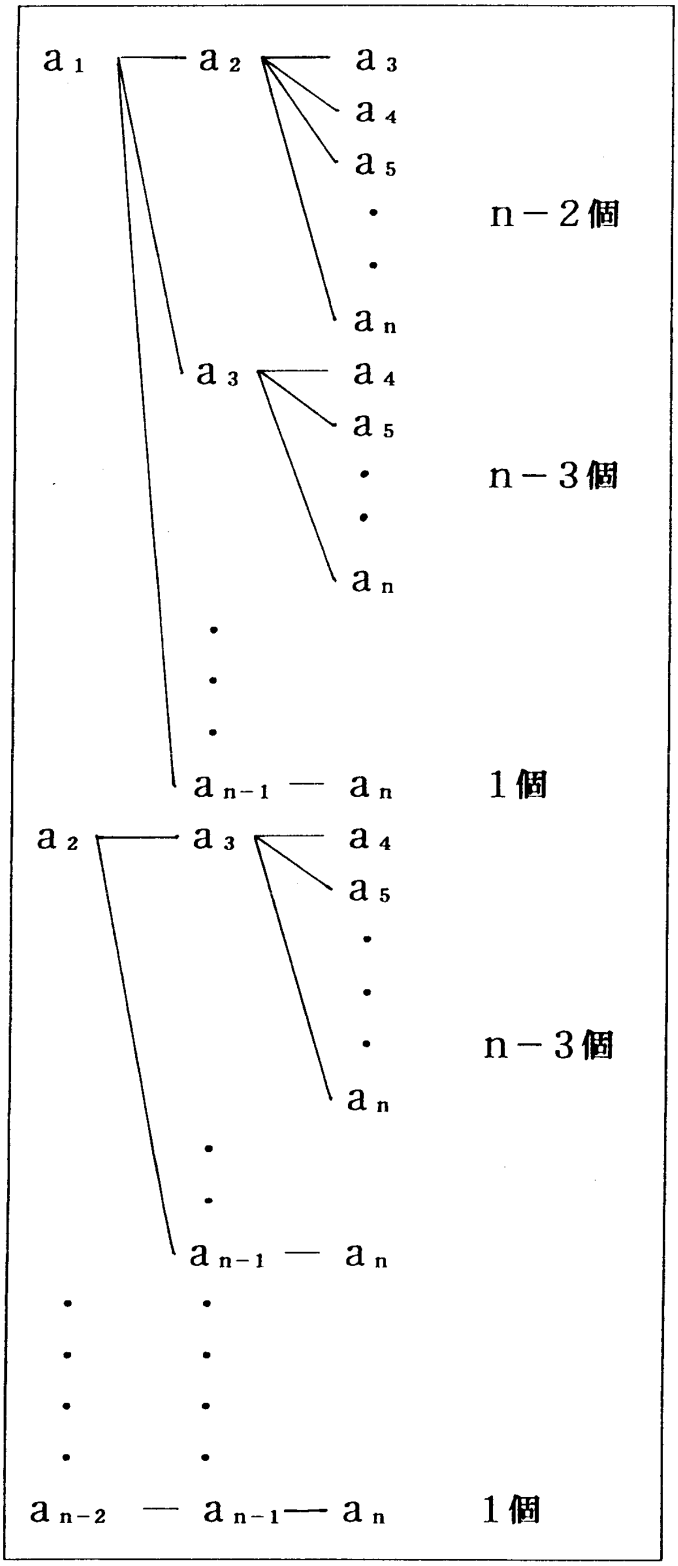
の計算を「俵杉算」とか「杉成り算」などと江戸時代では呼ばれていた。あるいは中国式に「三並方」とも呼んだ。

図は「樹形図」である。

○ 1個 ４個あるところから１個選ぶ組合せは

○ ○ 2個 下の図のように

○ ○ ○ 3個 １＋２＋３＝６　で６通りとなる。



（２図）

２図でもわかるように

$1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots\cdots+\{1+2+3+\cdots\cdots+(n-2)\}$

$=\sum^{n-2} k(k-1)/2$

$=n(n-1)(n-2)/6$

球をお月見のだんごを三角錐の形に積み重ねると、その個数は上の段から

１，１＋２，１＋２＋３，・・・・・・・

となる。このようなものを和算家は「三角錐梁」と呼んでいた。

底辺がm個の三角錐梁では、

m＝n－２であるから、

上式の$n(n-1)(n-2)/6$　に代入して

$m(m+1)(m+2)/6$

$=(m^3+3m^2+2m)/6$

電卓を使って計算する場合もそうだがそろばんを使って計算しやすいように変形する。

$m\{m(m+3)+2\}\div 6$

和算家はこのように変形して公式とした。

${}_4C_3$では${}_nC_r$のr＝３であるから三角錐梁で、n＝４であるからm＝２として総数を求めた。

三角錐梁に物を積み重ねたとき、第１段は　○、

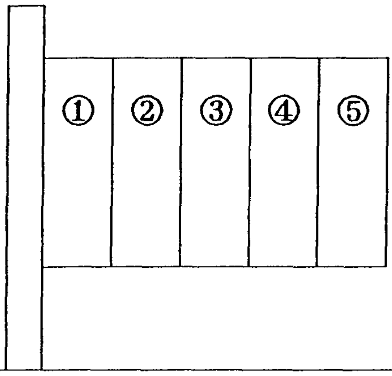
第２段は　○　　　第３段は　　○　　　　のようになっている。

　　　　○　○　　　　　　　○　○

　　　　　　　　　　　　　○　○　○

問題

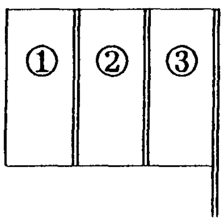
図のような旗がある。５ケ所①，②，③，④，⑤を５色を使って染めるとき、何種類の旗が出来るか。



これは天明元年(1781)に刊行された藤田定資(1734~1807)の『精要算法』の問題である。この時代の普通以上の数学の教科書として評判のよいものであった。藤田は久留米藩に数学者として仕えた関流屈指の数学者で全国に多くの弟子をもっていた。この問題に対する藤田の術（答までの道筋）は５×４×３×２×１＝１２０である。　５つあるところから５つ選んで１列に並べるときの数であるから

$_5P_5 = 5! = 120$

問題



図のような旗の①，②，③の部分を、青、赤、黒の３色で染めるとき、何種類の旗が出来るか。ただし同じ色を使ってもよいものとする。

これは1703年に刊行された田中佳政の『数学端記』の「量式萬変数法」の問題である。

田中の求め方は以下の通りである。

青が①にくるものは、（青，青，青）、（青，青，赤）、‥‥など９種

赤が①にくるものは、（赤，青，青）、（赤，青，赤）、‥‥など９種

黒が①にくるものは、（黒，青，青）、（黒，青，赤）、‥‥など９種

以上の２７種と計算している。現代流では３個から３個選んで並べる重複順列

$_{3}\Pi_{3}=3^{3}=27$

この『数学端記』数学という語を使っていることも珍しいが、この問題の他にも旗の色数を５にした問題や、８種類の薬から５種選んで出来る薬の種類などもある。

> 問題
> 文字が７つある。これから５文字取って並べると、違うものはいくら出来るか。ただし、同じ文字を使ってもよいものとする。

答は４６２通り

これは剣持章行(1790~1871)の『算法開蘊』の問題である。剣持は群馬県中之条町生まれ、農業の合間に数学を小野栄重に学び、５０歳頃に家督を譲って江戸に出て、関流の総統の内田五観に師事した。のち関東地方を中心に数学を教えて旅をす算家として一生を終わった。

剣持の解いた方法は、7，7+1=8，8+1=9，9+1=10，10+1=11

$\dfrac{7\times8\times9\times10\times11}{1\times2\times3\times4\times5}=\dfrac{55440}{120}=462$　としている。$_{7}H_{5}$　の重複組合である。

※この問題の前に一般的な問題があって、それによれば

$\dfrac{n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+r-1)}{1\times2\times3\times\cdots\cdots\times r}$ すなわち　$_{n+r-1}C_{r}$ ，$_{n}H_{r}$

の公式が現れている。

平安時代の代表的な文学作品に、紫式部の『源氏物語』がある。この物語は全部で５４帳から出来ているが、最初の「桐壺」と最後の「夢浮橋」を除いた５２帳の内容と対応させて図を作る。例えば第２帳の「帚木」を|||||と書く。これは源氏の周りに多くの女性が存在していることを表わしている。５本の縦棒の結びつき方によって内容をあらわすのである。この作品と関わりの深い遊びに「源氏香」がある。

源氏香は５種類の香をそれぞれ５包ずつ、全部で２５包用意する。これを混ぜわせてどの包が何という香であるかわからないようにして、この中から５包取り出して炊く。これを順に参加者が嗅いで次に回す。参加者は順に回されてきた香が同じものか違うものかを判断して図に表わす。

例えば、全部違うものならば|||||のように書く。また全部同じものならば|||||のように書く。また、１番と２番が同じで、他はそれぞれ別で１番とも違う場合は|||||のように書く。

問題　上のように表わすと、その表わし方は全部で何通りになるか。

この問題は『算法学海』（坂正永、1781年）に現れたものである。

坂の答までの筋道は次のようである。

(1)香が１種類の場合、|||||の１通り。

(2)香が２種類の場合、①４包が同じ、残り１包が別のとき

の５通り

②３包が同じ、残り２包が他の同じもの

など１０通り

(3)香が３種類の場合、①３包が同じ、他の２包はそれぞれ別のとき

など１０通り

②２包が同じ、他の３包のうち２包が同じ、１包は別

など１５通り

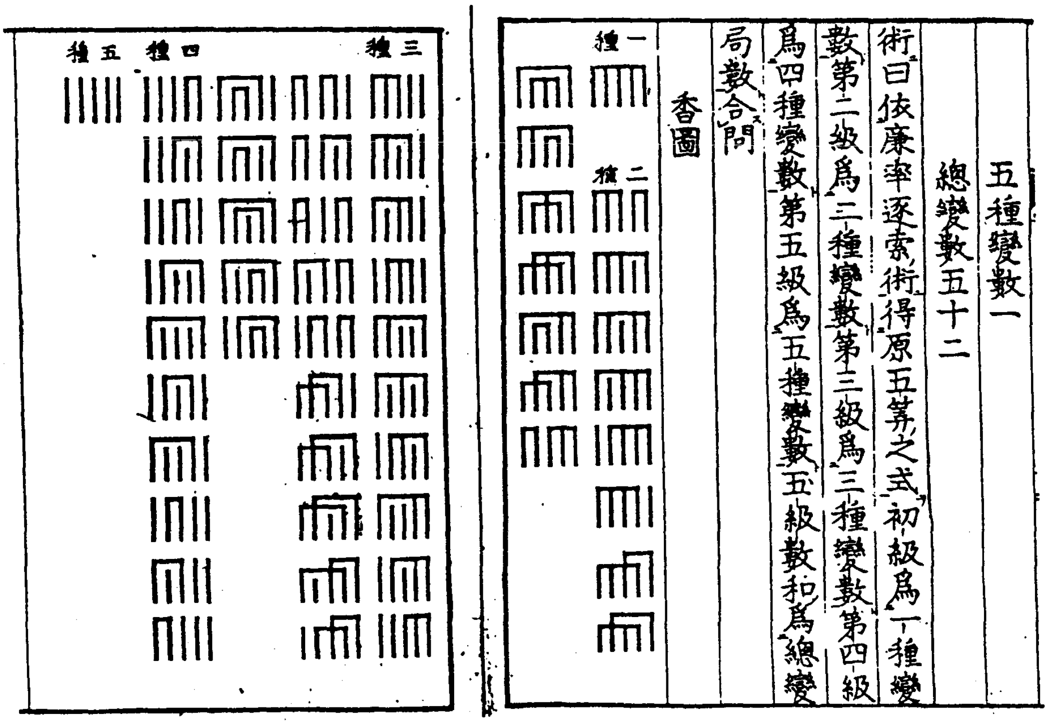
(4)香が４種類の場合、２包は同じ、他は別

など１０通り

(5)香が５種類の場合、の１通り

これより1+(5+10)+(10+15)+10+1=52

この問題は同じものを含む順列と関わりがある。

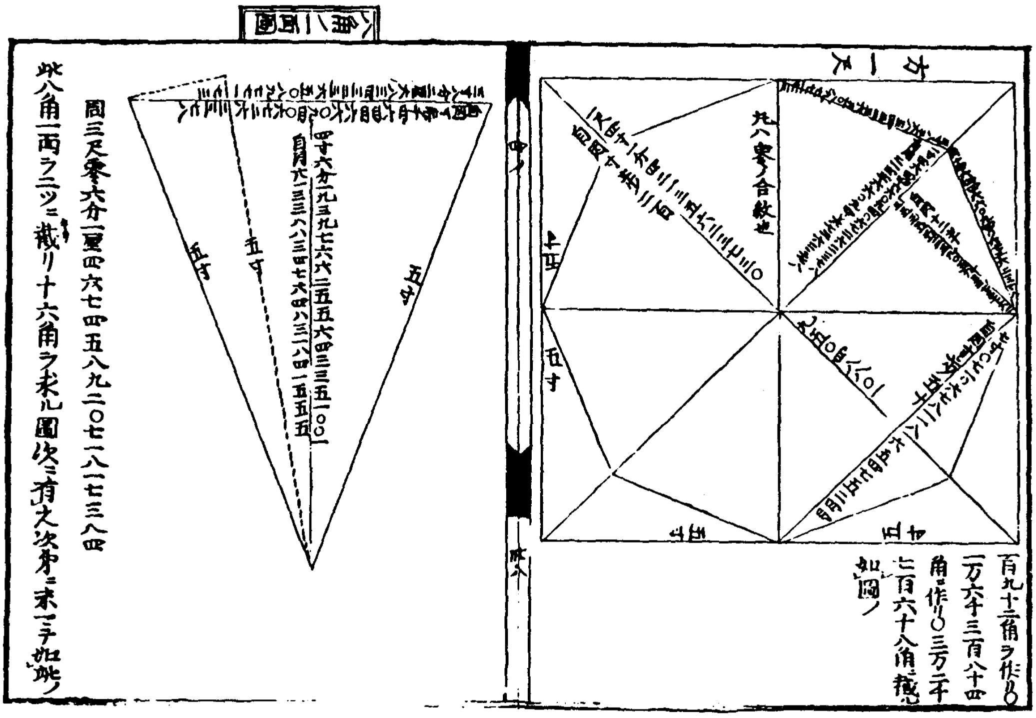

五種變數一
總變數五十二
術曰依康率逐索術得原五第之式初級爲一種變數第二級爲二種變數第三級爲三種變數第四級爲四種變數第五級爲五種變數五級數和爲總變
局數合問
香圖
一種
二種
三種
四種
五種

『算法学海』より

§３．円周の計算

(1)円周の値

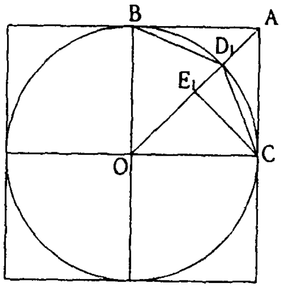
円は古くから人の目につく図形である。その中では丸太の直径と周囲の関係などは大工のような丸太を扱う人にとっては、必要知識であった。江戸時代から見て古

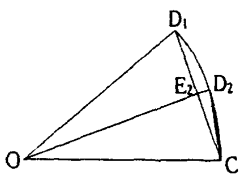


い時代では直径に3を掛けて円周としていた。現代流に言えば円周率は3である。厳密さを求めるようになるのは、直接利害に関係することが起こってからである。租税の対象となる米の収穫高は田の面積に比例する。日本の国土の田のような、形が正方形や長方形などの直線図形以外がいくらでもあるところでは、円形の面積も精密に求める必要があった。江戸時代に入る少し前では円周率として3.16が一般的であった。また、円積率（面積$S=\alpha d^2$, dは直径、αに相当する定数）を0.79として使うようになっていた。しかし、これらは理論的に導いた値ではなかった。寛文3年（1663）に刊行された『算俎』で、村松茂清は円に内接する正多角形を正方形、正8角形、正16角形、正32角形、・・・・、正32768角形の順にその周を計算して、円周率3．1415926487・・・・・・・を得た。

その結果、中国をはじめとして異国の数学書267部900巻以上と照合したが3．14までは確信が持てると判断した。その一部を紹介する。

まず、直径10の円に内接する正8角形を図のように書く。外接する正方形を書き、接点と中心とを結び、円の四分の一の部分に着目する。下図で、四角形ABOCは正方形であるから、BCとAOの交点がE_1、弧BCとAOとの交点をD_1とする。





$AB=5,\ CO=5 \quad \therefore E_1C=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ E_1D_1=5-OE_1=5-E_1C=5-\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

$\triangle D_1E_1C$は直角三角形であるから

$D_1C=\sqrt{D_1E_1{}^2+E_1C^2}=\sqrt{\left(5-\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2+\dfrac{25}{2}}$

$D_1C\times 8 \fallingdotseq 30.6146745892$

弧D_1Cの中点をD_2として、図のようにE_2を定めれば、D_2Cは内接正１６角形の１辺になる。

$CE_2=1.9\times 134176182544885865$

$CE_2{}^2=3.66\times 1165235168155945$

$D_2E=3.80602337443566489996$

$\therefore\ D_2C=1.9509032201612827313$

$D_2C\times 16=31.214451522580523702$13

村松のこの論法は当時の数学者に大きな影響を及ぼした。その一人に関孝和がいる。関（1640?~1708）は彼の学習時代に刊行された『算俎』の計算を自分でも計算してみた。関の円に関する研究の最初である。

(2)近似値の精密化

関孝和の死後、弟子の荒木村英らが関の重要な遺稿をまとめ『括要算法』として刊行した。ここでは正32768角形の周をａ、正65536角形の周をｂ、正131072角形の周をｃとすると、

$$b+\frac{(b-a)(c-b)}{(b-a)-(c-b)}=(\text{定周})$$

とした。これによれば直径１の円周は3.14159265358979323までの１７桁真の値と合っている。この方法を「増約術」というが、高校生にこの根拠を考えさせるのも面白いだろう。

(3)近似分数

これも関孝和の遺稿『括要算法』にある方法で、無限小数を近似分数として表わす方法「零約術」を紹介する。

円周率を分数で近似する。まず、その分数が $\frac{b}{a}=\pi$ と表わされるとして、（ａ，ｂ）の組を（１，３）から始める。ａには順に１を加え、ｂにはπの値が真の値よりも小さければ４を加え、大きければ３を加えることにする。

（１，３）→3，（２，７）→3.5，（３，１０）→3.33･･･，（４，１３）→3.25，

（５，１６）→3.2，（６，１９）→3.166･･，（７，２２）→3.142･･･

（８，２５）→3.125，（９，２９）→3.22･･，（１０，３２）→3.2，

（１１，３５）→3.1818･･，（１２，３８）→3.166･･，（１３，４１）→3.153･･，

（１４，４４）→3.1428，（１５，４７）→3.13･･，（１６，５１）→3.187･･，

･･

･･

これらの中で、今まで使われていた数は

３･･･古法　　$\frac{22}{7}$ ･･･密率（宋の祖沖之の与えた値）

$\frac{25}{8}$ ･･･智術（劉智の与えた値）　$\frac{63}{20}$ ･･･桐陵法（桐陵算法の値）

$\frac{79}{25}$ ・・・和古法（日本で江戸時代以前から使っていた値）

$\frac{142}{45}$ ・・・陸績率（陸績の与えた値）　$\frac{157}{50}$ ・・・徽術（劉徽の与えた値）

などがあり、最後は $\frac{355}{113}$ で終わっている。

この $\frac{355}{113}$ は祖沖之の与えた値であるが記載がない。

第三　求周徑率

周率三徑率一爲初以周率爲實以徑率爲法實如法而一得數定一位少於定周者周率四徑率一多於定周者周率三徑率一各累加之其數列于後

	周率	徑率	周數
古法	三	一	三整
	七	二	三五整
	一十	三	三三三三三三三三三三強
	一十三	四	三二五整
	一十六	五	三二整
	一十九	六	三一六六六六六六六七弱
密率	二十二	七	三一四二八五七一四三弱
智術	二十五	八	三一二五整
	二十九	九	三二二二二二二二二強
	三十二	一十	三二整
	三十五	一十一	三一八一八一八一八二弱
	三十八	一十二	三一六六六六六六六七弱
	四十一	一十三	三一五三八四六一五四弱
	四十四	一十四	三一四二八五七一四三弱
	四十七	一十五	三一三三三三三三三三強

§4．おわりに

和算は江戸時代というあまり自然科学の発達が遅かった時代に、ほとんどの日本人が親しんだ文化である。人間が必要とする「数的知識」を個々の能力に応じて楽しんだ結果が現在にまで残されている。テストでしか人の能力を評価しない現在の数学教育を反省するような材料も含まれているように思えるのだが。