サイエンスへの招待

「小さな世界」をスケーリング則で考える

東京理科大学 工学部 機械工学科 准教授 元祐(もとすけ) 昌廣(まさひろ)

はじめに

漫画「ドラえもん」は，子供向けではあるが，大人になって読んでみると，科学が持つ夢と希望をその中に感じることができ，科学者という立場になった今でも新鮮に映る（今だから余計に新鮮なのかもしれない）。その中には「物体の大きさを小さくする道具」が複数存在し，場合に応じて主人公とその仲間たちが小さくなってさまざまな所を冒険したり，敵対するキャラクターを小さくしてやっつけたり，と道具は大活躍する。

この「縮小機能」を有するひみつ道具には，漏斗のような形状をした，大きい側から小さい側に抜けると小さくなる「ガリバートンネル」や，小さな帽子型の道具で，これを被るとこの帽子サイズに小さくなる「いっすんぼうし」などが存在するが，何といっても最も有名なひみつ道具は「スモールライト」であろう。これは，懐中電灯型の道具で，スイッチを押して出る光を浴びた物体が小さくなる，というものである。縮小する度合が光線の暴露時間で調整可能，1.5 V電池２本で動作する，という点も驚きではあるが，ここでは触れないこととして，純粋に「小さくなると世界はどうなるか」について考えることにする（**図１**）。

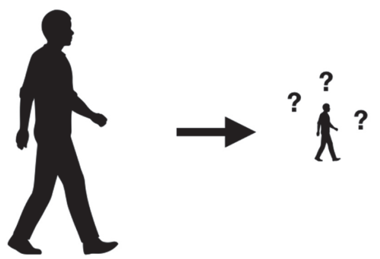

図１　小さくなると世界はどうなるか

「小さくなると世界はどうなるか」について描いているさまざまな物語や作品は数多く存在している。日本の昔話では『一寸法師』，外国の童話では『親指トム』や『ガリバー旅行記』，映画では『Fantastic voyage（ミクロの決死圏）』や『Ant-Man（アントマン）』などが知られている。これらは，主人公が通常の人のスケールより大きい，あるいは小さい，という設定が与えられており，サイズが違うことの利点・欠点などが扱われている。

本稿では，スケーリング則を用いて，「小さな世界」について紹介していきたい。といっても，誌面の限りと著者の能力の限界もあって，紹介する内容は限られたものになることは先に伝えておきたい。

ここで，形状を保ったままシステム全体が縮小される等張写像を仮定すると，長さスケールLが小さくなると，体積はL^3に比例して小さくなる。単位体積あたりの質量である物体の密度を一定だと仮定すると，重量も体積と同様，L^3に比例することになる。

通常サイズの人と，大きさが1/10の人の食料事情について考えると，単位重さあたりに必要な栄養（摂取エネルギー量）が一定の場合，$L^3=(1/10)^3=1/1{,}000$となり，なんと0.1％の食料摂取で事足りる，ということにな

る。『ガリバー旅行記』では，ガリバーはリリパット人の12倍の身長で，食料がかかりすぎるために追放されるというストーリーになっている。$12^3 = 1{,}728$なので，1,700人分以上の食料を必要とするため，追い出されても仕方なし，といったところであろうか。

そして，長さスケールLが小さくなると表面積はL^2に比例して小さくなる。ここで重さmの物体に作用する重力F_{gr}を考えると，重力加速度をgとして，

$$F_{\mathrm{gr}} = mg \propto L^3$$

と表される。これは，重量がL^3に比例するとした前述の内容と一致する。次に，この物体が地上にいる場合に作用する圧力P_{gr}は，

$$P_{\mathrm{gr}} = \frac{F_{\mathrm{gr}}}{S} \propto \frac{L^3}{L^2} = L$$

となるため，小さいほど重力による圧力が小さくなることを意味する。生物が大きくなるためには，重力由来の圧力に耐えるだけの強靭な構造が必要となり，このためか，地上の動物の大きさは最大でも３～４m程度にとどまっている。水中には浮力の寄与があるため，サイズが大きいことはそれほど大変ではないせいか，もう１桁大きい動物まで存在している。

体積に対する表面積の割合，すなわち比表面積（surface-to-volume ratio, S/V）は，

$$S/V = \propto \frac{L^2}{L^3} = L^{-1}$$

となり，L^{-1}に比例している（**図２**）。これは，サイズが小さいほど表面の影響，あるいは表面支配の現象の影響を受けやすくなることを意味している。このことを生物の熱収支で考えると，生物は食料を摂取して代謝により熱を生産しており，このエネルギー量は生物の重量に比例，すなわちL^3に比例することは前述した通りである。この摂取エネルギーは表面から熱として逃げていくため，L^2に比例した熱エネルギーが奪われる，すなわち消費されることになる。摂取エネルギー量に

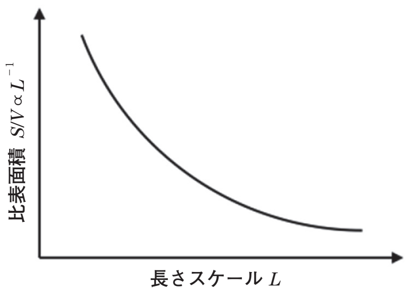

図２　比表面積は長さスケールが小さいほど大きい

対する消費エネルギーの比を表す代謝率BはS/Vに等しいと考えられるので，小さな動物ほど熱の逃げの影響は大きい。そのため，ある一定の体温を維持するために，小さな動物はより頻繁に食料を摂取する必要があることを意味する。これを生物個体の重量mのべき乗の形で表すと以下のようになる。

$$B \propto L^2 = (m^{1/3})^2 = m^{2/3}$$

実際の生物における代謝とエネルギー消費はもっと複雑ではあるが，2/3乗に比較的近い3/4乗で表現されると報告されている（Kleiberの法則）。

$$B \propto m^{3/4}$$

この2/3と3/4の違いについては，さまざまな説が提案されているが，現状ではまだ完全な説明はなされていない。

このように，スケーリング則を用いて異なるサイズの世界を考えることで「小さくなると世界はどうなるか」を概念的に取り扱うことができ，異なるスケールを自由にまたいで思考・分析することができる。

いろいろな動作のスケール効果

さて，それでは，いくつかの生物の「動作」について，スケーリング則を用いて，サイズ依存性の有無やその程度について考えてみる。その際，長さスケールLに加えて，重量mの依存性についても併記することにする。これは，生物学では，計測が簡単な物理量として重さを使う場合が多いため，その作

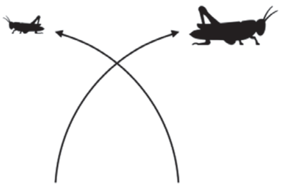

図３　ジャンプする高さはサイズが違っても同じ

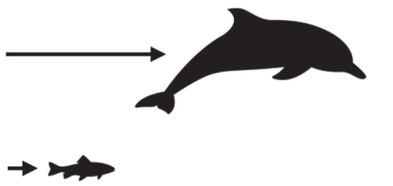

図４　大きいほど速く，小さいほど遅く泳ぐ

法に習って記載するためである。

⑴ 歩行

歩行によってある距離をある歩数で移動する場合の仕事について考える。ある距離を歩くのに必要な歩数nは，足の長さの逆数に比例すると考え，足の長さは生物のサイズに比例するとして，以下のように表される。

$$n \propto L^{-1}$$

一歩分だけ歩くのに必要な仕事（エネルギー量）は，生物の重量に比例すると考えると，ある距離をn歩だけ移動する時の仕事Wは，

$$W \propto mn \propto L^3 \cdot L^{-1} = L^2 \quad (\propto m^{2/3})$$

となり，WはL^2に，そして$m^{2/3}$に比例する。したがって，小さな生物の方が，歩行で消費するエネルギーが小さく，大きな生物の方が歩くのが大変なことが分かる。

⑵ ジャンプ

重量mの動物が高さhだけ飛び上がる場合について考える。このとき必要なエネルギーはmghに等しく，

$$W = mgh \propto m \propto L^{1/3}$$

と表され，Wは$L^{1/3}$に，そしてmに比例する。これは，小さい動物の方がジャンプ時の消費エネルギーが小さいことを意味する。ここで，このジャンプ動作に必要なエネルギーは筋肉（あるいはそれに類する器官）により供給されており，筋肉量は重量に比例すると考えると，$L^{1/3}$に比例することになる。したがって，hだけ飛び上がるのに必要なエネルギーと消費エネルギーがバランスするので，高さhは以下のように表すことができる。

$$h \propto \frac{m}{mg} = \frac{1}{g}$$

これより，ジャンプ高さhはLやmに依存しないことが分かる（**図３**）。これは，大小の動物が同じだけジャンプできるとすると，小さい動物の方が相対的には高くジャンプできる，とも考えられ，上の消費エネルギーの大小関係と合わせて考えても合理的である。映画『Ant-man』で身長1.5 cmの小さな主人公が，人間と同じくらいの数十cmのジャンプを披露しても，スケーリング則から考えるとそれほど不思議ではない。

⑶ 泳ぎ

速度vである時間だけ泳ぐ場合について考える。泳ぐために必要となるエネルギーWは，泳ぐ距離に比例すると考えられ，時間を固定すると，速度vに比例する。

$$W \propto v$$

また，このエネルギーは，速度vと表面積Sに比例する流体抵抗にも比例するため，

$$W \propto v \cdot vS = v^2 S$$

と考えることができる。速度vは，エネルギーが重量mに比例することを使って表すと，以下のように表現できる。

$$v = \sqrt{\frac{W}{S}} \propto \sqrt{\frac{m}{S}} \propto \sqrt{\frac{L^3}{L^2}} = L^{1/2} (\propto m^{1/6})$$

したがって，泳ぐ速度は$L^{1/2}$に，そして$m^{1/6}$に比例することが分かり，小さな生物ほどゆっくり泳ぐ（**図４**）。この関係は，大きな生物が小さな生物を捕食するためには必要で，そうでないと，大きな生物は小さな生物を捕まえることができないことになる。

⑷ 飛翔

速度vで空中を飛翔する生物について考える。浮き上がる力，すなわち揚力F_Lは，空気（周囲流体）の密度をρ，揚力係数をC_Lとすると，以下のように表すことができる。

$$F_L = \frac{1}{2} \rho S v^2 C_L \propto S v^2 \propto L^2$$

揚力が重力F_{gr}とバランスすると考えると

($F_{gr}=F_L$)，vとL，あるいはmとの関係は以下のように表すことができる。

$$v \propto L^{1/2} (\propto m^{1/6})$$

このことより，速度vは小さい生物ほど遅く，$L^{1/2}$，$m^{1/6}$に比例する。これも泳ぎと同様，大きな生物の方が早く飛翔できることが，小さな生物を捕まえるために必要であるので，このスケール効果は合理的ともいえる。

熱・物質移動のスケール効果

これまでは，生物を主人公として扱い，スケーリング則を用いてその運動特性を考えてきた。ここでは，熱や物質の移動現象に対するスケール効果について考えていく。

「長さスケールLの減少に伴ってS/Vが小さくなる」ということを，もう少し工学的に表現すると，熱や物質の移動現象に関して，流体現象は粘性が，熱移動現象は伝導が，物質輸送では分子拡散が，それぞれ支配的になる，ということになる。「小さな世界」での熱流体現象の特徴をまとめると以下のようになる。

- 流れは層流
- 圧力損失が大きい
- 加熱や冷却がはやい
- 分子拡散が支配的
- 界面張力の影響大

以下では，これらの特徴についてある程度の例を交えながら説明していく。

(1) 流れは層流

流体の流れは，慣性力と粘性力の比で表現されるレイノルズ数Reを用いて特徴づけることができる。

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v^2}{\eta v/L} = \frac{\rho v L}{\eta} = \frac{vL}{\nu} \propto L$$

ηは粘性率，νは粘性率を密度で除した動粘性係数である。ReはLに比例し，長さスケールが小さいほど小さくなり，粘性力の影響が強まることを意味する。このReの大きさにより「層流か乱流か」を分類することができ，管内の流れでは約2,000が閾値として知られている。

図５　小さな物体を回り込む流れは整っており（層流），大きな物体とは大きく異なる

ここで，一般的な水道ホース（内径20 mm）を例にとって考えてみる。常温の水を流すとすると，動粘性係数は1×10^{-6} m^2/s程度であるので，Re＝2,000となる流速は0.1 m/sとなる。通常の家庭用水道蛇口をひねって出る水の流速はおおよそ数 m/sなので，かなりチョロチョロと流さない限りは乱流だと考えて良い。一方，ヒトの髪の毛の太さ程度（～0.1 mm）の内径を持つマイクロ流路のReを求めてみると，Re＝2,000となる流速は20 m/sとなり，相当な高速な流れでもない限り，流れは乱流にはならず層流になる。

このように，小さなスケールでは流れは層流になることが分かるが，層流では，渦や乱れが流れ中に発生しにくく，障害物などを置いても，それを迂回するようにスムースに流れることになる（**図５**）。この性質は，流れに乗せて物質を輸送する場合，到達する場所が予想しやすいというメリットがあるが，混合しにくい，というデメリットも存在する。

(2) 圧力損失が大きい

次は，管を流れる流体の消費エネルギー，すなわち圧力損失について考える。流体のエネルギー消費は，流体が接する壁面との摩擦を意味するせん断応力（wall shear stress, WSS）を用いて表現される。WSSは粘性率と壁面での速度勾配dv/drを用いて以下のように表される。

$$\mathrm{WSS} = \eta \frac{dv}{dr}$$

そして，内径d，長さlの円管の摩擦による圧力損失ΔPは，層流の場合は以下のように

表される。

$$\Delta P = \frac{64}{\mathrm{Re}} \cdot \frac{1}{d} \cdot \frac{\rho v^2}{2} = \frac{32\eta vl}{d^2} \propto d^{-2}$$

圧力損失はd^{-2}に比例するため，細管ほどエネルギー損失が大きくなることが分かる。

ここで先ほどのホースとマイクロ流路の例を用いて考えてみると，内径20 mmと0.1 mmは1/200なので，圧力損失は（1/200）$^{-2}$=40,000倍になる。したがって，細管では，流体を送り込むためのエネルギーが膨大になる，ということを意味する。ここで注意するのは，この試算は２種類の異なる内径の管に同じ流速で流体を流すことを仮定していることである。そのため，両者のReは異なり，流れの様子も違うことになる。仮に同じReで流す場合を考えると$\Delta P \propto d^{-1}$となり，200倍程度にとどまることになる。それでも，小さな管に流体を流すには大きなエネルギーが必要となる点には変わりはない。

⑶ 加熱や冷却が速い

先に，小さな動物は熱が相対的に多く逃げるために体温維持が大変になる，ということを述べたが，熱がどのくらい速く奪われるのかをここで考える。

ここでは，物体内部の温度分布を無視し，熱容量（比熱cと密度ρの積）だけを取り扱うことにする。ある物体の周りの温度が急に変化したときの物体温度の追従性（どのくらいの時間で周りの温度に近づくか）は，時間に対して指数関数的な変化を示し，このときの特性時間τ_Tは以下のように表される。

$$\tau_T = \frac{\rho c V}{\alpha S} \propto \frac{L^3}{L^2} = L$$

αは熱伝達率と呼ばれる係数で，物体表面からの移動エネルギー量と温度差を関係づける係数である。特性時間はLに比例し，長さスケールが小さいほどτ_Tが小さい，すなわち素早く温度が変化することが分かる。

ここで，直径65 mmのテニスボールと直径10 µmの人体内の細胞の特性時間を比較すると，テニスボールに対して細胞は0.015 %の大きさなので，特性時間も0.015倍になる。すなわち，細胞の加熱や冷却は，テニスボールの6,500倍高速になる，ということが分かる。このことは，鍋などの調理で具材を早く煮込むためにその具材を細かく切る，という生活の知恵にも現れており，先人が物体の伝熱現象をスケーリング則を用いて考えたかどうかは分からないが，少なくとも経験的にこのスケール効果を理解していたことがうかがえる。

続いて，先ほどのホースとマイクロ流路の例について再び考える。ホースや流路の壁面を温めておき，そこに異なる温度の流体を流し，流体温度が壁面温度に等しくなるまでの長さについて考える。この長さは温度助走区間L_Tと呼ばれ，以下の式で表される。

$$L_T = 0.05\frac{vd^2}{a} \propto d^2$$

aは熱拡散率で，熱伝導率を熱容量で除した物性値である。L_Tはd^2に比例し，小さな管ほどL_Tが短くなることが分かる。ホースとマイクロ流路を比べると，マイクロ流路はホースの１/40,000の長さで液体を加熱することができる，ということになる。数値を示すと，流速10 mm/sの場合，ホースでは２m，マイクロ流路ではなんと50 µmになり，「小さな世界」では流体がすぐに周りの温度と同じになることが分かる。

⑷ 分子拡散が支配的

物質の移動には，流れに乗って物質が運ばれる移流と，物質そのものが自然にじわじわと広がっていく分子拡散とが存在するが，「小さな世界」では拡散が支配的になる。この移流による移動量と拡散による移動量の比はペクレ数Peを用いて特徴づけられる。

$$\mathrm{Pe} = \mathrm{Re} \cdot \mathrm{Sc} = \frac{vL}{D} \propto L$$

Dは物質の拡散係数，Scは粘性率を拡散係数で除したシュミット数と呼ばれる無次元数

である。PeはLに比例し，長さスケールが小さいほど小さくなる。これは「小さな世界」ほど流れが物質を運ぶより拡散による移動の方が支配的になることを指している。

そして「小さな世界」での拡散を考えると，拡散によって物質が移動する距離L_Dは

$$L_D = \sqrt{2D\tau_D}$$

と表され（τ_Dは拡散の特性時間），これを変形すると，

$$\tau_D = \frac{L_D^2}{2D} \propto L^2$$

のようになり，拡散時間はL^2に比例することが分かる。これは，サイズが小さいほど早く拡散現象が完了することを意味している。

ここで，テニスボールと細胞について，それぞれの表面から中心に物質がじわじわと拡散で移動する場合について考えてみると，テニスボールの場合と比べて，細胞の拡散移動時間は，$(1/6{,}500)^2$＝約1/4,200万と，数千万倍高速に拡散が起きることになる。このことは，煮卵を作る際にどのくらい漬け込むと味が染みるのか（**図６**），など，調理の世界ではこのスケーリング則がレシピとして存在することが多い。

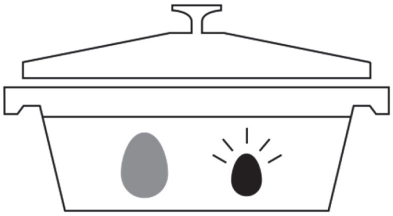

図６　煮卵の漬け込み時間は分子拡散のスケーリング則で考えることができ，小さい卵ほど短時間で完成する

もちろん，物質拡散の速度そのものが早くなるわけではないので，「小さな世界では物質移動が高速だ」などと言われると，直感的には違和感があるようにも思えるが，移動距離が短いので到達時間も短く，早く反応が終了する，と理解すると分かりやすい。

(5) 界面張力の影響大

「小さな世界」では，比界面積S/Vが大きくなるため，界面に作用する張力の影響が大きくなる。液体にガラス管を挿入すると，液面はガラス管内を少し上昇する，毛管上昇と呼ばれる現象が起きる。この上昇を引き起こす源となる力が表面張力γで，ガラス管内（内径d）の液面上昇高さhは，外気と流体の密度差$\Delta\rho$とガラスと液体の接触角θを用いて，以下のように表される。

$$h = \frac{4\gamma\cos\theta}{\Delta\rho g d} \propto d^{-1}$$

hは管の内径d^{-1}に比例しており（Jurinの法則），細管ほど液面は高くなる（**図７**）。

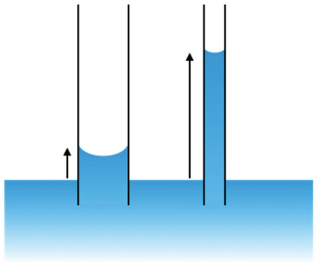

図７　細管の方が毛管上昇による液面高さが高い

おわりに

本稿では，スケーリング則を用いて「小さくなると世界はどうなるか」を考えてみた。生物の動作，熱や物質移動において，「小さな世界」と「大きな世界」の差異に焦点を当てて，基礎的な考え方を紹介した。式が多くなってしまったことは反省すべき点だが，式を読み飛ばして文章のみから「小さな世界」観を理解してもらっても全く問題ない。

このスケーリング則を用いることで，比較的シンプルな考え方で異なるスケールでの現象を理解することができる。しかし，考慮する現象が適切である必要があり，これを間違えると無意味な考察や，誤った解釈に辿り着いてしまう点には注意が必要である。

筆者は自身の研究で「小さな世界」の現象を制御・利用するマイクロデバイスに関する研究を行っているが，デバイス設計の前段階でこのスケーリングを用いた分析・解析を行い，「どんなことが起きそうか」に対する「アタリ」を付けており，個人的には有用だと考えている。