

グラフ電卓を利用する方程式に関する教材

—グラフから方程式をアプローチしよう—

関野真

要約

本論文は、中学校から高等学校の各学年にわたって学習する「方程式」について、代数的に解を求める方法ではなく、グラフ電卓によって視覚的に解を理解する方法について考え、その教材例を提案するものである。

基本的な考え方は「方程式の解がグラフの交点の x 座標に一致する」である。ここでいう解とは代数的な解だけではなく近似解を指し、解を求めるという言葉が持つ本来の主旨からはずれているかもしれない。しかし、中学二年生の段階においては未知なる方程式に対して近似解でも求めようとする姿勢や意欲が、代数的な解にこだわることよりも重要ではないかと考える。

1. はじめに

最近では、数学教育にグラフ電卓を利用することが注目されている。それに伴いグラフ電卓を題材にした論文も多く発表されている。私が属している東京理科大学理学専攻科の数学教育ゼミでは、既存の教科書の枠組みにそってグラフ電卓を活用するのではなく、グラフ電卓を利用することを前提とした教材の開発という目的で研究を続けてきた。

なお研究に使用したグラフ電卓はCASIOのCFX-9850Gである。

2. 研究のねらい

方程式は未知なるものを解き明かす非常に優れた数学の産物であるといえる。しかし現在の中学校教育では二次までの

代数方程式しか扱わない。しかも2002年には解の公式が高等学校に繰り上がるために二次方程式すら不完全になる。高等学校では三次以上の代数方程式を扱うが、それでも解のいくつかが有理数解になるような特別な代数方程式しか扱わない。また、それ以外の方程式は、代数方程式を利用する手法がとられている。このように考えると高等学校までの数学を習得しても $x = 2\sin x$ や $\log x = x - 2$ 等のように、代数的な手段では解くことが困難な方程式がたくさんあることに気づく。そこで代数的な解法を知らない方程式の解を求めるために、グラフ電卓を活用できる教材を開発することをこの論文のねらいとした。

3. グラフ電卓の利点

グラフ電卓を利用した教材を考えるにあたり、まずグラフ電卓の利点を整理し、次に挙げておく。

(1) 省スペース

グラフ電卓は普通教室における授業で、必要に応じて取り出して利用することができる。また必要とするスペースが狭いので、ノートを開くゆとりがないなどの問題が少ない。

(2) 持ち運びに便利

各自が自宅に持ち帰り、学習する際に各自の興味や進み方によって自由に利用できる。

(3) 操作性が良い

パソコンで必要なアプリケーションを起動する手間に比べて、グラフを描く作業が楽であり、操作性が良い。

(4) 思考が中断しない

入力したグラフがすぐに手元で確認できるので、思考が中断することがない。また、グラフが表示された際にわいてくる次なる疑問に対して、即座に実験ができるので、さらなる知的好奇心を引き出すことができる。

4. 教材例

上に述べたグラフ電卓の利点を活かし、次のようなグラフ電卓用の教材（中学二年生対象）を考えた。

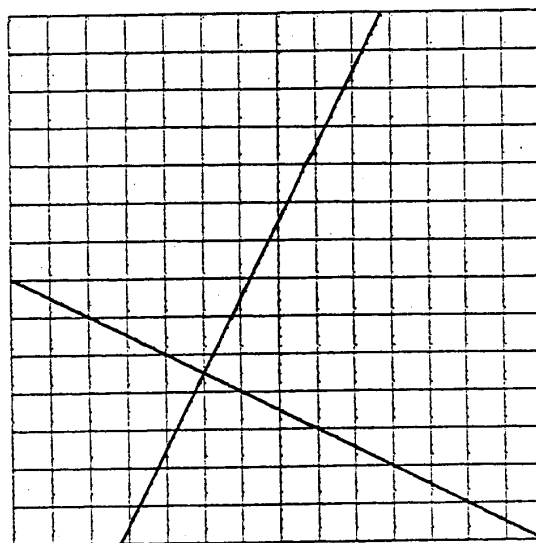
(1) 交点と解について

連立方程式の例から、交点と解の関

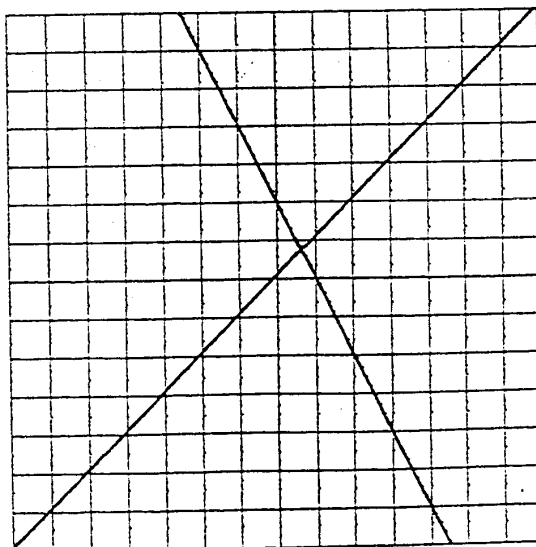
係について観察させ学ばせる。

このとき、グラフ電卓で求めた交点の座標を連立方程式に代入するようになれば、連立方程式の解と交点の関係は比較的簡単に見抜けるはずである。

$$[1-1] \begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = -\frac{1}{2}x - 7 \end{cases}$$



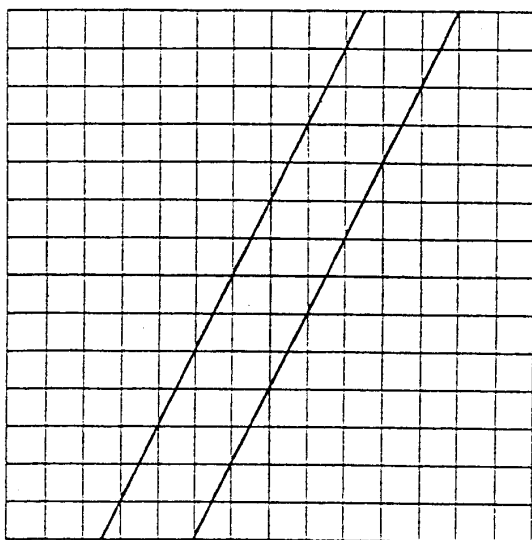
$$[1-2] \begin{cases} y = x + \frac{1}{4} \\ y = -2x + 4 \end{cases}$$



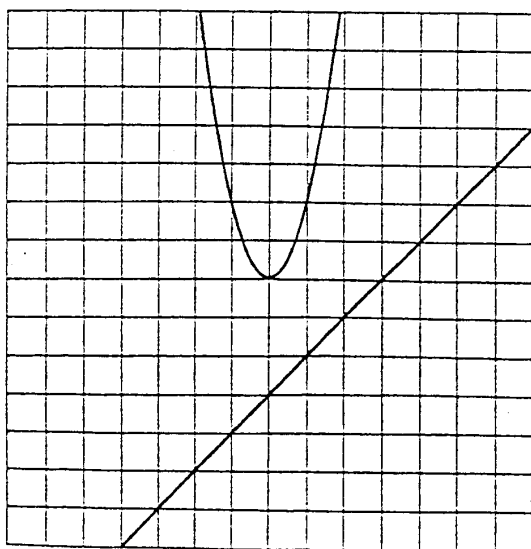
(2) 解の存在について

通常、中学二年では二元一次の連立方程式を学習するが、ここでは、そういった枠組みを取り外し、様々な方程式を連立し、「解が必ず一つ存在する、とは限らない」ことも観察させる。

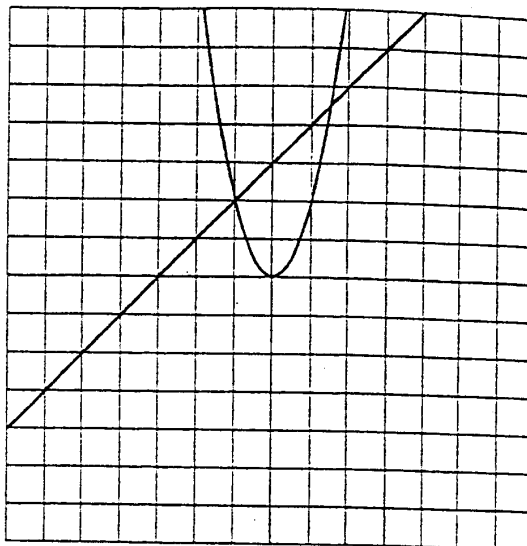
$$[2-1] \begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = 2x - 6 \end{cases}$$



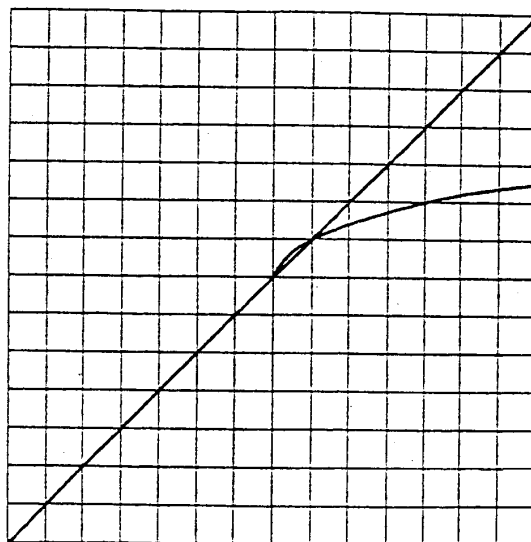
$$[2-2] \begin{cases} y = x^2 \\ y = x - 6 \end{cases}$$



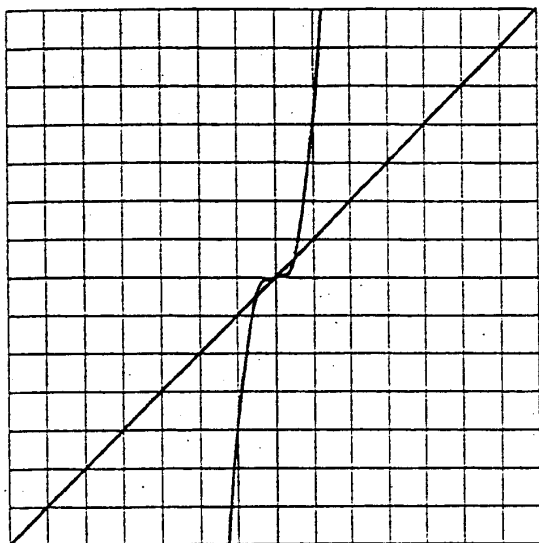
$$[2-3] \begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 6 \end{cases}$$



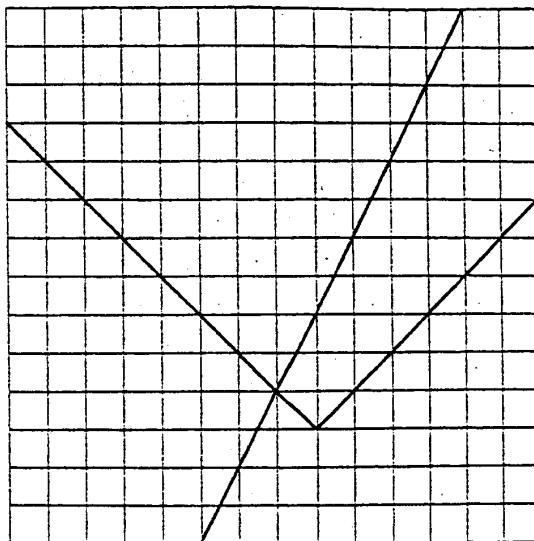
$$[2-4] \begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = x \end{cases}$$



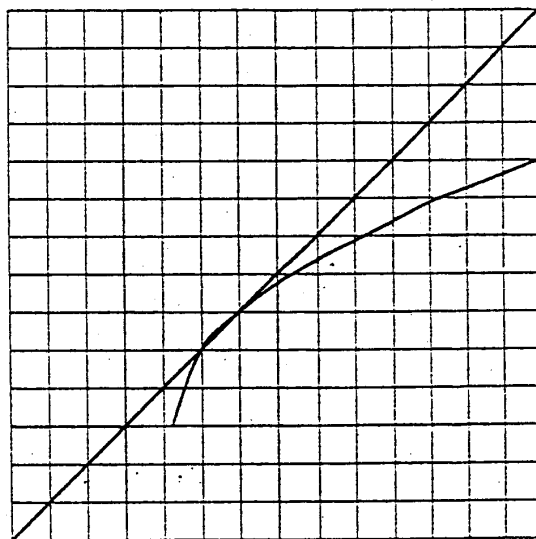
$$[2-5] \begin{cases} y = x^3 \\ y = x \end{cases}$$



$$[3-2] |x+6| = 2x+18$$



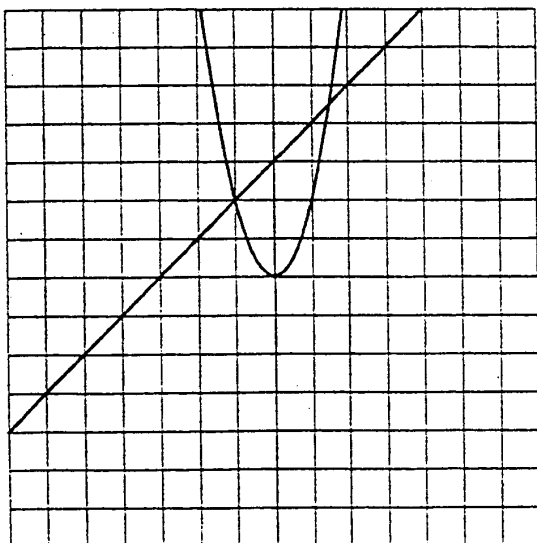
$$[3-3] \sqrt{5x-6} = x$$



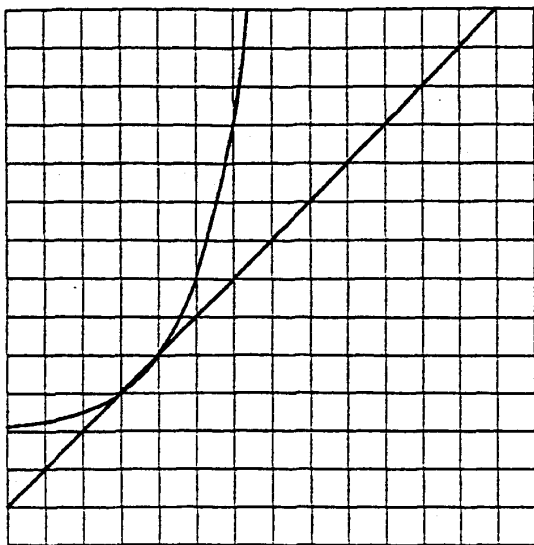
(3) 一般的な方程式への活用

方程式の解とグラフの交点との間には、非常に強い関係がある。一般的な方程式 $f(x) = g(x)$ の解は $y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフとの交点の x 座標と捉えることができるからである。このことを利用し、一般的な方程式をグラフ電卓によってグラフ化し解を探る。

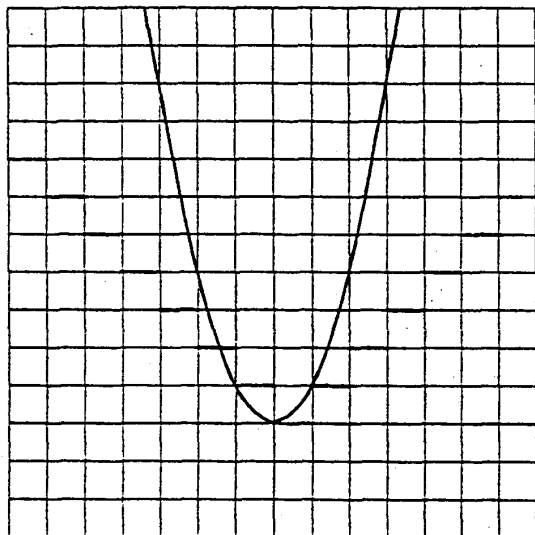
$$[3-1] x^2 = x+6$$



[3-4] $2^x = x+1$



[3-5] $|[x]| = x^2$

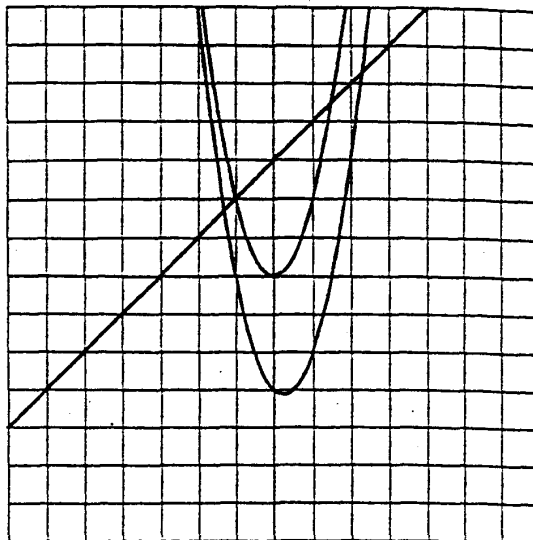


(4) 移項について

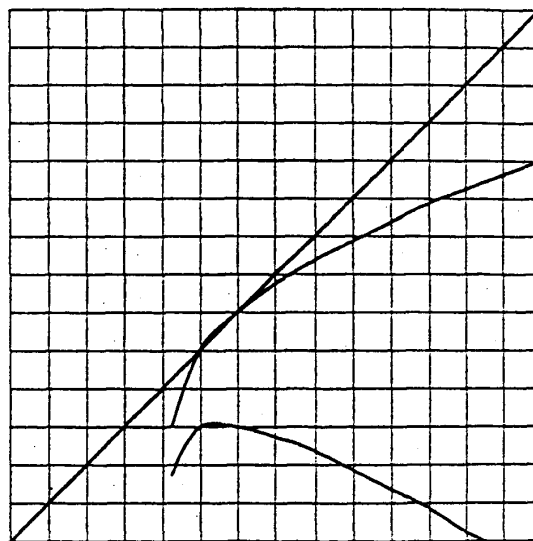
方程式 $f(x) = g(x)$ はこれを移項した方程式 $f(x) - g(x) = 0$ と同等である。しかし前者は $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の交点であり、後者は $y = f(x) - g(x)$ と $y = 0$ の交点である。ここでは、方程式の解が連立の仕方に依存しないことを観察させる。

ここに示した二つの例以外にも様々な方程式で実験させると良い。

[4-1] $x^2 = x+6$ と $x^2 - x - 6 = 0$



[4-2] $\sqrt{5x-6} = x$ と
 $\sqrt{5x-6} - x = 0$



(5) 二次方程式の解と係数の関係

二次方程式の解と係数の関係については、高等学校「数学Ⅱ」で学習する内容である。このうち和に関する関係については、グラフ電卓を用いて観察すれば中学生でも見抜くことが可能であると思われる。

一般の二次方程式 $x^2 + px + q = 0$ の解を α, β とすると $\frac{\alpha + \beta}{2}$ が二次関数の軸の x 座標と一致することと、軸が $x = -\frac{p}{2}$ で表されることが、実験によって読み取れる。このことから次の関係

$$\alpha + \beta = -p$$

が得られる。

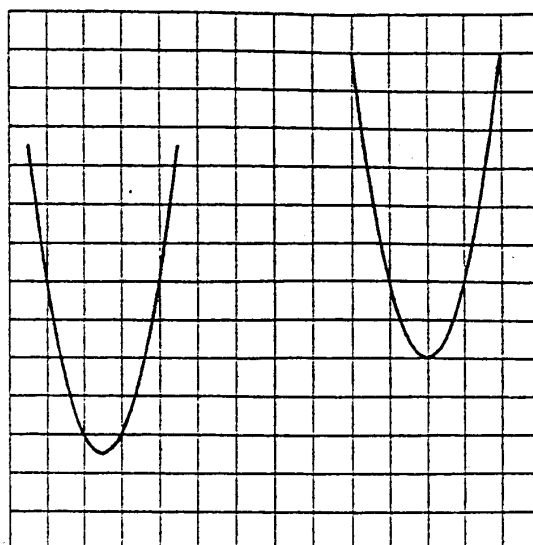
例えば、 $x^2 + 9x + 18 = 0$ を描いてみると右上図（左）ようになり、解と軸の関係より、

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = -\frac{9}{2} \Leftrightarrow \alpha + \beta = -9$$

また、同様に $x^2 - 8x + 15 = 0$ を描くと、右上図（右）となり

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{8}{2} \Leftrightarrow \alpha + \beta = 8$$

となる。



(6) 代数学の基本定理

代数学の基本定理は、「 n 次方程式の解は複素数の範囲で、のべ n 個存在する」という定理である。この定理そのものをグラフ電卓で理解させることは難しいと思われるが、「 n 次方程式の実数解は高々 n 個である」という主張ならば、中学生でも十分観察・発見できるものと思われる。

例えば、三次方程式 ($n=3$) の場合は、下図のように高々 3 個である。



5. 今後の課題

これからの教育では「生きる力」を育むために体験的な作業を通して理解させることが重要だとされている。数学教育においても、視覚として体験しやすいグラフ電卓を活用する教育方法が開発されることは望ましい方向性であると考えている。しかし、方程式の解法を工夫し効率的に解こうとする意欲、自分でグラフを描く確実な技術など、グラフ電卓を導入することで育みにくくなる能力や資質が存在することを忘れてはならない。

今後は、グラフ電卓を利用することによるデメリットを調べ、それを踏まえた上で更に効果が見込まれる教材の製作をしていきたい。

また、実際にグラフ電卓を活用した授業を積極的に行っていきたい。

6. おわりに

この論文の執筆にあたり一年間の指導をして下さいました池田文男（教育数学ゼミ）、長野東（理数研）両先生に、厚くお礼申し上げます。また、忙しい中、教育数学ゼミ参加して様々なアドバイスをして下さいました現職教員の先輩方、そして共に励ましあい、意見交換し、切磋琢磨してきた同ゼミの仲間たちにもあわせてお礼申し上げます。

7. 参考文献

- [1] 中込雄治, 「小型コンピュータの活用で変化する指導形態について」, 日本数学教育学会誌, 第 78 巻・第 7 号・1996 年
- [2] 持永純子, 「グラフ電卓を活用した数学科の指導に関する研究」, 日本数学教育学会誌, 第 77 巻・第 9 号・1995 年
- [3] 鈴木誠, 「連立方程式の解を目で見ると」, グラフ電卓で数学を!, CASIO
- [4] 寺田文行・巻久・吉村啓, 「グラフ電卓で数学する」, 共立出版株式会社, 1995 年
- [5] B. ケリー, 「グラフ電卓で探る 数学の世界」, 現代数学社, 1997